Řízení trajektorie robotů

aktuátory robotu ~ technické prostředky k fyzikálnímu ovlivnění prostředí (obecně)

pro mobilní roboty ~ specializované systémy umožňující přemístění systému v prostředí

technické řešení:

kolové systémy
- ▷ kolové podvozky
- ▷ pásy
- ▷ všesměrová kola

- ▷ ~~kráčející~~ systémy pro realizaci pohybu
- ▷ ostatní (vznášedla, vrtulníky, letadla, atd.)

vlastnosti jednotlivých řešení:

1 Ostatní
- většinou speciální roboty - plavající a létající stroje.
- časté omezení na realizovaný pohyb
  - zachování minimální rychlosti (letadlo)
  - omezená manévrovatelnost (brzdění, akcelerace, zatáčení) např. u letadel

- problém stabilizace polohy, rychlosti (např. stojící vrtulník) nebo principiální nestabilita systému → regulační problém

2 Kráčející systémy

- výhodou je vysoká prostupnost v terénu

komplikovaná úloha teorie řízení

- složité řízení pohybu – mnoho stupňů volnosti, mnoho pohonů
- úloha stabilizace těla robotu (k umožnění měření senzory)
- 2-nohé (bipedy) a 1-nohé (monopedy) systémy mají problém statické/dynamické stabilizace těla robotu

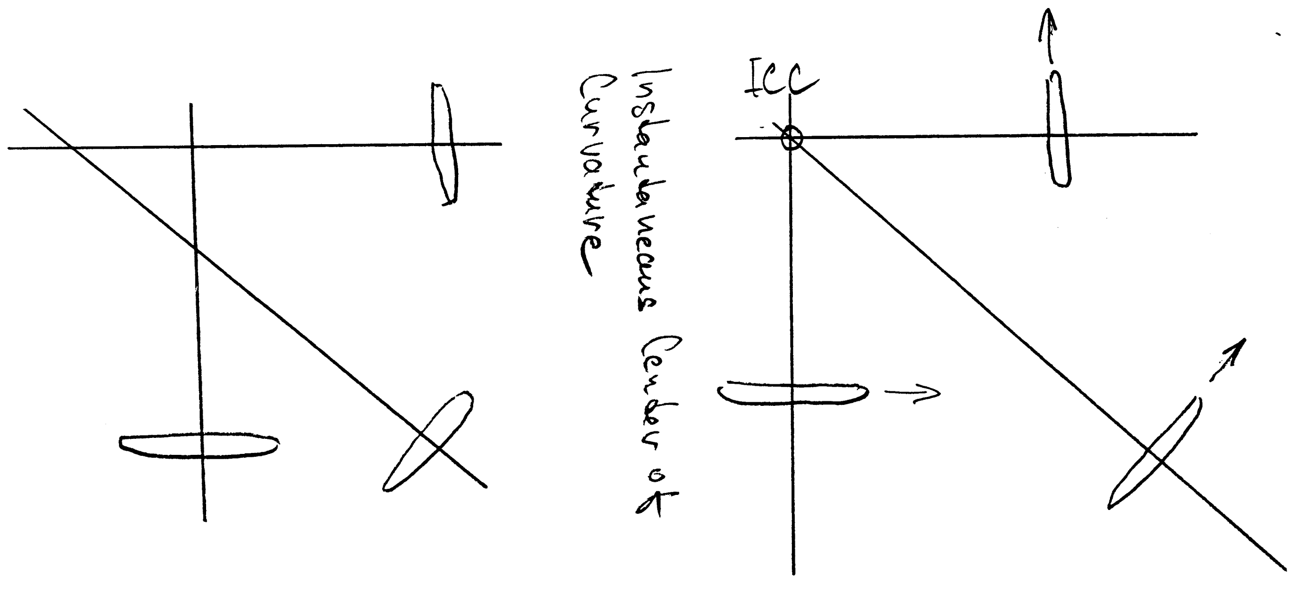
3 Kolové systémy

- kolové podvozky
- pásové podvozky / smýkaná kola
- všesměrová kola (mecanum wheels)

rozdělení z hlediska kinematiky podvozku:

- ▷ diferenciální pohon
- ▷ Ackermannovo řízení (car-like)
- ▷ synchronní pohon
- ▷ všesměrová kola

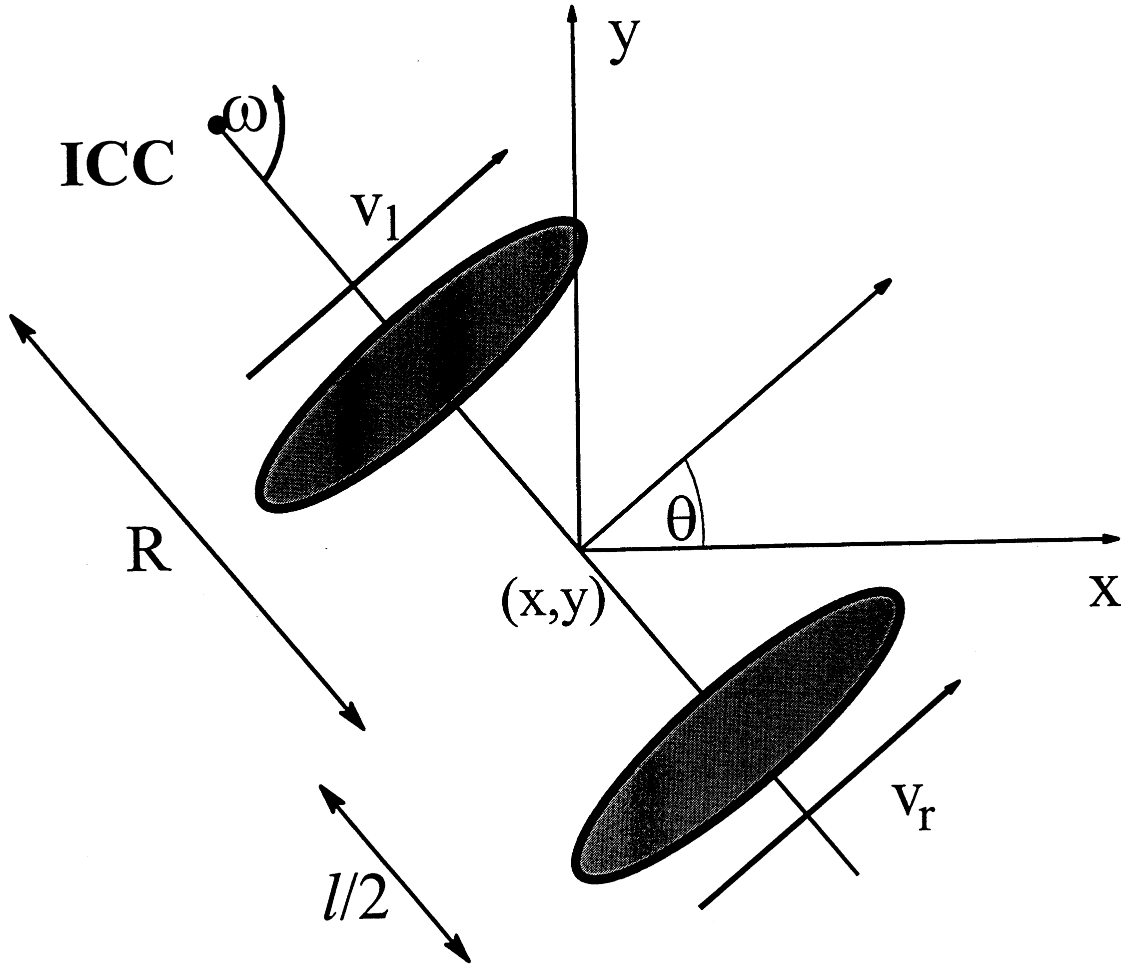
▷ smykový vs. otáčivý pohyb kolových podvozků –
– pro otáčivý pohyb je nutné mít <u>společný střed otáčení</u> (zakřivení) trajektorie pro všechna kola



<u>pozn1:</u> platí pouze pro ideálně "tenká" kola s šířkou běhounu → 0

<u>pozn2:</u> ostatní situace (smýkání) jsou obtížně analyticky postižitelné (fyzikální <u>proces tření</u>)

Diferenciální pohon.



$$ICC = [x - R\sin\Theta \,,\; y + R\cdot\cos\Theta]$$ souřadnice středu otáčení

$$v_r = \omega\,(R + l/2)$$

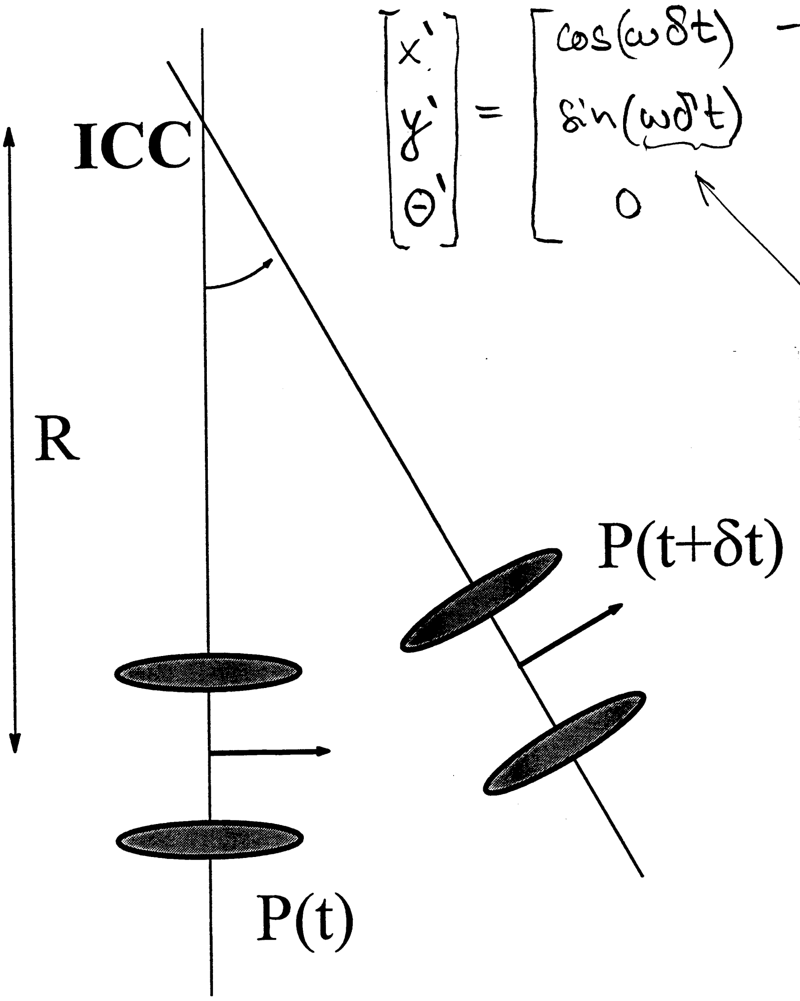
$$v_l = \omega\,(R - l/2)$$

dopředná rychlost jednotlivých kol

$$R = \frac{l\,(V_l - V_r)}{2\,(V_l - V_r)}$$ poloměr zatáčení

$$\omega = \frac{v_r - v_l}{l}$$ (úhlová) rychlost zatáčení

Kinematická rovnice pro libovolný pohyb :



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \Theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\delta t) & -\sin(\omega\delta t) & 0 \\ \sin(\omega\delta t) & \cos(\omega\delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - ICC_x \\ y - ICC_y \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ICC_x \\ ICC_y \\ \omega\delta t \end{bmatrix}$$

diferenciál úhlu
$\omega\delta t \sim \delta\Theta$

integrací předchozího:

$$x(t) = \int_0^t v(t') \cdot \cos[\Theta(t')]\, dt'$$

$$y(t) = \int_0^t v(t') \cdot \sin[\Theta(t')]\, dt'$$

$$\Theta(t) = \int_0^t \omega(t')\, dt'$$

z čehož plyne :

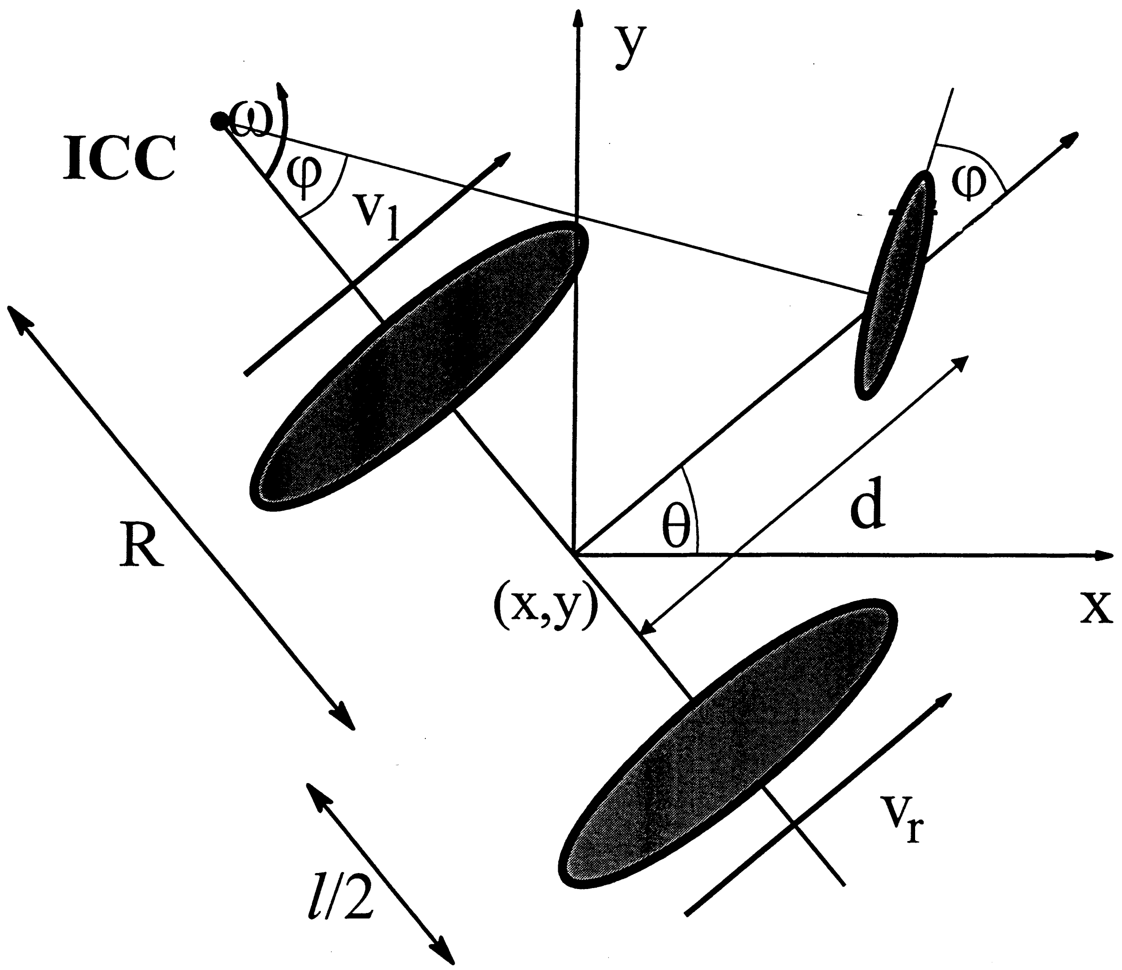
že po dosazení platí též (základní pohybové rovnice):

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^t [v_r(t') + v_l(t')] \cdot \cos[\Theta(t')]\, dt'$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t [v_r(t') + v_l(t')] \cdot \sin[\Theta(t')]\, dt'$$

$$\Theta(t) = \frac{1}{l}\int_0^t [v_r(t') - v_l(t)]\, dt'$$

Ackermannův pohon (car-like)



$$ICC = [x - R \cdot \sin\theta,\ y + R \cdot \cos\theta]$$ souřadnice středu otáčení

kde $R = d/\tan\varphi$

$$v_r = \omega\,(R + l/2)$$
$$v_l = \omega\,(R - l/2)$$
dopředná rychlost kol

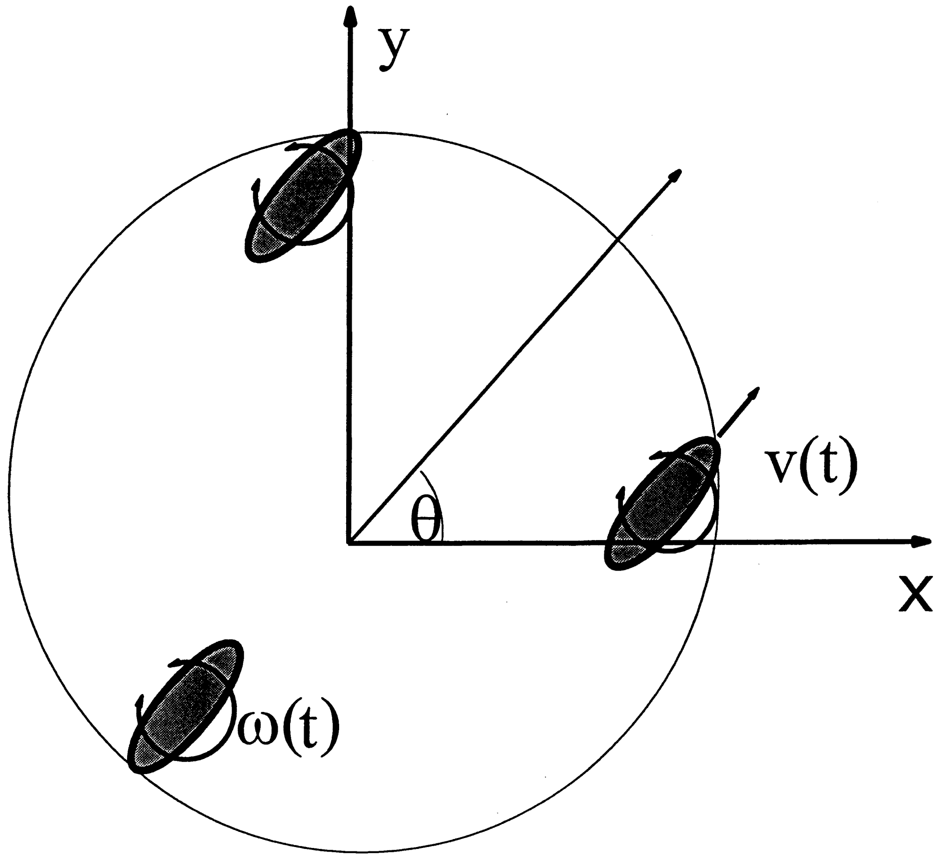
$$R = \frac{l\,(v_l + v_r)}{2\,(v_r - v_l)}$$ poloměr zatáčení

$$\omega = \frac{v_r - v_l}{l}$$ rychlost zatáčení

\+ lze dosadit do pohybových rcí obdobně jako v předchozím

Speciální případy pohonů:

Synchronní pohon: všechna kola shodn ω(t) a v(t)



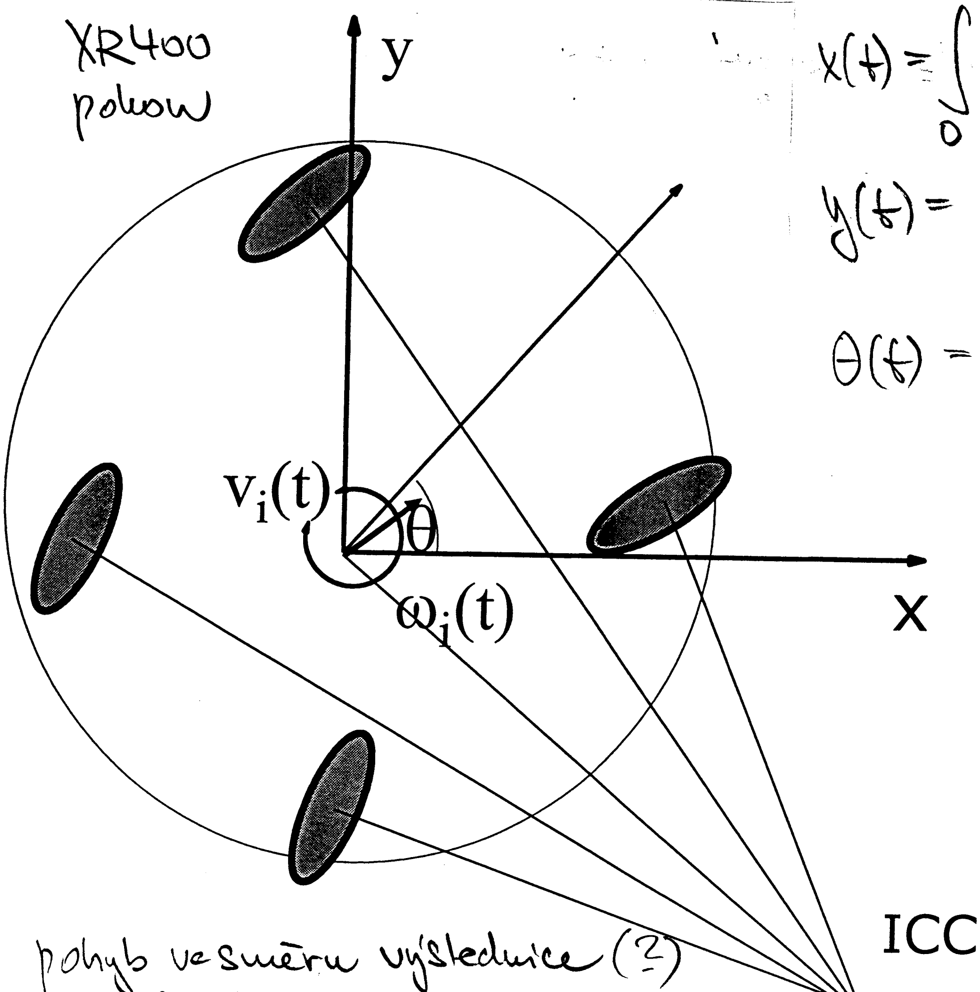
pro oba typy pohonů platí:

$$x(t) = \int_0^t v(t') \cos[\theta(t')]\, dt'$$

$$y(t) = \int_0^t v(t') \sin[\theta(t')]\, dt'$$

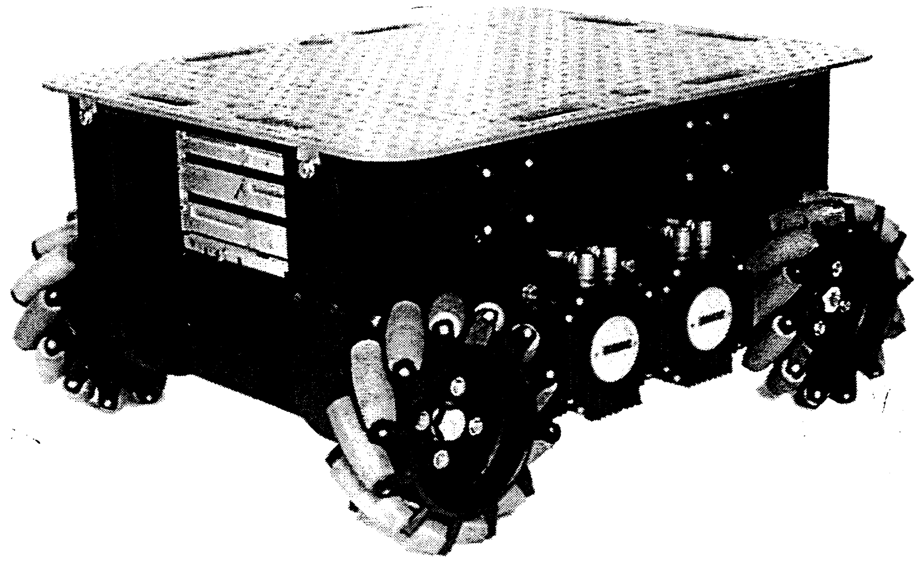
$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t')\, dt'$$

XR400 pohon



pohyb ve směru výslednice (?) síl (v(t), ω(t))

Všesměrová kola (mechanum):



$$v_y = \frac{1}{4}\left(v_0 + v_1 + v_2 + v_3\right)$$ dopředná rychl.

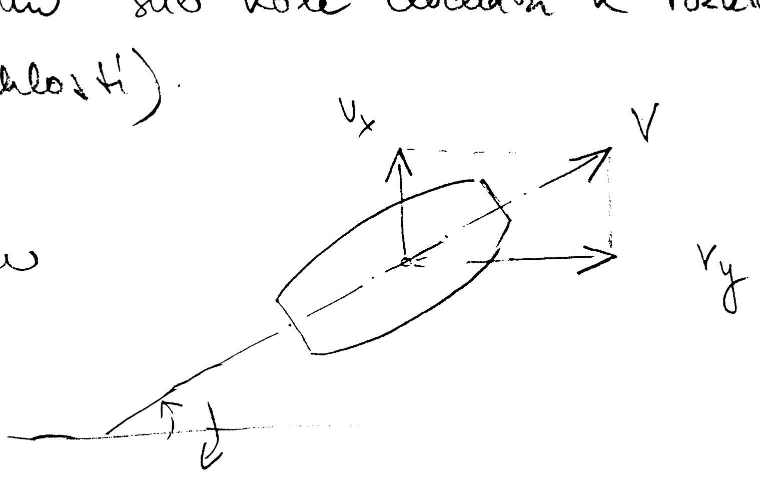
$$v_x = \frac{1}{4}\left(v_0 - v_1 + v_2 - v_3\right)$$ rychlost bokem

$$v_\Theta = \frac{1}{4}\left(v_0 + v_1 - v_2 - v_3\right)$$ otáčení

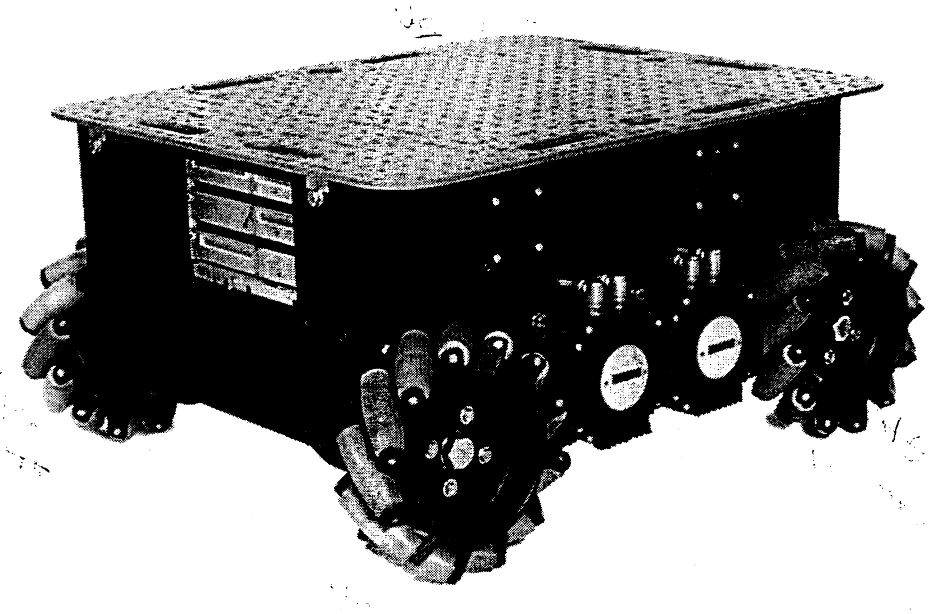
$$v_{error} = \frac{1}{4}\left(v_0 - v_1 - v_2 + v_3\right)$$

na každém sub-kole dochází k rozkladu sil (rychlosti).

$v_y = R \cdot \omega$



Všesměrová kola (mechanum):



$$v_y = \frac{1}{4}\left(v_0 + v_1 + v_2 + v_3\right) \quad \text{dopředná rychl.}$$

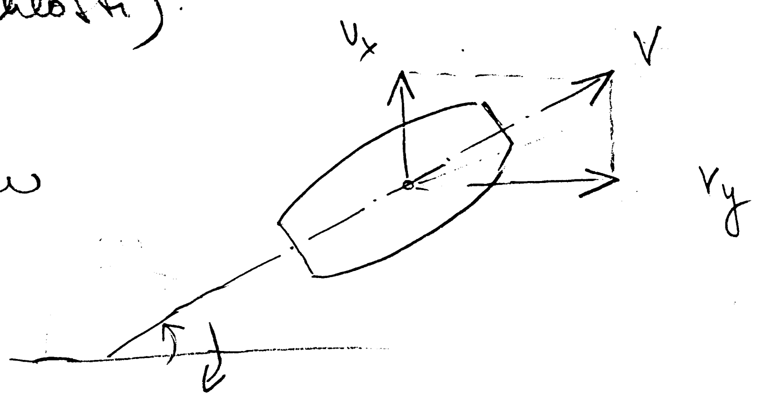
$$v_x = \frac{1}{4}\left(v_0 - v_1 + v_2 - v_3\right) \quad \text{rychlost bokem}$$

$$v_\Theta = \frac{1}{4}\left(v_0 + v_1 - v_2 - v_3\right) \quad \text{otáčení}$$

$$v_{error} = \frac{1}{4}\left(v_0 - v_1 - v_2 + v_3\right)$$

na každém sub-kole dochází k rozkladu sil (rychlostí).

$$v_y = R \cdot \omega$$



Holonomické vs. non-holonomické systémy a jejich omezení

- nutno mech. systém popsat v prostoru zobecněných souřadnic $\vec{q} \in Q$, kde Q je stavový prostor robotu (konfigurační prostor)

- pro danou trajektorii $q(t)$ nechť je vektor rychlosti $\dot{\vec{q}}(t) \in T_q(Q)$

vývoj systému ve stavu $\vec{q}$ s řídícími vstupy $\vec{u} \in U$ z prostoru řízení (kontrolní prostor) podléhá funkci $F : [Q, U] \to T_q(Q)$ - prostor zobecněn. souřadnic

$$\text{tedy} \quad \dot{\vec{q}} = F(\vec{q}, \vec{u})$$

je základní kinematickou rovnicí

příklad: plotter, bez dynamiky

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

- reálné systémy vždy vykazují kinematická omezení zobecněných souřadnic, jenž lze zapsat ve tvaru:

$$a_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = 0 \qquad i = 1..k, \quad k < n$$

n.. dimenze systému

Kinematická omezení lze zapsat ve tvaru:

$$a_i \cdot \vec{q} \cdot \dot{\vec{q}} = 0 \qquad i = 1..k,\ k<n$$

- je-li omezení integrovatelné $\Rightarrow$ je tzv. <u>holonomní</u>
- jsou-li všechna omezení systému <u>holonomní</u> je systém též holonomní.

<u>příklad:</u> jednoduché omezení pro předchozí systém (plotter) může být $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$

po integraci tedy $x^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow$ omez. na kruhové trajektorie pera

<u>důsledky</u>:

OMEZUJÍ STAVOVÝ PROST.

- <u>holonomní omezení</u> omezují stavový prostor robotu, tj. robot se nemůže pohybovat prostorem libovolně (též se označuje jako geometrické omezení)
  - výhodou je, že lze obecným postupem dosáhnout syntézy řízení (trajektorie A→B)

OMEZUJÍ PROSTOR ŘÍZENÍ

- <u>non-holonomní</u> systémy jsou obtížně řiditelné, neexistuje jednotný postup návrhu řízení $\Rightarrow$ řeší se připravelním řídících strategií.
  - nelze asymtoticky stabilizovat (spojitě)

Kategorie pohybu mobilního robotu

- problém přesunu z počátečního do cílového stavu

3 kategorie úloh:

- plánování cesty
  - vytváří posloupnost míst – zlomových bodů, které robot musí navštívit při cestě z počátečního do cíl. stavu
  - respektuje překážky v prostředí a další omezení, metoda je globální
- generování trajektorie
  - je lokální plánování trasy bez ohledu na překážky – plánování spojité trajektorie podle zlomových bodů trasy
  - zohledňuje kinematická omezení robotu, časové omezení, rychlost a jiné konstrukce účelové fce pro generování trajektorie
  - výstupem je časová fce zobecněných souřadnic

$$\vec{q} = \vec{q}(t)$$

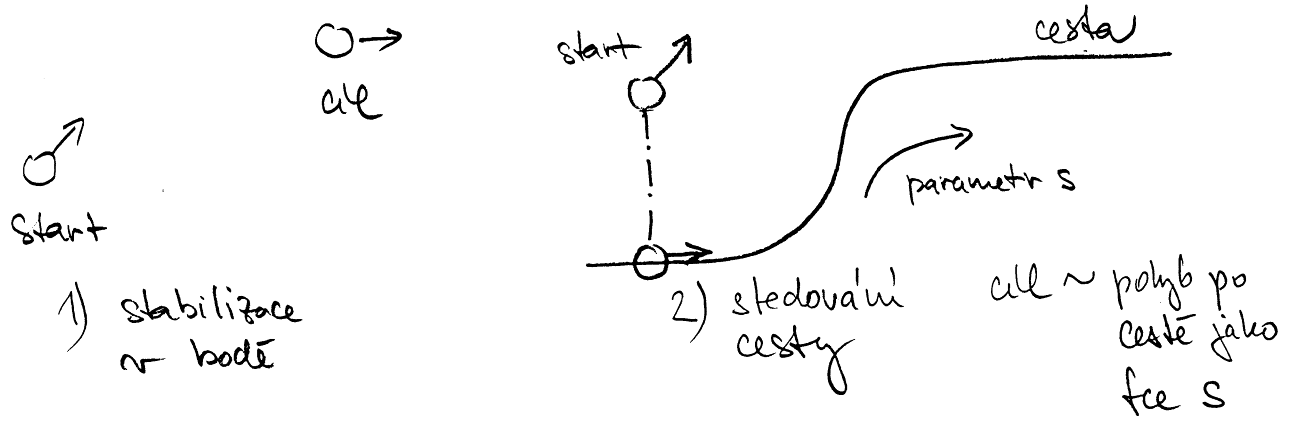
- řízení
  - nejnižší úroveň realizace trajektorie, pomocí ZPV reguluje stav robotu

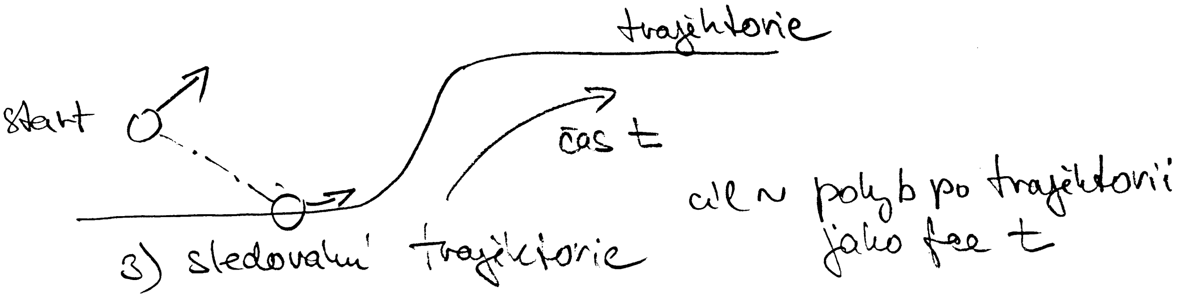
- Řízení je 3 typů:

1) Stabilizace v bodě (posture stabilization)
   - robot dosahuje požadované polohy z poč. bodu a tuto polohu udržuje (bez ohledu na trajektorii pohybu)

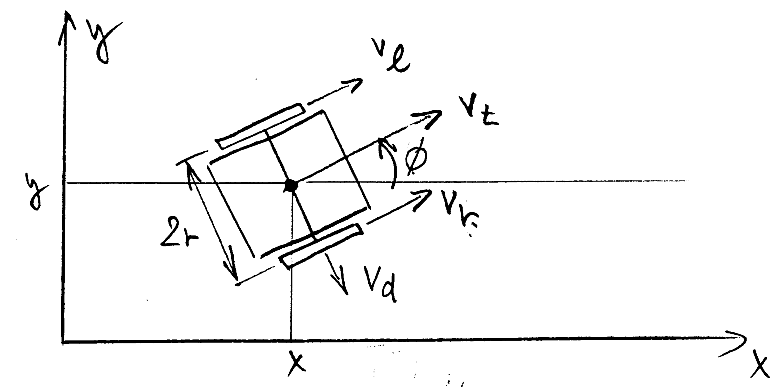
2) Sledování cesty (path following)
   - robot z daného bodu dosahuje žádané cesty a tu následuje, minimalizuje se vzdálenost robotu od cesty podél řešení (rychlost není kritická)

3) Sledování trajektorie (trajectory tracking)
   - robot z daného počátečního bodu dosahuje bodu trajektorie, jenž je fcí času a dále se pohybuje současně s ním.
   (problém sledování pohybujícího se referenč. bodu)





Dynamický model robotu



stav robotu: $(\underbrace{x, y, \phi}_{\text{poloha robotu}}, v_r, v_e)$ kde $v_r = k_r \cdot \omega_r$
$v_e = k_e \cdot \omega_e$
$\omega_{e,r} \sim$ úhlové rychl. koleček

pro nesmykavý pohyb platí:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ \dot{v}_r \\ v_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(v_r+v_e)\cos\phi \\ \frac{1}{2}(v_r+v_e)\sin\phi \\ \frac{1}{2r}(v_r-v_e) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_e$$

a_r, a_e jsou obvodová zrychlení koleček

předdané omezení zrychlení koleček:
$$|\dot{v}_r| = |a_r| < a^{\omega}_{max}$$
$$|\dot{v}_e| = |a_e| < a^{\omega}_{max}$$

a omezení rychlosti:

$$|v_r| < v^{\omega}_{max}$$
$$|v_e| < v^{\omega}_{max}$$

- aby se robot nesmýkal, musí $\vec{v}$ vždy mít směr totožný s natočením robotu (tj. $v_d \overset{!}{=} 0$)

což lze zapsat: $v_d = \dot{x}\sin(\phi) - \dot{y}\cos(\phi) \overset{!}{=} 0$

pozn.: a) omezení rychlosti je holonomní podmínka (omezuje stavový prostor robotu)

b) omezení smyku a omezení zrychlení jsou neholonomní podmínky $\Rightarrow$

omezení řiditelnosti robotu | resp. složitosti regulátoru

Zpětnovazební regulace

▷ Cílem je řízení robotu po zadané trajektorii

▷ vstupem regulátoru jsou jednotlivé body trajektorie podle typu regulátoru:

- vstupní body jsou totožné s pož. polohou robotu v čase $(x(t), y(t), \phi(t))$

nebo

- vstup. body jsou totožné s pož. stavem robotu v čase $(x(t), y(t), \phi(t), v(t), \omega(t))$

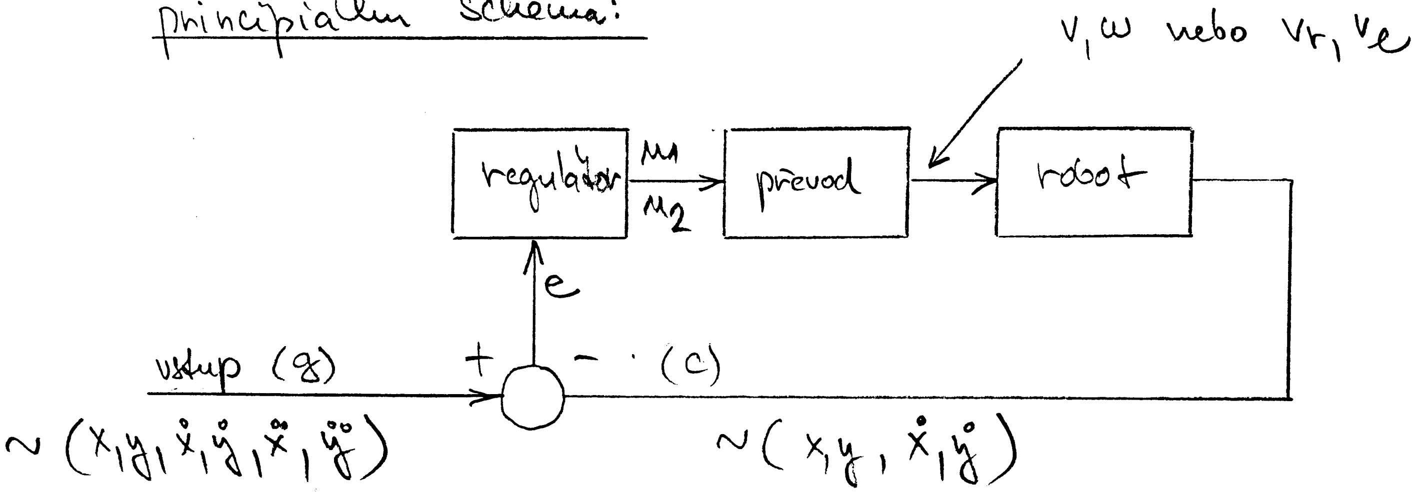
nebo jeho částí $(x(t), y(t), \phi(t), v(t))$

▷ výstupem regulátoru jsou rychlosti koleček v_r, v_e

kde:
$$v_r = v + r \cdot \omega$$
$$v_e = v - r \cdot \omega$$

v – dopředná rychlost robotu; ω – úhlová rychlost otáčení

principiální schema:



▷ vzhledem k dimenzi systému vede řešení většinou na stavový regulátor (snadnější dosažení požadovaného chování a stability)

pak např. při snaze o regulaci zrychlení robotu může regulační pravidlo být ve tvaru:

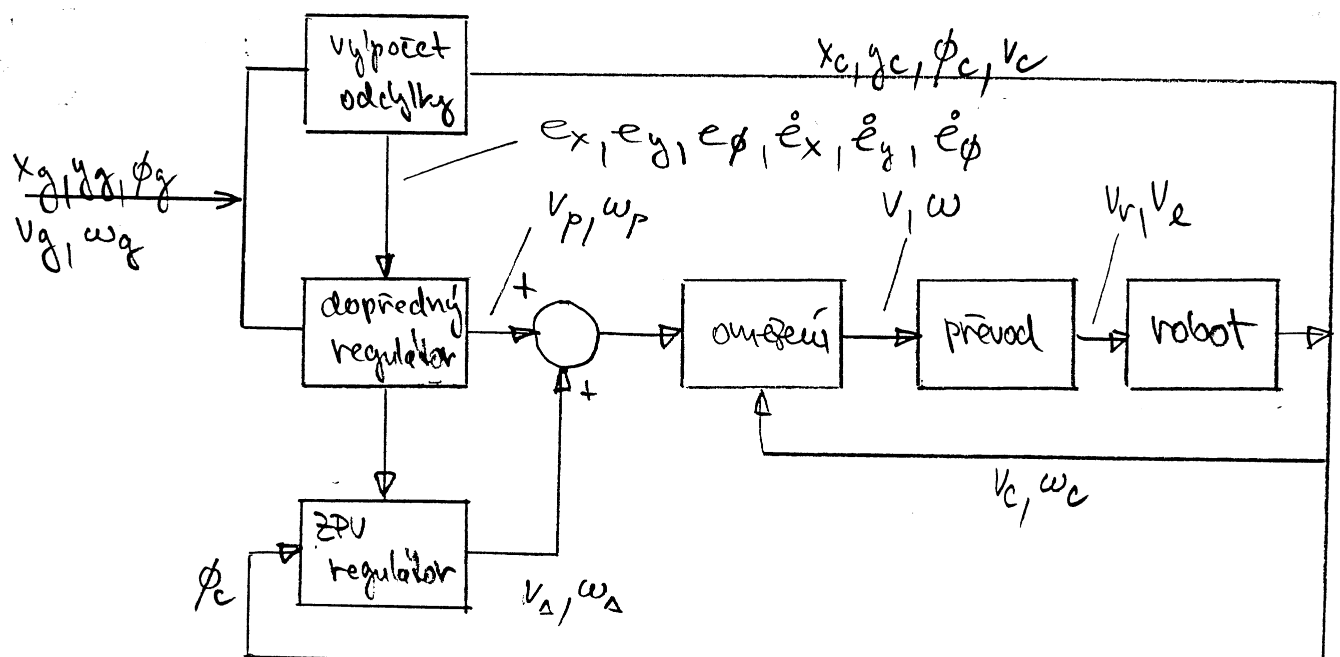
$$u_1 \sim \ddot{x}_g + kd_1(\dot{x}_g - x_c) + kp_1(x_g - x_c)$$

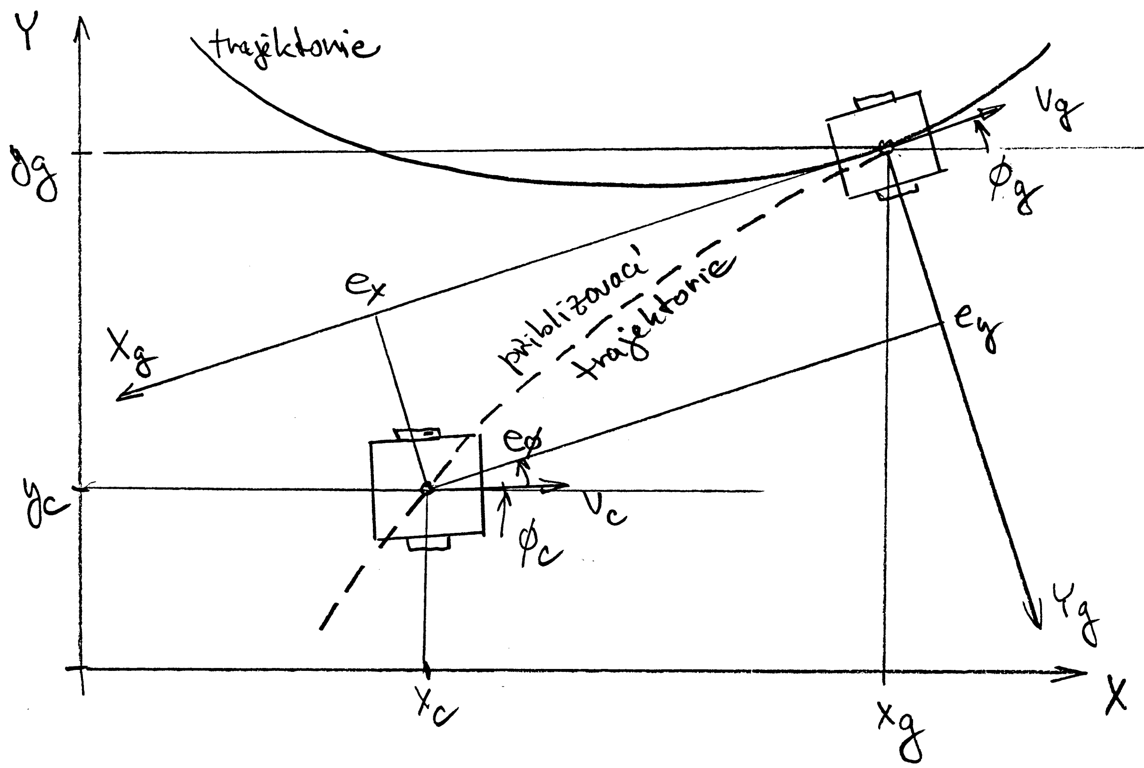
$$u_2 \sim \ddot{y}_g + kd_2\underbrace{(\dot{y}_g - \dot{y}_c)}_{\dot{e}} + kd_2\underbrace{(y_g - y_c)}_{e}$$

derivační konstanta

proporcionální konstanta

Regulace s přibližovací křivkou





▷ určení odchylky robotu od cílové polohy ↷

volba jednotlivých regulátorů:

dopředný regulátor : (feed forward) — generování přibližovací trajektorie v otevřené smyčce (posloupnost bodů)

nechť přibližovací fce $y_p = P(x_p)$ jenž musí "končit" v bodě dotyku nulovými derivacemi až do řádu 2, tj.

$$P(x_p)\Big|_{x_p=0} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{dP(x_p)}{dx_p}\Bigg|_{x_p=0} \overset{!}{=} 0 \qquad \frac{d^2P(x_p)}{dx_p^2}\Bigg|_{x_p=0} \overset{!}{=} 0$$

▷ předchozí podmínce vyhoví ve triviálním případě např. $P(x_p) = c_x X_p^3$ |

Zpětnovazební regulátor:

▷ úkolem je řízení robotu podél přibližovací křivky

▷ hlavním omezením (nelinearitou) je omezení zrychlení (dopředné i úhlové)

klasická syntéza regulátoru dle požadované přesnosti (ideální – spojitý případ)

reálný případ obvykle vede na jednoduchá řešení

např. BANG-BANG regulace

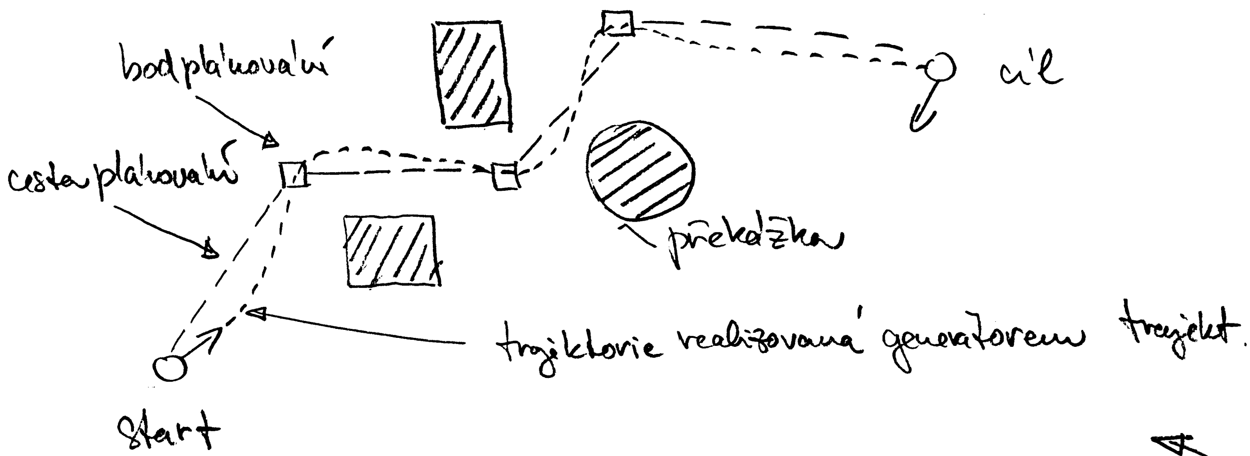
$$v_\Delta = \left[2 a_{max} |e_x|\right]^{1/2} \operatorname{sign}(e_x)$$

$$\omega_\Delta = \left[2 \alpha_{max} |\phi_p - \phi_c|\right]^{1/2} \operatorname{sign}(\phi_p - \phi_c)$$

max dopředné zrychlení

max. úhlové zrychlení

Generování trajektorie



problém generování trajektorie

- požadavky při generování trajektorie – optimalita (čas, energie, kinematická a dynamická omezení atd.)

- základní postupy:

(1) Metody založené na skládání optimálních subtrajektorií –

– vychází z Principu Maxima ⇒ řízení robotu probíhá v každém okamžiku s max. možnou hodnotou ⇒ generování optimální subtrajektorie

- časově optimální !
- energeticky nevýhodné

2 Metody aproximující dráhu robota spojitou fcí

- obvykle fce $f(t)$, t - čas
- užití kružnic, polynomů a <u>spline</u> nebo kombinace
- druh použité aproximace zajišťuje přídavné vlastnosti trajektorie – např. hladké navázání částí trajektorie při inkrementálním výpočtu, atd.

- přesné a časově optimální postupy jsou výpočetně náročné !

často používané jsou spline:

def.: Mějme $n+1$ bodů v rovině $P_0, P_1 \dots P_n$
Spline křivkou m-tého řádu nechť je fce $f(x)$ mající spojité derivace $f'(x), f''(x) \dots f^{(m-1)}(x)$ a na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1})$ je polynomem stupně $\underline{m}$.

z čehož plyne že: spline je polynomiální křivka se zaručenou spojitou derivací v navazujících bodech

<u>př.</u> kubická Coonsova křivka

$$C(t) = \sum_{i=0}^{3} C_i(t) P_i \qquad t \in \langle 0, 1)$$

kubické Coonsovy polynomy

řídící body křivky (vždy 4.)

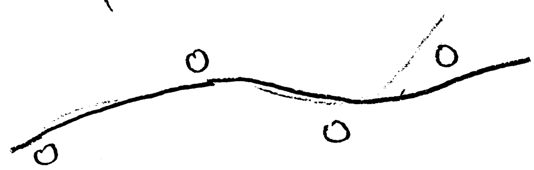
kde:

$$C_0(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3$$
$$C_1(t) = \frac{1}{6}(-3t^3+3t^2+3t+1)$$
$$C_2(t) = \frac{1}{6}(3t^3-6t^2+4)$$
$$C_3(t) = \frac{1}{6}t^3 \quad \square$$

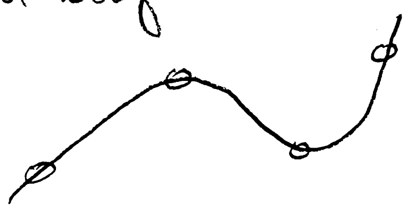
další: Beziér, Clothoida atd.

poznámka:

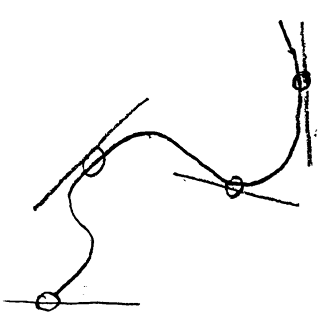
▷ použití splinů realizuje aproximaci, což znamená, že křivka neprochází řídícími body



▷ existují i metody interpolace, které zaručí průchod body



▷ dalšími jsou tzv. free-form křivky
- řídící polygon (sekvence bodů)
- aproximace nebo interpolace
- odlišné podmínky na okrajích



3 Metody s částečnou aproximací dráhy robotu

- kombinace aproximace dráhy a stabilizace robotu v bodě
- použití aproximací jednoduchými křivkami (kružnice, přímka, polynom) ale nezaručují spojitost trajektorie (C^0 nebo C^1 spojitost)
  - řešení oblasti nespojitosti je úlohou regulátoru
  - výhodou je nízká výpočetní náročnost
  - časová optimalita závisí na regulátoru a může být velmi dobrá