NP-úplné problémy

- Z minula:
  - třídy *P* a *NP*, *NP*-úplnost
  - dokázáno, že *ETERNITY* je *NP*-úplný problém
- Dnešní přednáška:
  - další příklady *NP*-úplných problémů
  - důkazy založené na převoditelnosti problémů
  - ukázka aproximační metody

SAT je NP-úplný

1. *SAT* je v NP

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$$

… existuje ověřovací algoritmus

2. *SAT* je NP-těžký

$\leq_P$ je tranzitivní:

$$X \leq_P Y \wedge Y \leq_P Z \Rightarrow X \leq_P Z$$

tzn., stačí dokázat $ETERNITY \leq_P SAT$

SAT je NP-úplný

Instanci problému *ETERNITY* chceme transformovat na výrokovou formuli, která bude splnitelná právě tehdy, když je možné *ETERNITY* složit.

Boolovské proměnné $x_{i,j,k}$ … je k-tý čtverec na pozici (i, j) ?

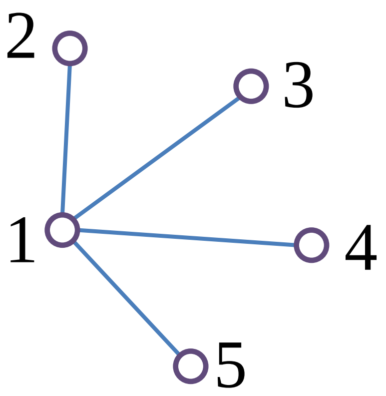
Musí být splněny tyto podmínky:

1. Alespoň 1 čtverec na (i, j): $\bigwedge_{i,j} \left(\bigvee_k x_{i,j,k} \right)$
2. Ne víc než 1 čtverec na (i, j): $\bigwedge_{i,j} \bigwedge_{k \neq k'} \left(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{i,j,k'} \right)$
3. Návaznost čtverců v řádcích: $\bigwedge_{i,j} \bigwedge_{k,k'} \left(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{i,j+1,k'} \right)$
4. Návaznost čtverců ve sloupcích: $\bigwedge_{i,j} \bigwedge_{k,k'} \left(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{i+1,j,k'} \right)$
5. Podmínky pro obvod: $\neg x_{1,j,k}$ $\neg x_{n,j,k}$ $\neg x_{i,1,k}$ $\neg x_{i,n,k}$

Nezávislá podmnožina

Def.: Nechť $G=(V,E)$ je neorientovaný graf. Podmnožina vrcholů $I \subseteq V$ se nazývá nezávislá, pokud žádné dva vrcholy v I nejsou spojeny hranou.

Jestliže se nezávislá podmnožina nedá rozšířit o další vrchol, říkáme, že je maximální nezávislá.

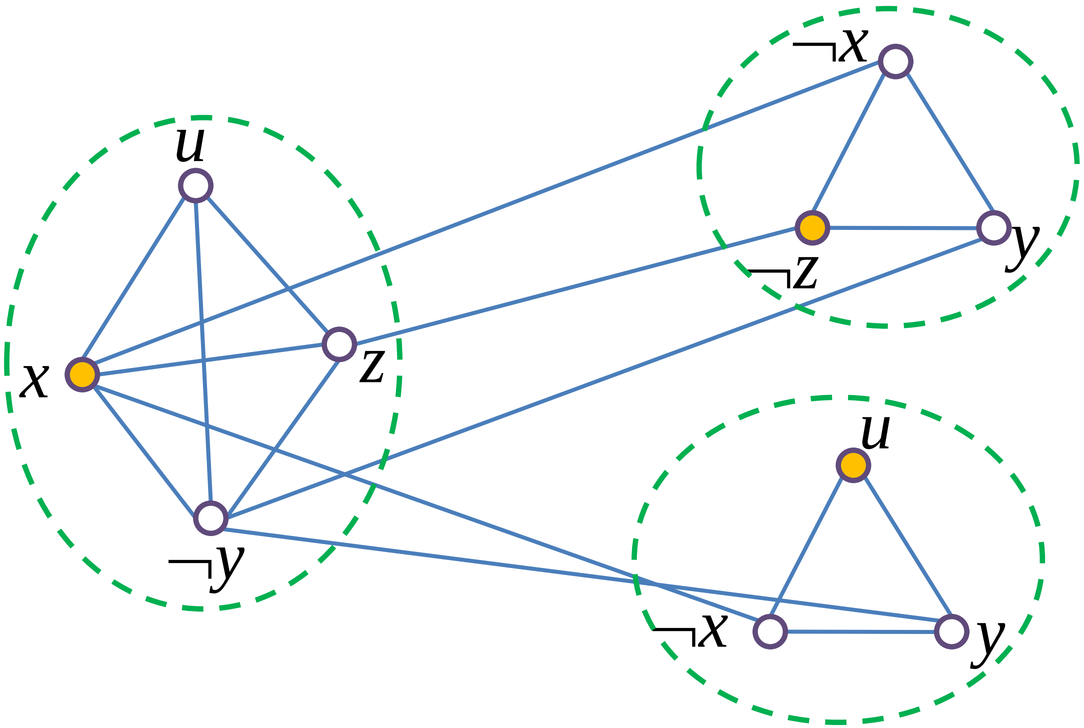


$$I_1 = \{1\}$$

$$I_2 = \{2,3,4,5\}$$

Převod SAT na nezávislou podmnožinu

$$(x \vee \neg y \vee z \vee u) \wedge (\neg x \vee y \vee u) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z)$$



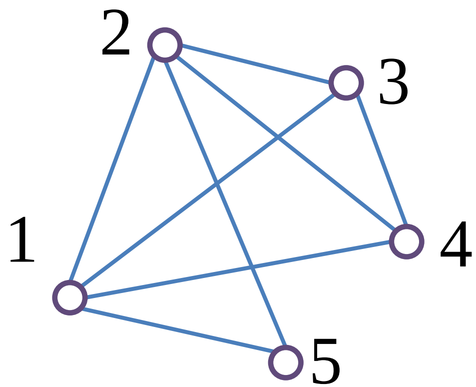
Formule je splnitelná právě tehdy, když v grafu existuje nezávislá podmnožina, jejíž velikost odpovídá počtu disjunktivních podformulí.

Klika grafu

Def.: Nechť $G=(V,E)$ je neorientovaný graf. Podmnožina vrcholů $K \subseteq V$ se nazývá klika právě když každé dva vrcholy v K jsou spojeny hranou.

Tj. vrcholy v K indukují na K úplný podgraf.

Klika je maximální, pokud se nedá rozšířit o další vrchol.

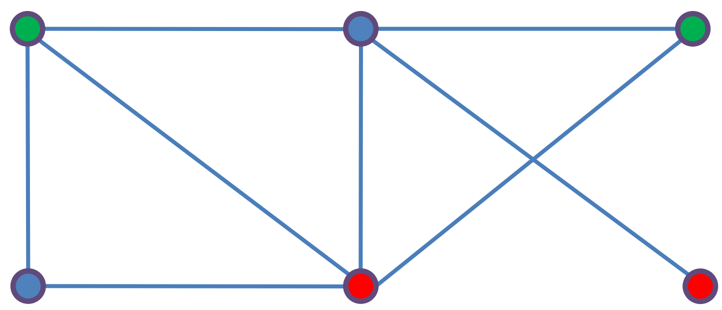


$$K_1 = \{1,2,3,4\}$$

$$K_2 = \{1,2,5\}$$

Obarvení grafu

Jaký je minimální počet barev, s jejichž pomocí lze „obarvit“ vrcholy grafu G tak, aby koncové vrcholy každé hrany byly obarveny různě?



$\chi(G)$... chromatické číslo grafu G (minimální počet barev postačující pro obarvení)

Pozorování: Stejně obarvené vrcholy tvoří nezávislou podmnožinu, hledáme tedy rozklad množiny vrcholů do co nejmenšího počtu nezávislých množin.

Jak sestavit rozvrh

Mějme studenty $s_1, s_2, \ldots, s_m$, kteří si zapisují některé z předmětů $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Každý předmět je vyučován pouze jednou týdně.

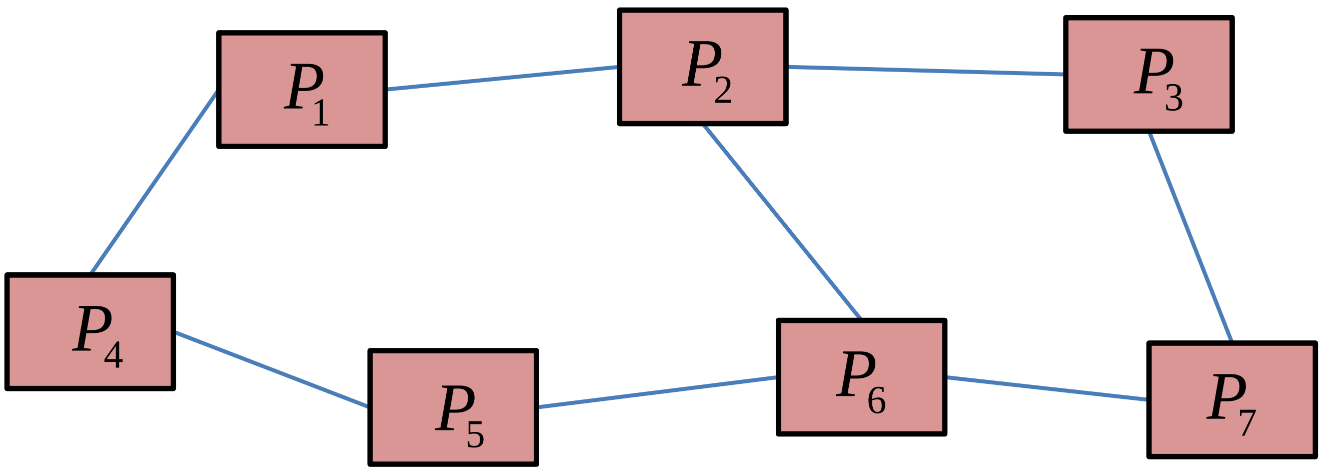
Chceme navrhnout rozvrh (zajímá nás, které předměty je možné vyučovat paralelně), přičemž

1. Výuka má probíhat v co nejkratší době.
2. Pro žádného studenta nesmí vzniknout kolize mezi zapsanými předměty.

Rozvrh – reprezentace problému grafem

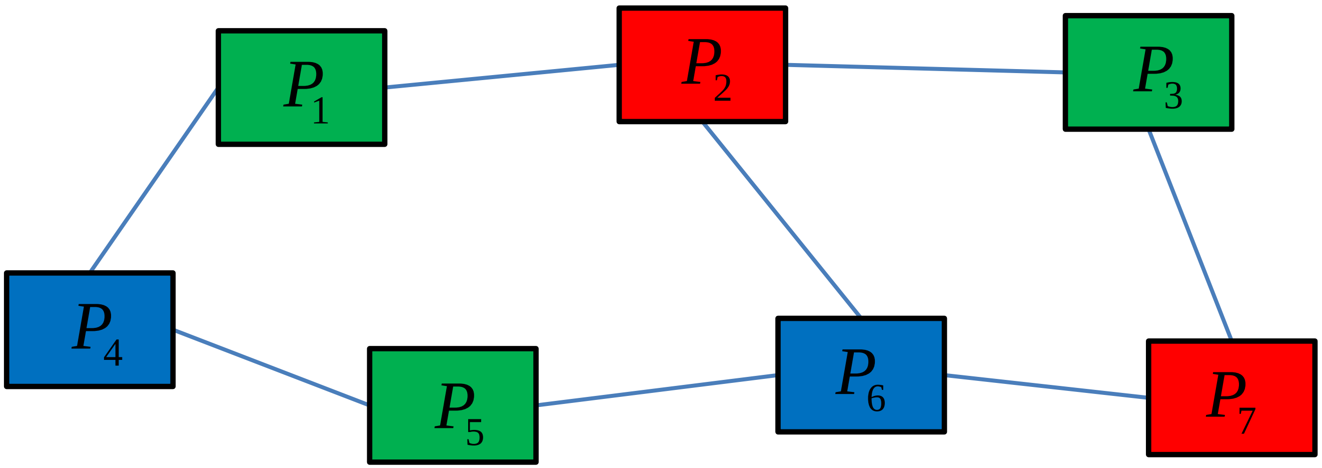
Vytvoříme neorientovaný graf, kde

- vrcholy jsou předměty $P_1, P_2, \ldots, P_n$
- $\{P_i, P_j\}$ je hrana, právě když existuje student, který si zapsal P_i i P_j.

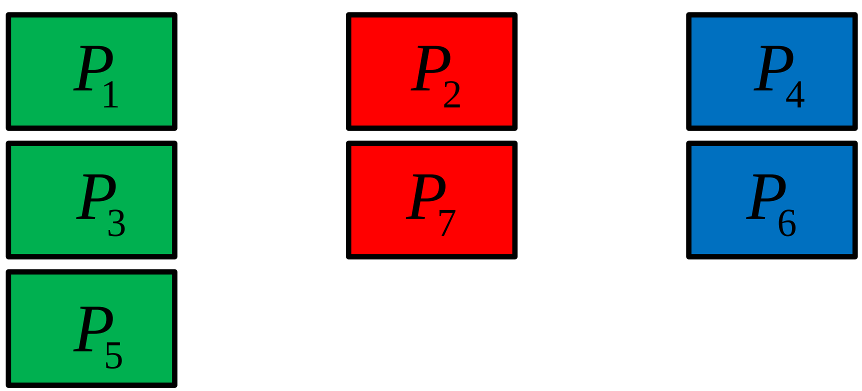


Rozvrh – řešení obarvením grafu

obarvení grafu:



rozvrh: 1. hodina 2. hodina 3. hodina



3SAT je NP-úplný

3SAT – Formule v konjuktivně disjunktivním tvaru, navíc každá disjunkce obsahuje právě tři atomické formule (nebo jejich negace).

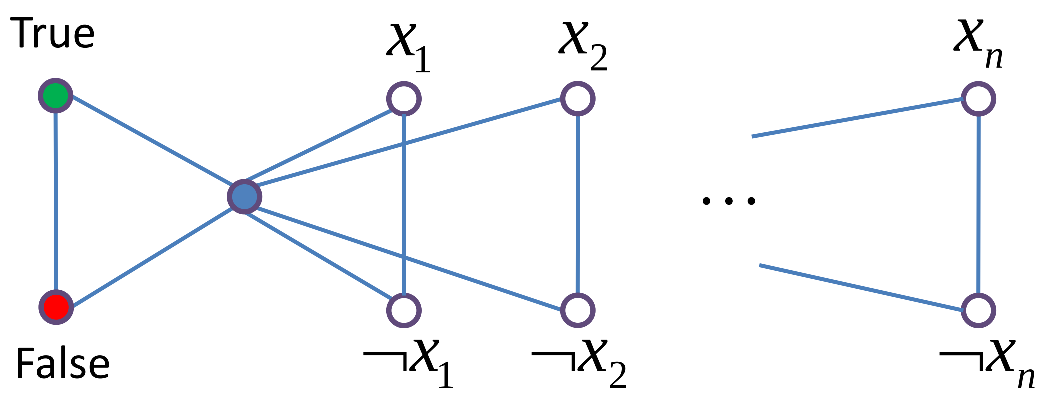
Transformace $SAT \leq_P 3SAT$
Modifikujeme iterativně každou disjunkci:

$$a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \ldots \vee a_k \Rightarrow (a_1 \vee a_2 \vee y) \wedge (\neg y \vee a_3 \vee \ldots \vee a_k)$$

y je nově přidaná proměnná

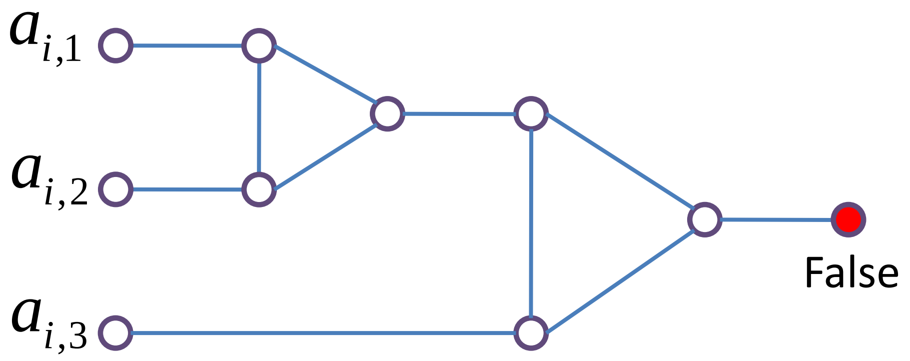
Převod 3SAT na 3COLOR

Problém *3COLOR* – lze daný graf obarvit pomocí 3 barev?



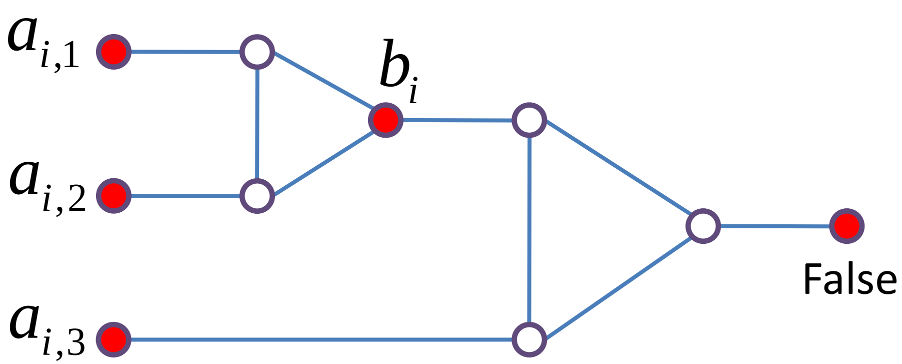
Podgraf pro *i*-tou disjunkci:

$$a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$$

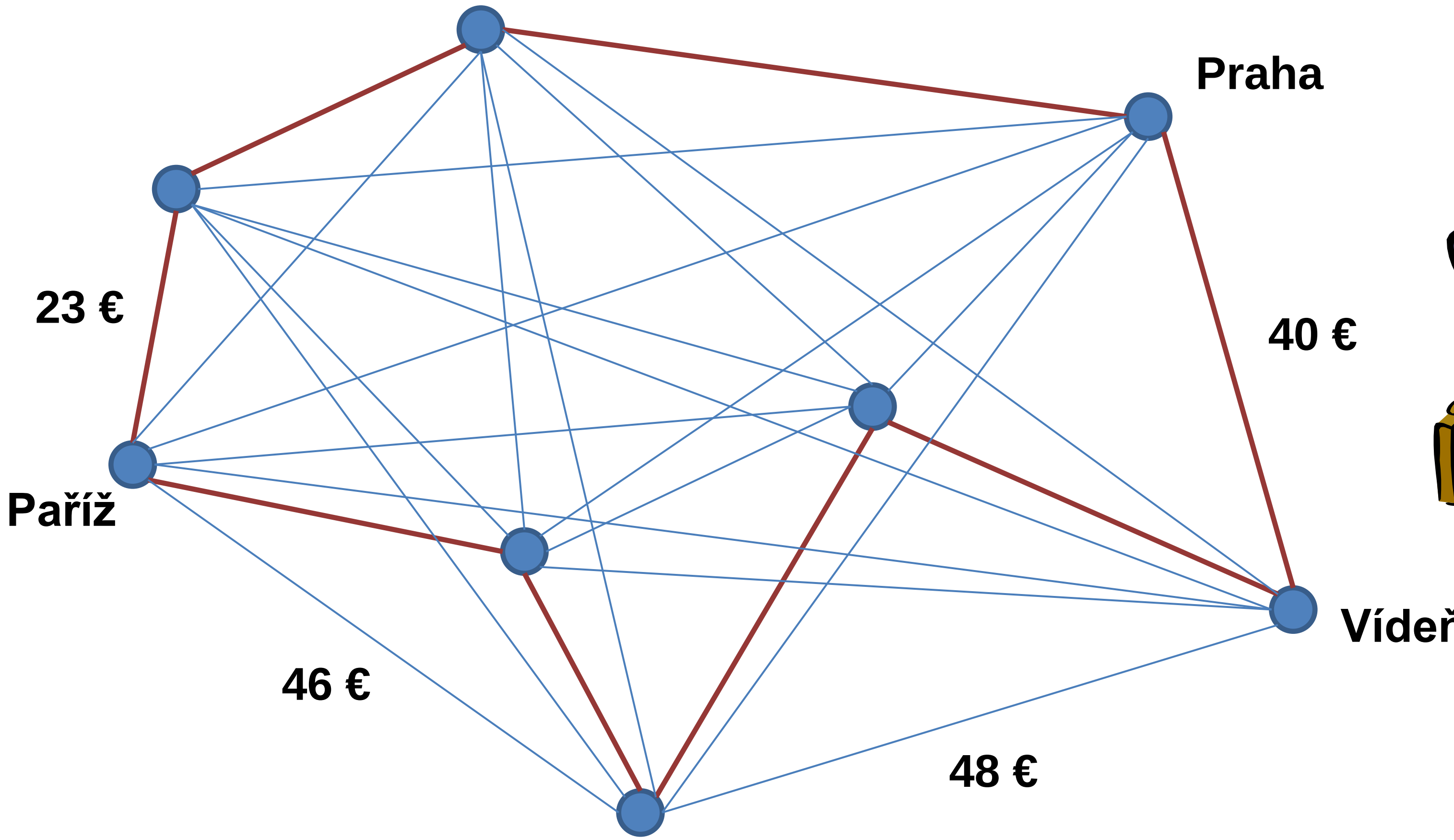


Převod 3SAT na 3COLOR

Podgraf nelze obarvit v případě, že všechny elementy $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, $a_{i,3}$ jsou ohodnocené jako *false*. Jinak obarvení existuje.



Problém obchodního cestujícího (OC)



Otázka: Existuje trasa s cenou $\leq c$?

Aproximace Δ-OC

OC je NP-úplný i v případě, kdy

1. Vrcholy grafu jsou body v rovině
2. Cena odpovídá Euklidovské vzdálenosti

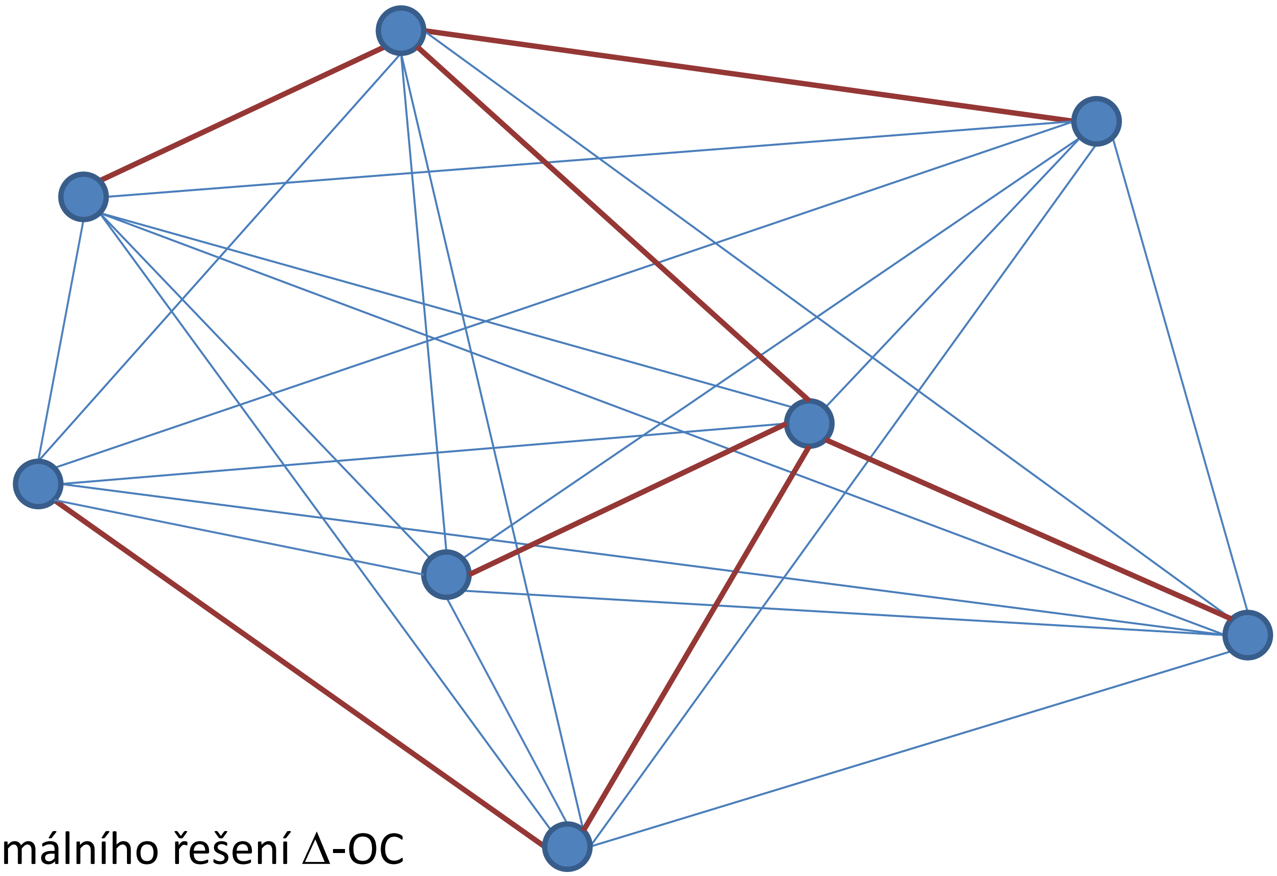
Δ-OC .. OC s obecnou trojúhelníkovou nerovností (též NP-úplný)

Navrhneme aproximaci pomocí minimální kostry

- Nalezni minimální kostru *K* ve vstupním grafu *G*
- Zdvoj v *K* hrany, vznikne multigraf *M*
- Nalezni Eulerovský cyklus v *M*
- Zkonvertuj cyklus na Halmitonovskou kružnici *H* v původním grafu

Aproximace Δ-OC (krok 1)

Nalezni minimální kostru *K*

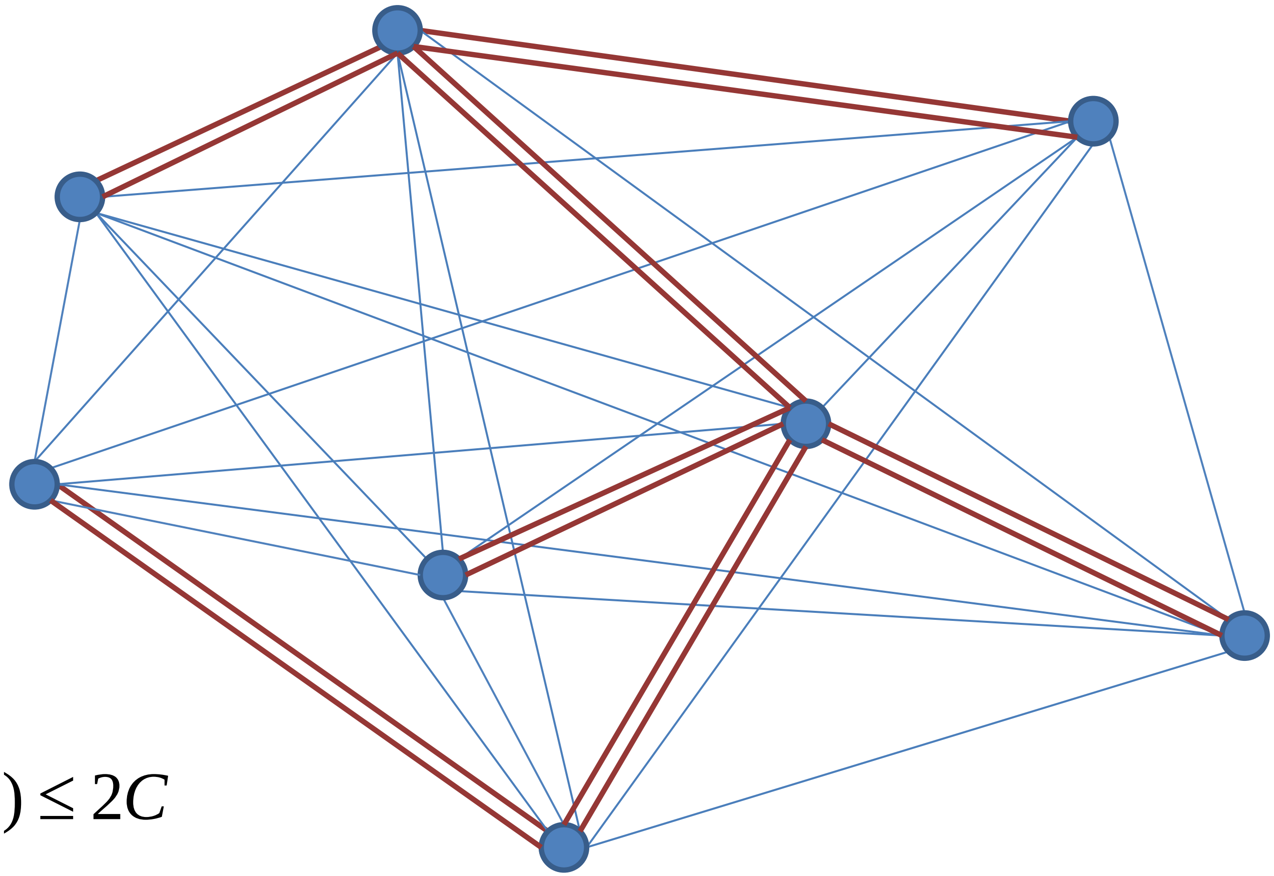


$$c(K) \le C$$

C .. cena optimálního řešení Δ-OC

Aproximace Δ-OC (krok 2)

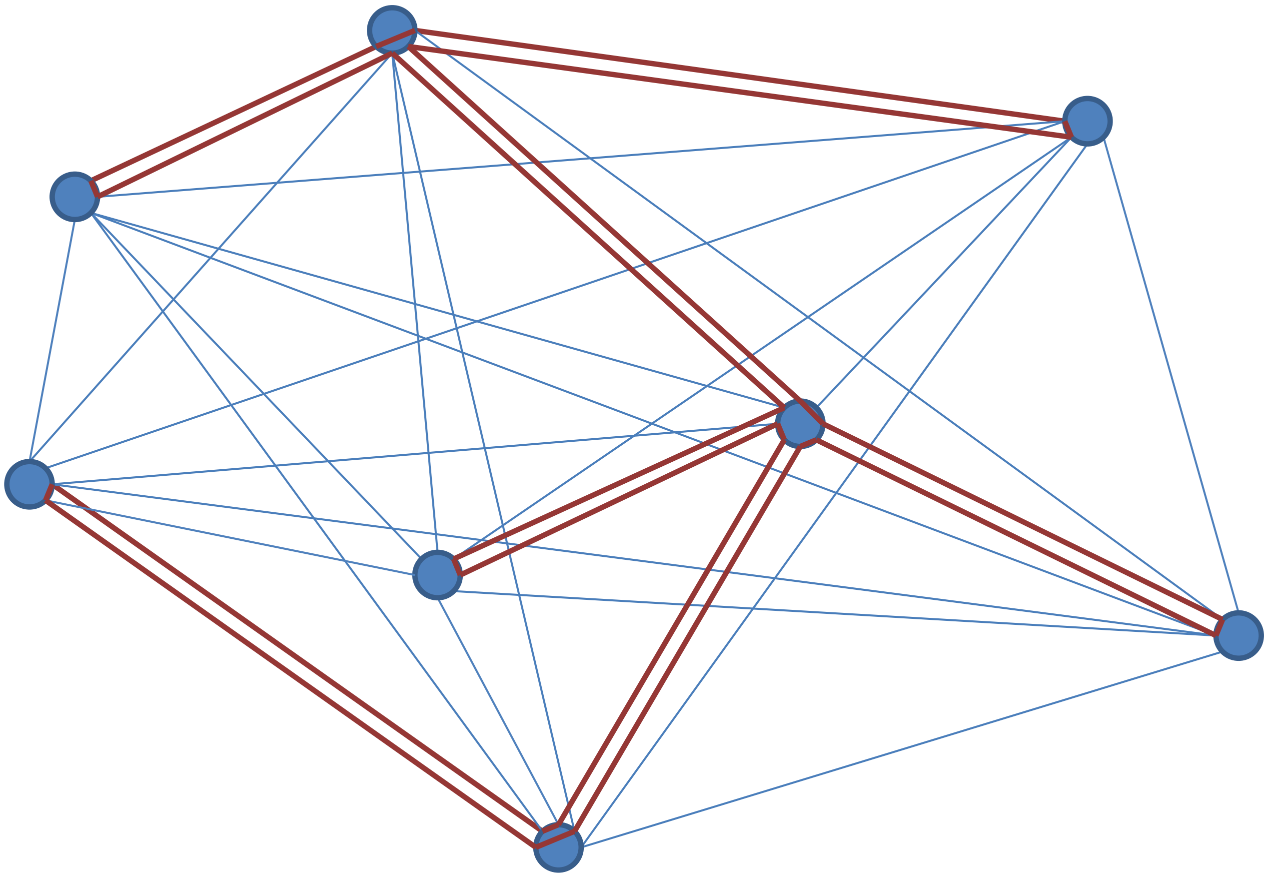
Vytvoř multigraf *M*



$$c(M) \leq 2C$$

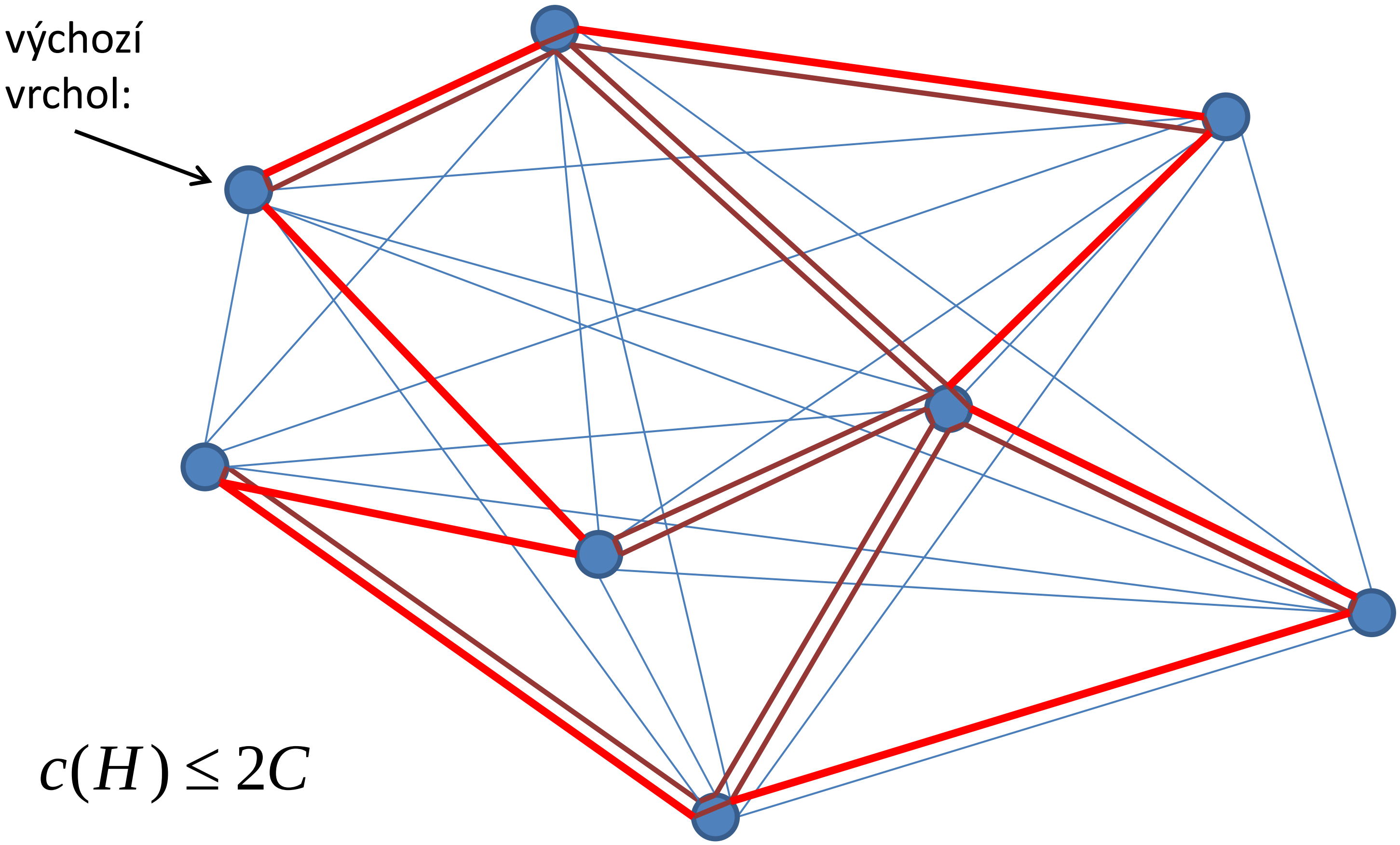
Aproximace Δ-OC (krok 3)

Nalezni Eulerovský cyklus



Aproximace Δ-OC (krok 4)

Vytvoř Hamiltonovskou kružnici *H*



$$c(H) \leq 2C$$

Další metody

- Christofides: aproximace Δ-OC s cenou $\leq 1.5C$

- Polynomiální aproximační schéma (pro Euklid. metriku)

  časová složitost: $O\left(n(\log n)^{O\left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right)} \right)$ cena: $\leq (1+\varepsilon)C$

- Heuristiky: dosahují odchylky 2-3% od optima (není ale zaručeno vždy), v rozumném čase

- Přesná řešení
  - založena na branch-and-bound technikách a na lineárním programování
  - vyřešena např. instance s 85 900 městy
  - aplikace *Concorde TSP Solver*