Posibilistická teorie (2)

Dempster-Shaferova teorie

Systémy s umělou inteligencí

Kombinace a kvantifikace tvrzení v teorii možnosti

- Výrazy mohou být zároveň složené i kvantifikované (výrazy jako “very” či “not”)
- Pravidla pro skládání a kvantifikaci tvrzení
- Pro snadný přechod z přirozeného jazyka do formálního zápisu

1. Modifikátory
2. Pravidla skládání
3. Ohodnocení pravdivosti

1. Modifikátory

Určení dopadu jazykových modifikátorů (např.: *Very*, *Not* a *Rather*) u tvrzení ve tvaru „*X* je *A*.“ na possibilistické distribuce

1. Výčet všech možných modifikátorů
   - Např.: systém modifikátorů *Not*, *Very* a *More-or-less*
2. Subjektivní analýza k určení konzistentních funkcí přiřazených modifikátorům
   - Doporučení Zadeha:
     - druhá mocnina pro *Very*
     - odečítání od jedné pro *Not*
     - druhá odmocnina pro *More-or-less*

Pokud X je $A \rightarrow \Pi_X = \mathrm{A}$,

pak X je $mA \rightarrow \Pi_X = A^+$

A^+ ... modifikovaná possibilistická distribuce indukovaná modifikátorem m

Pokud m = *Very*, $A^+ = A^2$

Pokud m = *Not*, $A^+ = \neg A = 1 - A$

Pokud m = *More-or-less*, $A^+ = \sqrt{A}$

2. Pravidla skládání

- *A* a *B* ... tvrzení
- *A*B* označuje tvrzení které je *složením A* a *B*

Většina běžně používaných způsobů skládání

1. Konjunkce (a)
   - Je-li tvrzení: *X je A a Y je B*

     pak $\mu_{A*B}(u,v) = \min[\mu_A(u), \mu_B(v)]$
2. Disjunkce (nebo)
   - Je-li tvrzení: *X je A nebo Y je B*

     pak $\mu_{A+B}(u,v) = \max[\mu_A(u), \mu_B(v)]$
3. Implikace (pokud … pak …)
   - Je-li tvrzení: *pokud X je A pak Y je B*

     potom $\mu_{B|A}(u,v) = \min[1, (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))]$

3. Ohodnocení pravdivosti

Definování modifikací possibilistické distribuce pravdivostními výrazy (např.: *Very True, Quite True* a *More-or-less True*).

Tvrzení *Je* τ *že X je A*, kde τ je **pravdivostní kvantifikátor** na tvrzení, lze vyjádřit takto:

X je A je $\tau \rightarrow \Pi_X = A^+$ and $\mu_{A+}(u) = \mu_\tau(\mu_A(u))$

- Definice μ_τ je podobná jako u modifikátorů přirozeného jazyka
  - Např.: pokud τ = *Very True*, pak $\mu_\tau(v) = v^2$.
- Příklad použití pravidel:

If X is Not Very large And Y is More-or-less small, Then Z is Very Very large.

Podmíněná possibilistická distribuce je zde popsána:

$\mu_{(Z|X,Y)}(u,v,w) = \min[1, (1 - \min[1 - \mu^2_{large}(u), \mu_{small}(v)] + \mu^4_{large}(w))]$

Šíření evidence

- Teorie možnosti: inference při pozorování nové evidence: pomocí *zobecněného pravidla modus ponens (GMP)*
- Standardní logika - **modus ponens** přirozené deduktivní pravidlo: pokud obě hypotézy „$A \rightarrow B$“ a „A“ platí, pak hypotéza „B“ je také pravda
- GMP – dvě odlišnosti:
  - není vyžadována přesná shoda (matching)
  - predikáty nemusí být crisp (mohou být fuzzy)
- Např.: jsou-li A, A^*, B a B^* fuzzy výrazy (operátorem * může být libovolný modifikující přívlastek) pak GMP odvodí „*Y* is *B**“ z této premisy a implikace
  - Premisa: *X* is *A**
  - Implikace: If *X* is *A* then *Y* is *B*
  - Závěr: *Y* is *B**
- Příklad
  - Premisa: This tomato is very red.
  - Implikace: If a tomato is red, then the tomato is ripe.
  - Závěr: This tomato is very ripe.

- Z definice implikace v pravidlech skládání:
  $\mu_{Y|X}(u,v) = \min[1, (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))]$ a $\Pi_X = A^*$
- Pomocí GMP odvodíme "*Y* is *B**."
- Tedy, stupeň příslušnosti *Y* lze získat z μ_A a μ_B takto:

$$\begin{aligned}\mu_Y(v) &= \max_{u\in U}[\min[\mu_{A^*}(u),\mu_{Y|X}(u,v)]] = \\ &= \max_{u\in U}[\min[\mu_{A^*}(u),(1 - \mu_A(u) + \mu_B(\mathrm{v}))]]\end{aligned}$$

Další inferenční pravidla v teorii možnosti, např.:

- Z "X is $A \rightarrow Y$ is B" a "Y is not B^*," plyne "X is not A^*"
  - **Zobecněný (fuzzy) modus tollens**

Aplikace teorie možnosti

- Data analysis

  (Wolkenhauer, 1998; Tanaka and Guo, 1999)
- Structural learning

  (Borgelt et al., 2000)
- Database querying

  (Bosc and Prade, 1997)
- Diagnosis

  (Cayrac et al., 1996)
- Belief revision

  (Benferhat, Dubois, Prade and Williams, 2002)
- Argumentation

  (Amgoud and Prade, 2004)
- Case-based reasoning

  (Huellermeier, 2007)

Analýza teorie možnosti

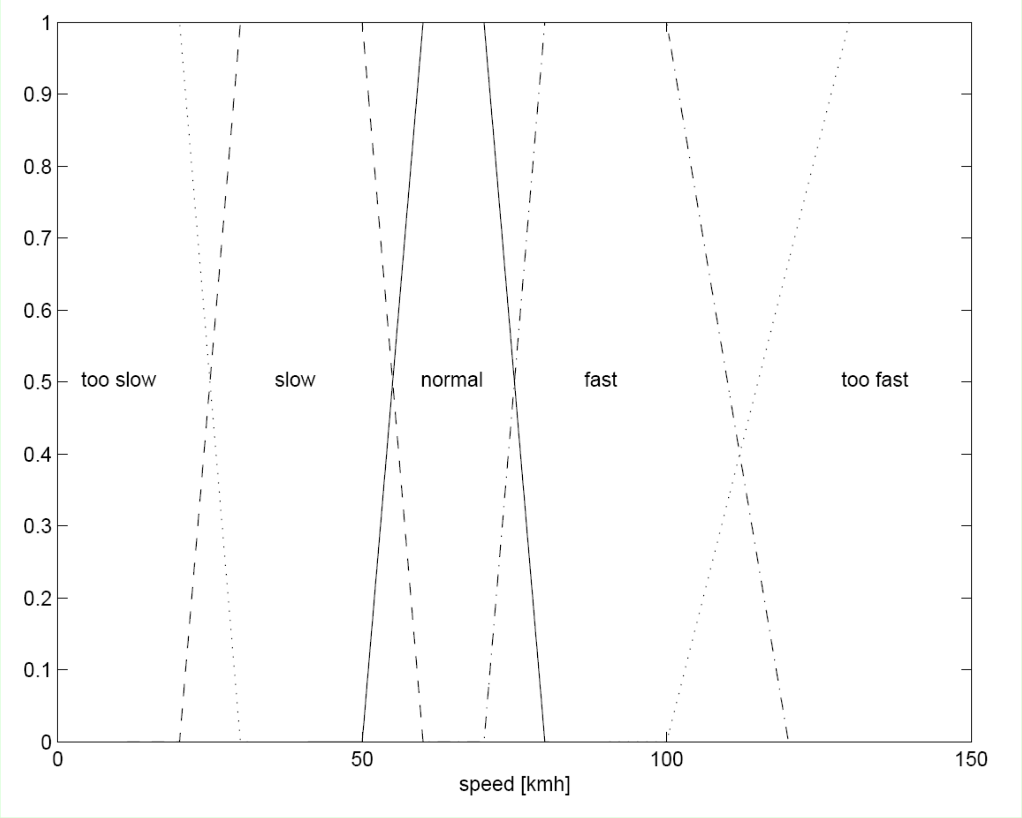
- Umožňuje reprezentovat „fuzziness“ explicitně a snadno
- Problémy:
  - “skládání pravdivosti” vytváří nekonzistence
    (Cheeseman)
    - Problematický požadavek aby míra pravdivosti přiřazená logickému celku byla striktně funkcí jeho komponent
    - Např. fuzzy „min“ pravidlo $\boldsymbol{\mu_{A*B}(u,v) = \min[\mu_A(u), \mu_B(v)]}$ neplatí obecně, jen v případě vzájemné exkluzivity A a B

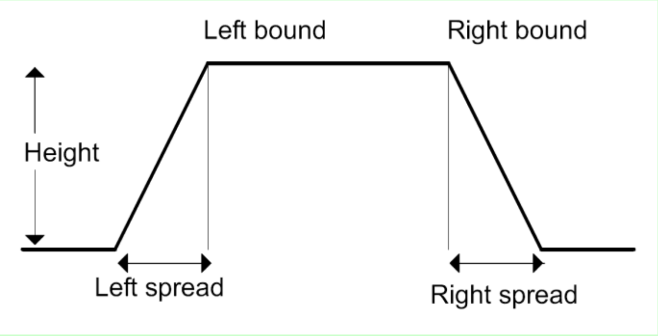
  - „min“ pravidlo je ekvivalentní pravděpodobnostní inferenci za předpokladu maximální korelace mezi událostmi *A* a *B* – jsou-li *A* a *B* vzájemně exkluzivní události, možnost, že nastanou zároveň by měla být 0, ale „min“ pravidlo na to nemusí „přijít“
    (Wise and Henrion)

Obtíže s teorií možnosti

- Interpretace a definice fuzzy kvantifikátorů
  - Subjektivní analýza použitá k vytvoření funkčních vztahů ($A^+ = \sqrt{A}$ if *m* = *More-or-less*, or $A^+ = A^2$ if *m* = *Very*) může vylepšit konzistenci znalostní báze, ale nutně nezvyšuje její přesnost
  - Často se přitom ztrácejí nuance protože podobné lingvistické výrazy dostanou přiřazenu stejnou funkci
- Chybí formální sémantika
  - Giles(82) - interpretace základních pojmů DST (vč. stupně příslušnosti a „possibility“) a logických operací (vč. And, Or, and Not), ale připustil, že je třeba pokračovat
- Dlouhá debata o potřebnosti teorií o „fuzziness“
  - teorie pravděpodobnosti se zabývá všemi relevantními problémy (Cheeseman a Stallings), Zadeh nesouhlasí
  - Fuzzy množiny a teorie možnosti přilákaly mnoho pozornosti, výzkumu i kontroverzí

Příklad reprezentace dat



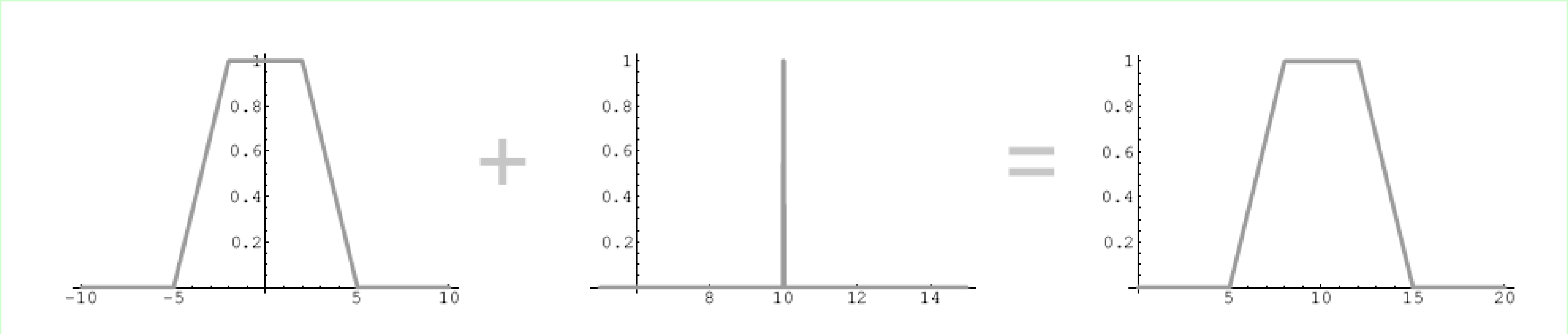


(left bound; right bound; left spread; right spread)

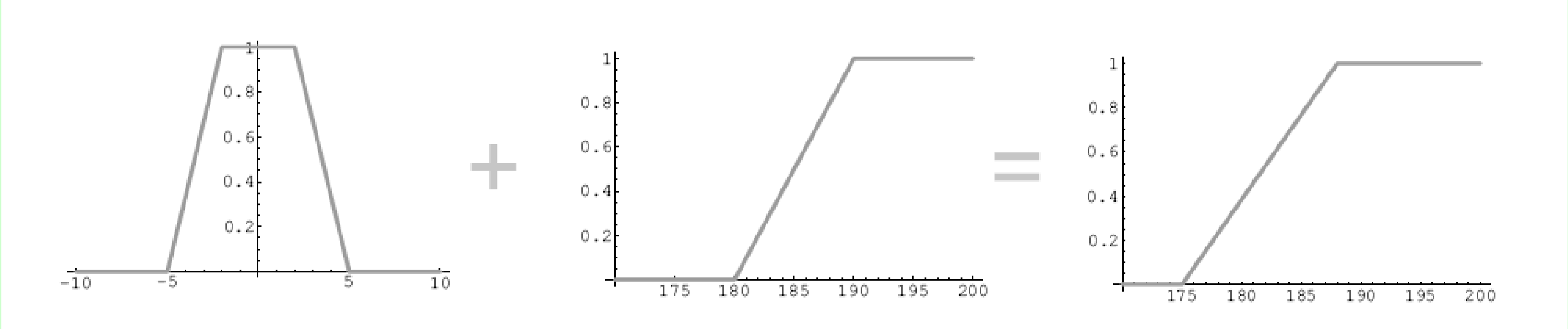
Name	**Syntax**	**4-tuple**
precise value	x	(x; x; 0; 0)
crisp interval	[x; y]	(x; y; 0; 0)
unknown value		(– ∞; ∞; 0; 0)
Height is about	about x	(x – 2; x + 2; 3; 3)
Tall	tall	(190; ∞; 10; 0)
Short	short	(–∞; 150; 0; 10)
Mean height	mean	(160; 180; 10; 10)
Taller than	taller x	(x + 10; ∞; 10; 0)
Shorter than	shorter x	(– ∞; x – 10; 0; 10)
Much taller than	mtaller x	(x + 20; ∞; 10; 0)
Much shorter than	mshorter x	(– ∞; x – 20; 0; 10)

Příklady skládání

$ABOUT(10) = m_{ABOUT} + m_{10} = (-\,2;\ 2;\ 3;\ 3) + (10;\ 10;\ 0;\ 0) = (8;\ 12;\ 3;\ 3)$



$ABOUT(TALL) = \mu_{ABOUT} + \mu_{TALL} = (-\,2;\ 2;\ 3;\ 3) + (190;\ \infty;\ 10;\ 0) = (188;\ \infty;\ 13;\ 3)$



Dempster-Shafer: *Theory of Evidence*

- **Arthur Dempster**, rozšířil **Glen Shafer**
  - A.P. Dempster, “Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping,” Annals Math. Statistics, Vol. 38, No. 2, **1967**, pp. 325-339.
  - G.Shafer, A Mathematical *Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., **1976**.

- Motivace: obtíže s teorií pravděpodobnosti
  - reprezentace nevědomosti
  - subjektivní důvěra přiřazená události a její negaci musí být v součtu jedna

Reprezentace nevědomosti

- Tradiční způsob: **nerozlišením** nebo **uniformním rozdělením pravděpodobnosti**

- Někteří odmítají - shodné pravděpodobnosti reprezentují víc informace než je k dispozici – **stejnou apriorní důvěru** lze přičítat buď **kompletní nevědomosti** nebo **stejné důvěře ve všechny hypotézy**

- Navíc, **nové evidence zakrývají původní nevědomost** vyjádřenou v apriorní důvěře

Důvěra v událost a její negaci

- Zafixujeme-li pravděpodobnost negace hypotézy, pravděpodobnost její platnosti je známá:

$$p(\mathrm{H}) + p(\neg\, \mathrm{H}) = 1.$$

- Shafer: v mnoha situacích, evidence která pouze částečně straní nějaké hypotéze by neměla být vykládána jako částečně podporující její negaci

Dempster-Shaferova teorie (DST)

- Pracuje s množinou podmnožin všech možných hypotéz
- Umožňuje, aby nevědomost byla explicitně vyjádřena a udržována při aktualizacích
- DST nefixuje pravděpodonost negace hypotézy, když je pravděpodobnost její platnosti známa

DST: Univerzum diskurzu *U* (frame of discernment)

- Úplná množina všech vzájemně exkluzivních událostí
- Příklad
  - Zjednodušená medicínská diagnostika cholestatické žloutenky, 4 možné události: *hepatitida (Hep), cirhoza (Cirr), žlučové kameny (Gall), rakovina slinivky (Pan)*
  - *U* má čtyři prvky

- *U* v DST připomíná jevový prostor v teorii pravděpodobnosti DST: počet možných hypotéz 2^U, teorie pravděpodobnosti: IΩI
  - V příkladu má 2^U 16 prvků, reprezentujících možné podmnožiny *U*
- DST: pozorování evidence proti hypotéze bere pouze jako evidenci podporující negaci hypotézy
  - Evidence proti {Hep} (hepatitida a pouze hepatitida) je ekvivalentní evidenci potvrzující hypotézu {Cirr,Gall,Pan} (DST používá množinovou notaci pro negaci). To nemá nezbytně dopad na žádný jiný konkrétní prvek z 2^U.

DST: Základní pravděpodobnostní přiřazení

- Nechť *A* je podmnožina *U*
- Základní pravděpodobnost *A*, označená *m*(*A*), je pravděpodobnost přiřazená množině *A*.

- *m*(*A*) lze brát jako část celkové důvěry přiřazené právě jen množině *A*
- V mnoha ohledech s ním lze pracovat jako s pravděpodobností
- Funkce *p*(*A*) a *m*(*A*) se liší především tím, že *A* musí být jednoprvková v teorii pravděpodobnosti, v DST může *A* obsahovat několik prvků

- Funkce *m* mapuje 2^U na čísla mezi 0 a 1. Je nazývána **základní pravděpodobnostní přiřazení**, pokud splňuje:

  (1) *m*(Ø) = 0

  (2) součet základních pravděpodobností všech podmnožin *U* je 1

  – Možné základní pravděpodobnostní přiřazení je např.: *m*({Hep}) = 0.3, *m*({Cirr}) = 0.2, m({Gall}) = 0.1, *m*({Hep,Cirr}) = 0.4 a *m*(*A*) = 0 jinde

DST: Míra důvěry v *A*

- **Míra důvěry** (belief, míra domnění) v *A*, *Bel*(*A*)
  - celkové množství důvěry v *A*, tj. nikoliv množství přiřazené přesně množině *A* základním pravděpodobnostním přiřazením.
- Funkce *Bel* se nazývá funkce důvěry, pokud splňuje:

  (1) $Bel(\emptyset) = 0$

  (2) $Bel(U) = 1$

  (3) $Bel(A) + Bel(\neg A) \leq 1$ (kvůli definici hypotézy a její negace)

  V DST *A* znamená "*A* a pouze *A*," zatímco $\neg$ A znamená "cokoliv kromě *A*"

  - *Bel* je rovna *m* u singletonů
  - *Bel* je větší nebo rovna *m* u víceprvkových množin

- Příklad:

  Bel ({Hep}) = *m*({Hep}), ale:

  Bel({Hep,Cirr}) = *m*({Hep,Cirr}) + *m*({Hep}) + m({Cirr})

  $\geq$ *m*({Hep,Cirr})

DST: Míra přípustnosti *A*

- ***Pl*(*A*)** = 1 - *Bel*($\neg$ *A*) … maximální množství důvěry, které může být přiřazeno *A (Plausibility)*
- Funkce *Bel* a *Pl* lze interpretovat jako spodní a horní pravděpodobnosti indukované vícehodnotovým mapováním
- *Bel*(*A*) + *Bel*($\neg$ A) $\leq$ 1 $\rightarrow$ *Pl*(*A*) - *Bel*(*A*) $\geq$ 0.

- DST: pouze podmnožiny *U* s nenulovými základními pravd. jsou zajímavé – nazývají se **fokální prvky** funkce důvěry *Bel* nad 2^U
- **Jádro funkce důvěry** - sjednocení všech jejích fokálních prvků
  - Pokud *m*({Hep}) = 0.3, *m*({Cirr}) = 0.2, *m*({Gall}) = 0.1 a *m*({Hep,Cirr}) = 0.4, jádro funkce důvěry je {Hep,Cirr,Gall}. Dále, *Bel*({Hep,Cirr}) = *m*({Hep}) + *m*({Cirr}) + *m*({Hep,Cirr}) = 0.9 získáme ze základních pravděpodobností fokálních prvků

- Hlavní rozdíl DST a teorie pravděpodobnosti: Při stejné množině možných hypotéz *U*, teorie pravděpodobnosti přiřazuje pravděpodobnosti jednotlivým hypotézám, DST je přiřazuje všem možným podmnožinám *U*

DST: Reprezentace nevědomosti

- Teorie pravděpodobnosti: uniformní apriorní rozložení pravděp. reprezentuje totální nevědomost. Nelze rozlišit mezi nevědomostí a znalostí informací podporujících uniformní rozložení.
- **DST vyjadřuje nevědomost explicitně**. Např. pokud jsou *A* a *B* jediné hypotézy, teorie pravděpodobnosti by vyjádřila nevědomost o *A* a *B* pravděpodobností 1/2 u obou *A* a *B* ($p(A) = p(B) = 1/2$).
- DST: $m(\{A\}) = m(\{B\}) = 1/2$ … důvěra v *A* a *B* jsou stejné a nejedná se o nevědomost o jejich platnosti. V takovém případě se funkce důvěry nazývá **Bayesovská funkce důvěry**. Jsou-li všechny ***fokální prvky*** jednoprvkové***, neexistuje nevědomost***; je-li nějaký fokální prvek víceprvkový, existuje nějaká nevědomost.
- Teorie pravděpodobnosti: pravděpodobnost negace *A* je fixována, jakmile známe pravděpodobnost *A*, protože $A \cup \neg A = \Omega$ a $p(A) + p(\neg A) = 1$. Kdyby DST vyžadovala $Bel(A) + Bel(\neg A) = 1$, tedy důvěra v negaci hypotézy by byla fixována při známé důvěře v hypotézu. Nemohli bychom snížit důvěru v tvrzení bez zvýšení důvěry v jeho negaci. DST: důvěra v negaci hypotézy nezávisí na důvěře v hypotézu samotnou, platí (měkčí) omezení $Bel(A)+Bel(\neg A) \leq 1$

DST: Slučování důvěry

- Plyne-li z evidence více měr důvěry ve stejnou hypotézu, důvěry je třeba sloučit, abychom získali **celkovou důvěru v hypotézu**. DST obvykle kombinuje různé funkce důvěry za použití jejich **ortogonálních sum** podle **Dempsterova kombinačního pravidla**

- Nechť m_1 a m_2 jsou dvě základní pravděpodobnostní přiřazení na *U* Potom jejich ortogonální suma je

$$\boldsymbol{m_1 \oplus \mathrm{m}_2 (A) = K \sum_{X \cap Y = A} m_1(X).m_2(\mathrm{Y})},$$

kde K … normalizační konstanta $\boldsymbol{K^{-1} = \sum_{X \cap Y \neq \emptyset} m_1(X).m_2(\mathrm{Y})}$

- Je-li $A = \emptyset$, z definice $m_1 \oplus \mathrm{m}_2 (\emptyset) = 0$
- Pokud $K^{-1} = 0$, ortogonální suma neexistuje a říkáme, že m_1 a m_2 **si zcela odporují**
- log *K* … **váha konfliktu** mezi Bel_1 a Bel_2. Tedy, nejsou-li Bel_1 a Bel_2 v konfliktu, $K = 1$; odporují-li si Bel_1 a Bel_2 zcela, $\mathrm{K}^{-1} = 0$
- Ortogonální sumy jsou komutativní i asociativní

Příklad: slučování důvěry

m_1 \ m_2	{Cirr} (0.5)	{Hep, Cirr} (0.2)	*U* (0.3)
{Hep} (0.8)	∅ (0.4)	{Hep} (0.16)	{Hep} (0.24)
***U* (0.2)**	{Cirr} (0.1)	{Hep, Cirr} (0.04)	*U* (0.06)

$$K = \frac{1}{1 - 0.4} = \frac{1}{0.6}$$

$$m_1 \oplus m_2(\{\text{Hep}\}) = \frac{0.16 + 0.24}{0.6} = 0.6667$$

$$m_1 \oplus m_2(\{\text{Cirr}\}) = \frac{0.1}{0.6} = 0.1666$$

$$m_1 \oplus m_2(\{\text{Hep,Cirr}\}) = \frac{0.04}{0.6} = 0.0667$$

$m_1 \oplus m_2(U) = 0.06 / 0.6 = 0.1$

Ostatní podmnožiny *U*: kombinovaná důvěra = 0

Suma sloučeného pravděpodobnostního přiřazení $m_1 \oplus m_2(U)$ se rovná 1

Dempsterovo kombinační pravidlo

$$m(A) = \frac{\sum_{X \cap Y = A} m_1(X) m_2(Y)}{1 - \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X) m_2(Y)}$$

- m_1 a m_2 ... dvě různé funkce důvěry na stejném U
- Kombinování funkcí důvěry poskytuje lepší obrázek o důvěře v uvažovanou hypotézu

Podmiňování (conditioning, focusing)

- Na základě *E* máme rozhodnout, zda daná *H* platí, popř. vybrat tu nejlepší z H_1 ... H_n
- Dva přístupy: podmiňování, změna domnění
- Víme-li, že $x \in B$, definujeme **podmíněné zákl. přiřazení**:

$$m(A|B) = \frac{m(A)}{Bel(B)} \qquad A \subseteq B$$

$$m(A|B) = 0 \qquad A \not\subset B$$

nutno $Bel(B)>0$

Lze ověřit, že $m(\emptyset|B) = 0$ a $\sum m(.|B) = 1$

a odvodit:

$$Bel(A|B) = \frac{Bel(A \cap B)}{Bel(B)}$$

$$Pls(A|B) = \frac{Pls(A \cup \neg B) - Pls(\neg B)}{1 - Pls(\neg B)}$$

Změna domnění (belief revision/updating)

- Z Dempsterova pravidla: na základě $x \in B$ počítáme m_B ze základního přiřazení m kombinací s $m`(B) = 1$

$$m_B(A) = \frac{\sum_{C \cap B = A} m(C)}{1 - \sum_{C \cap B = \emptyset} m(C)} \qquad A \neq \emptyset$$

nutno $Pl(B)>0$

$$m_B(\emptyset) = 0$$

(slabší podmínka než u podmiňování)

Lze odvodit:

$$Bel_B(A) = \frac{Bel(A \cup \neg B) - Bel(\neg B)}{1 - Bel(\neg B)}$$

$$Pls_B(A) = \frac{Pls(A \cap B)}{Pls(B)}$$

Srovnání vlastností podmiňování a změny domnění:

$Bel(A|B) \leq Bel_B(A) \leq Pl_B(A) \leq Pl(A|B)$

DST: Závěr

- **DST** umožňuje explicitně vyjádřit nevědomost a neomezuje úzce důvěru v negaci hypotézy, známe-li důvěru v její platnost

- Tyto výhody vedou na kombinatorickou explozi, protože prostor hypotéz je množinou všech podmnožin možných hypotéz.
- K naplnění tohoto mohutného prostoru by pro vytvoření ES experti museli vyčíslit důvěru ke všem podmnožinám možných hypotéz
- Základní pravděp. přiřazení samozřejmě pouze pro „zajímavé“ podmnožiny, ty „nezajímavé“ mohou mít rovno nule
- Základní pravděp. přiřazení by mělo jít vypočítat ze vztahu mezi evidencí a hypotézami, DST nenabízí žádné rady, jak tato přiřazení získat
- Neexistuje efektivní procedura pro odvozování z funkcí důvěry
- Téměř žádný ES nebyl vybudován na základě DST

DST: Příklad 1

- Hod (pravou) mincí:
  - stupeň důvěry 0,5 (panna)
- Falešná (oboustranná) mince?
  - stupeň důvěry mezi 0-1 (nemusíme chtít 0,5)
- Dvě charakteristiky
  - Possibilistická distribuce v rozsahu <Bel,Pl>
  - Spodní a horní omezení pravděpodobnosti
  - Mince OK: Belief and Plausibility 0,5
  - Falešná mince: Belief 0, Plausibility 1

DST: Příklad 2 …

- Rozsah pravděpodobného věku u osob
- Přesné dotazy často nelze zodpovědět
- Dotazy na možnost či jistotu ohledně hodnoty věku: >50 ?, <30 ?
- Q=<20;25>

… DST: Příklad 2

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba v daném seznamu má věk v intervalu Q?
- Bel … nezbytnost
- Pl … v rozsahu
- D-S kombinační pravidlo … kombinace více zdrojů informace, s různou úrovní znalostí a důvěryhodnosti

DST: Přehled

- Universum diskurzu *U*
- Základní pravděpodobnostní přiřazení

$m: 2^U \rightarrow [0; 1]$ $m(\varnothing) = 0$ $$\sum_{A \subset U} m(A) = 1$$

- *Belief*

$$Bel(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$$

$$Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B)$$

- *Plausibility* $$Pls(A) = \sum_{B \cap A \neq \varnothing} m(B) \qquad Pls(A) = 1 - Bel(\neg A)$$

$$Pls(A \cap B) \geq Pls(A) + Pls(B) - Pls(A \cup B)$$

Literatura

- Mařík a kol.: Umělá inteligence (2), Academia, 1997
- K.-C. Ng and B. Abramson: Uncertainty Management in Expert Systems, IEEE Expert: Intelligent Systems and their Applications, 1990.
- L.A. Zadeh: Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems, 1978.
- L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 1965.
- K.-P. Adlassnig and G.Kolarz, Cadiag-2: Computer-Assisted Medical Diagnosis using Fuzzy Subsets, in Approximate Reasoning in Decision Analysis, 1982.
- M. Fieschi et al., Sphinx: An Interactive System for Medical Diagnosis Aids, in Approximate Reasoning in Decision Analysis, 1982.
- http://www.scholarpedia.org/article/Possibility_theory
- A.P. Dempster: Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping, Annals Math. Statistics, Vol. 38, No. 2, 1967.
- G.Shafer, A Mathematical Theory of Evidence, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1976.