Fuzzy logika

Posibilistická teorie (1)

Systémy s umělou inteligencí

Fuzzy logika a odvozování

- Lotfi A. Zadeh (*1921)

- „Lidé nepotřebují přesnou číslem vyjádřenou informaci a přesto jsou schopni rozhodovat na vysoké úrovni, odpovídající adaptivnímu řízení. Pokud by systémy řízení byly programovány tak, aby uměly pracovat s nepřesnými informacemi na vstupu, mohly by být mnohem účinnější a snad i jednodušeji programovatelné….“

Fuzzy logika

- Rozšíření Booleovy algebry na vícehodnotovou logiku.

- Teorie fuzzy množin spočívá v zavedení tzv. stupně příslušnosti prvku k množině, který může nabývat hodnot z intervalu 0-1, na rozdíl od klasické teorie množin, kdy každý prvek do množiny buď patří nebo nepatří.

- Fuzzy logika: jazyk s vlastní syntaxí a sémantikou, umožňuje použití kvalitativně formulovaných zkušeností a znalostí o řešeném problému.

Základní pojmy z teorie množin

- množina *A*
- Existuje množina *P(A)* ... všechny podmnožiny *A*
- Neexistuje množina všech množin

  -> Studium podmnožin jedné pevné množiny: *univerza X*
- Kardinalita (mohutnost) ... počet prvků (u konečných)
- Kartézský součin *A* x *B* ... usp. dvojice
- Průnik $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Sjednocení $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Doplněk $\overline{A} = \{x : x \in X, x \notin A\}.$
- Inkluze (býti podmnožinou) – více možností, např.:

  $\forall x \in A: x \in B$

Teorie množin

Množinové operace vyjádřené pomocí inkluze:

$$A \cap B = \max\{C \subseteq X : \ C \subseteq A, C \subseteq B\},$$
$$A \cup B = \min\{C \subseteq X : \ A \subseteq C, B \subseteq C\},$$
$$\overline{A} = \max\{C \subseteq X : \ C \cap A = \emptyset\} = \min\{C \subseteq X : \ C \cup A = X\}.$$

Charakteristiky doplňku:

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, \qquad A \cup \overline{A} = X.$$

$$A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ \overline{B} \subseteq \overline{A}.$$

Popis charakteristickou funkcí

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

$$A = \{x \in X : \ \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\}.$$

Množina obrazů: $M \subseteq \{0,1\}$

Char. funkce nebývá prostá, přesto inverzní zobrazení:

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \ \mu_A(x) \in M\}.$$

$$A = \mu_A^{-1}(\{1\}) = \mu_A^{-1}((0,1\rangle).$$

Inkluze a množinové operace

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \le \mu_B,$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) = \min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big),$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big),$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) = \neg\mu_A(x),$$

$\neg$ ... logická negace

Fuzzy množiny

- Zobecnění charakteristické funkce nabývající více (pravdivostních) hodnot
- Množinou pravdivostních hodnot interval reálných čísel <0, 1> nebo jeho podmnožina
- *Fuzzy množina* popsaná char. funkcí: $\mu_A : X \to \langle 0, 1 \rangle$

  = *funkce příslušnosti*
- Zápis $x \in A$ má význam jen pro „ostré“ (crisp) množiny

Další vlastnosti fuzzy množin

- Obor hodnot

$$\mathrm{Range}(A) = \{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : (\exists x \in X : \mu_A(x) = \alpha)\}$$

- Výška $h(A) = \sup \mathrm{Range}(A)$
  - 1 ... f.m. normální, <1 … f.m. subnormální
- Nosič (support)

$$\mathrm{Supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}, \quad \mathrm{Supp}(A) = \mu_A^{-1}((0, 1\rangle).$$

- Jádro (core)

$$\mathrm{core}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}, \quad \mathrm{core}(A) = \mu_A^{-1}(1).$$

- *Konečná f.m.* má konečný nosič,

  pak *kardinalita* $\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$

Příklady

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - x & \text{pro } x \in (1, 2\rangle, \\ 0 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3, \\ 1 & \text{pro } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 5, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Konečná fuzzy množina:

$$\mu_B = \{(3, \tfrac{1}{2}), (4, 1), (5, \tfrac{1}{4})\}.$$

Fuzzy inkluze (podmnožina)

$A \subseteq B$, jestliže $\forall x \in X: \;\; \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

Množinové a výrokové operace (Bool. algebra)

množinové operace		výrokové operace		vztah
doplněk	$\overline{} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$	negace	$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$	$\overline{A} = \{x \in X : \neg(x \in A)\}$
průnik	$\cap : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	konjunkce	$\wedge : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
sjednocení	$\cup : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	disjunkce	$\vee : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

dále platí:

involuce:	$\neg\neg\alpha = \alpha,$	
komutativita:	$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha,$	$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha,$
asociativita:	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma),$	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma),$
distributivita:	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma),$	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma),$
idempotence:	$\alpha \vee \alpha = \alpha,$	$\alpha \wedge \alpha = \alpha,$
absorpce:	$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha,$	$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha,$
absorpce s univerzem a 0:	$\alpha \vee 1 = 1,$	$\alpha \wedge 0 = 0,$
neutrální prvky:	$\alpha \vee 0 = \alpha,$	$\alpha \wedge 1 = \alpha,$
zákon kontradikce:		$\alpha \wedge \neg\alpha = 0,$
zákon vyloučeného třetího:	$\alpha \vee \neg\alpha = 1,$	
de Morganovy zákony:	$\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta,$	$\neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta.$

Fuzzy logika

- Pravdivostní hodnoty z intervalu <0;1>
- Předpoklad: stupeň příslušnosti bodu *x* k výsledku operace závisí jen na jeho stupních příslušnosti k operandům a je jimi jednoznačně určen (fuzzy logika je **funkcionální**).
  1. Výsledek je nezávislý na hodnotách příslušnosti v ostatních bodech.
  2. Stupně příslušnosti bodu k operandům poskytují dostatečnou informaci pro určení stupně příslušnosti k výsledku.

     Např. stupeň pravdivosti fuzzy konjunkce *je chladno a prší* je plně určen tím, nakolik *je chladno* a nakolik *prší*.
- Rozdíl: u **pravděpodobnostní neurčitosti** záleží navíc na **závislosti zkoumaných jevů**!
- Např. pravděpodobnost *zítra bude chladno a bude pršet* **není** jednoznačně určena pravděpodobností výroků *zítra bude chladno* a *zítra bude pršet*.

Operace s fuzzy množinami

- Standardní fuzzy negace $\underset{S}{\neg}\alpha = 1 - \alpha.$
- Obecné podmínky $\alpha \leq \beta \Rightarrow \underset{\cdot}{\neg}\beta \leq \underset{\cdot}{\neg}\alpha,$ $\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \alpha.$ $\underset{\cdot}{\neg}1 = 0, \qquad \underset{\cdot}{\neg}0 = 1.$
- Jiné možnosti
  - např. Gödelova zobecněná (*) fuzzy negace

$$\underset{G}{\neg}\alpha = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Fuzzy doplněk $\mu_{\overline{A}}(X) = \underset{\cdot}{\neg}\mu_A(x).$
  - využívá zvolenou fuzzy negaci

(*) zobecněné fuzzy negace: není zde kladen požadavek involutivnosti (dvojí negace vracející původní hodnotu)

Fuzzy konjunkce a průnik

$\underset{\cdot}{\wedge} : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle,$

Axiomy:

$$\begin{array}{ll} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \beta \underset{\cdot}{\wedge} \alpha & \text{(komutativita)} \\ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma) = (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} \gamma & \text{(asociativita)} \\ \beta \le \gamma \Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \le \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma & \text{(monotonie)} \\ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha & \text{(okrajová podmínka)} \end{array}$$

$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 = 0.$

Např.

- Standardní $\alpha \underset{S}{\wedge} \beta = \min(\alpha, \beta).$ ... největší
- Lukasiewiczova $\alpha \underset{L}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$
- Součinová $\alpha \underset{P}{\wedge} \beta = \alpha \cdot \beta.$
- Drastická $\alpha \underset{D}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$ ... nejmenší

Fuzzy průnik $\mu_{A \underset{\cdot}{\cap} B}(x) = \mu_A(x) \underset{\cdot}{\wedge} \mu_B(x).$

Fuzzy disjunkce a sjednocení

$\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$

Axiomy:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta &= \beta \mathbin{\dot\vee} \alpha && \text{(komutativita)} \\ \alpha \mathbin{\dot\vee} (\beta \mathbin{\dot\vee} \gamma) &= (\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \mathbin{\dot\vee} \gamma && \text{(asociativita)} \\ \beta \le \gamma &\Rightarrow \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta \le \alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma && \text{(monotonie)} \\ \alpha \mathbin{\dot\vee} 0 &= \alpha && \text{(okrajová podmínka)} \end{aligned}$$

$\alpha \mathbin{\dot\vee} 1 = 1.$

Např.

- Standardní $\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$ ... nejmenší
- Lukasiewiczova $\alpha \overset{L}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$
- Součinová $\alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$
- Drastická $\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$ ... největší

Fuzzy sjednocení $\mu_{A \dot\cup B}(x) = \mu_A(x) \mathbin{\dot\vee} \mu_B(x).$

Fuzzy logické (výrokové) operace

involuce:	$\underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha) = \alpha,$	
komutativita:	$\alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha,$	$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \beta \underset{\cdot}{\wedge} \alpha,$
asociativita:	$(\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma = \alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma),$	$(\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} \gamma = \alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma),$
distributivita:	$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) \dot{\vee} (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma),$	$\alpha \dot{\vee} (\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} (\alpha \dot{\vee} \gamma),$
idempotence:	$\alpha \dot{\vee} \alpha = \alpha,$	$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha = \alpha,$
absorpce:	$\alpha \dot{\vee} (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) = \alpha,$	$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\alpha \dot{\vee} \beta) = \alpha,$
absorpce s jedničkou a nulou:	$\alpha \dot{\vee} 1 = 1,$	$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 = 0,$
neutrální prvky:	$\alpha \dot{\vee} 0 = \alpha,$	$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha,$
zákon kontradikce:		$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha = 0,$
zákon vyloučeného třetího:	$\alpha \dot{\vee} \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha = 1,$	
de Morganovy zákony:	$\underset{\cdot}{\neg}(\alpha \dot{\vee} \beta) = \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\,\beta,$	$\underset{\cdot}{\neg}(\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) = \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha \dot{\vee} \underset{\cdot}{\neg}\,\beta.$

Fuzzy implikace a ekvivalence

$\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}} : \langle 0,1\rangle^2 \rightarrow \langle 0,1\rangle$

Nejčastěji 3 třídy:

$\alpha \overset{S}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \underset{S}{\neg}\alpha \dot{\vee} \beta$ S-implikace

$\alpha \overset{Q}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \underset{S}{\neg}\alpha \dot{\vee} (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta)$ Q-implikace (kvantová)

$\alpha \overset{R}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \sup\{\gamma :\ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \leq \beta\}$ reziduovaná implikace

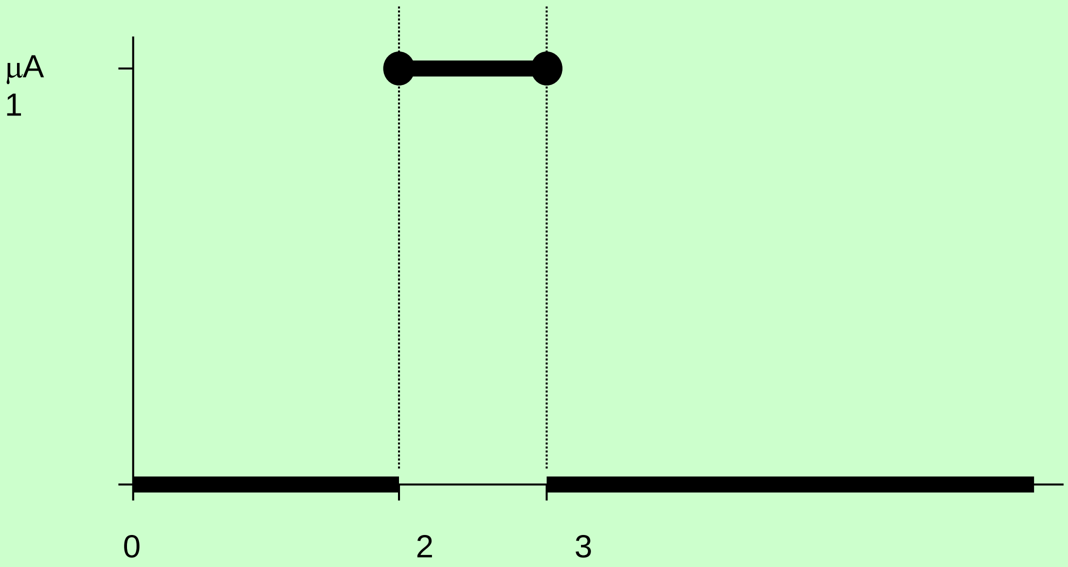
Např.

- Gödelova $\alpha \overset{R}{\underset{S}{\rightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ \beta & \text{jinak.} \end{cases}$
- Reichenbachova $\alpha \overset{S}{\underset{P}{\rightarrow}} \beta = 1 - \alpha + \alpha\beta.$
- Původní Zadehova $\alpha \overset{Q}{\underset{S}{\rightarrow}} \beta = \underset{S}{\neg}\alpha \overset{S}{\vee} (\alpha \underset{S}{\wedge} \beta).$

$$\alpha \dot{\underset{\cdot}{\leftrightarrow}} \beta = (\alpha \dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \alpha).$$

Ostrá fuzzy množina

- Nechť je dána ostrá množina A všech reálných čísel z uzavřeného intervalu <2,3>



Míra příslušnosti k fuzzy množině

- Funkce příslušnosti hodnot k prvku množiny: $\mu_A(x) \rightarrow [0,1]$, kde A je prvek fuzzy množiny a x je spojitá hodnota.

Příklad:

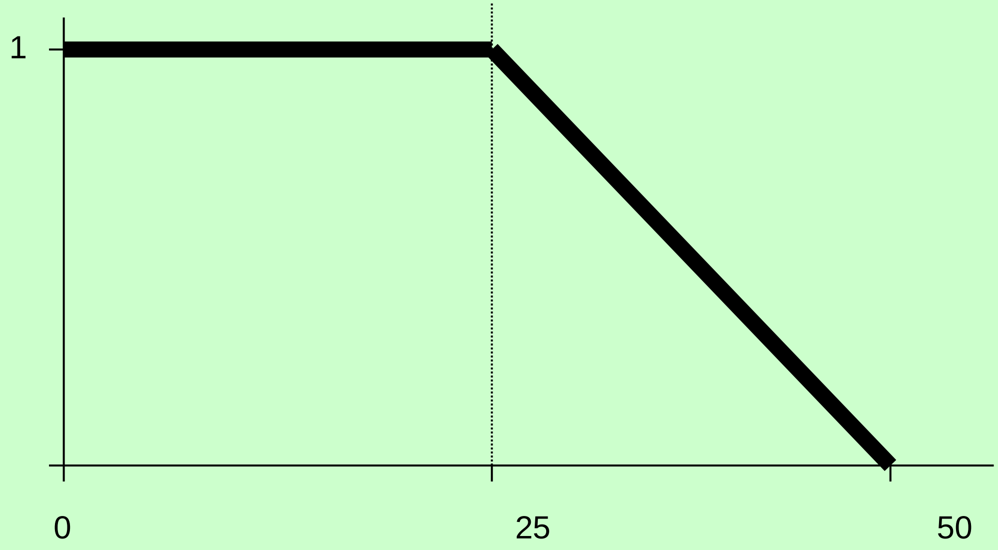
fuzzy množina nechť je **STÁŘÍ** s prvky **mladý, stř. věku …**

příslušnost k fuzzy množině může být pro prvek **mladý** tato:

věk	stupeň příslušnosti k mladosti
25	1,0
30	0,8
35	0,6
40	0,4
45	0,2
50	0,0

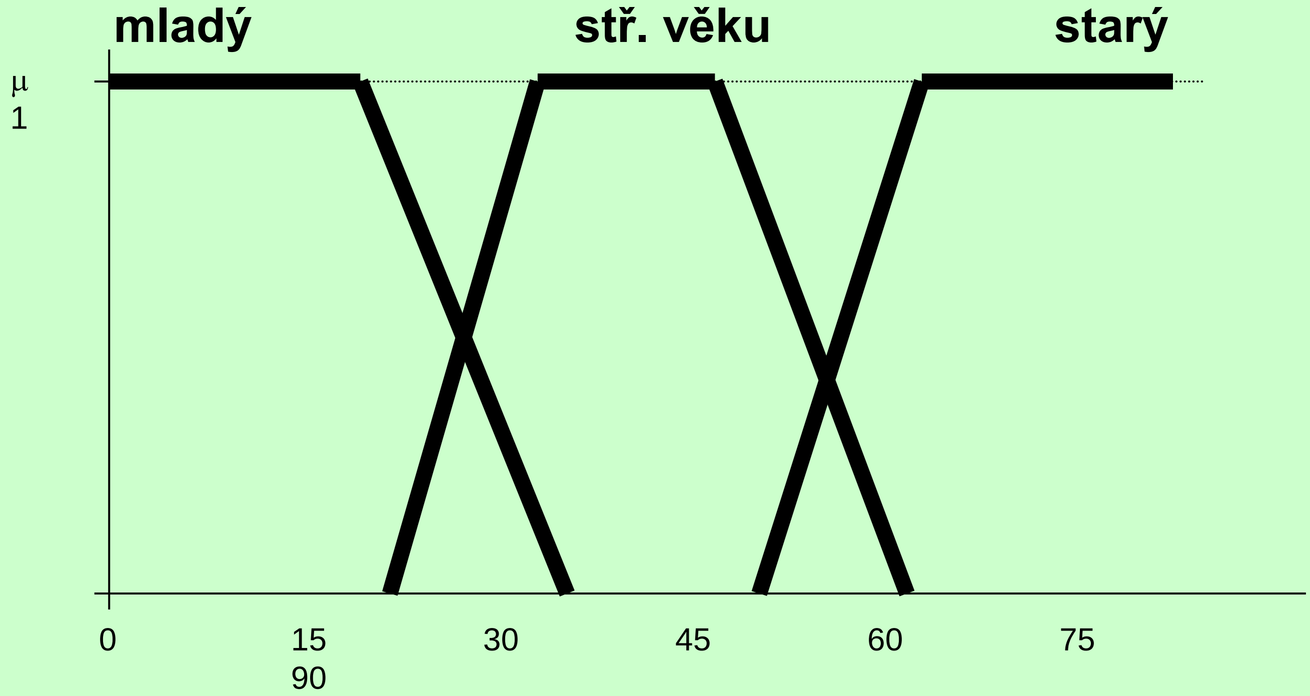
Míra příslušnosti k fuzzy množině

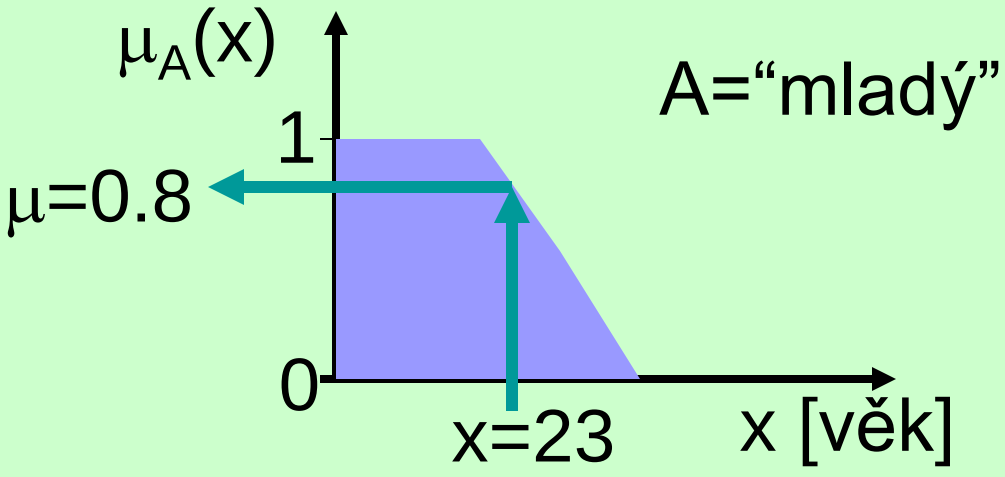
- Můžeme psát $\mu_{mladý}(25)=1.0$, $\mu_{mladý}(30)=0.8$,... $\mu_{mladý}(50)=0.0$.
- Stupeň příslušnosti hodnot: „možnostní“ rozdělení pojmu **mladý**



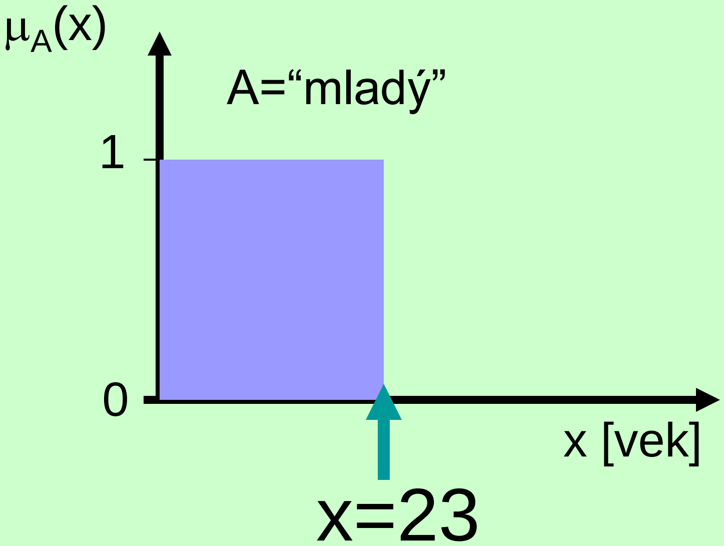
Příklad prvků fuzzy množiny

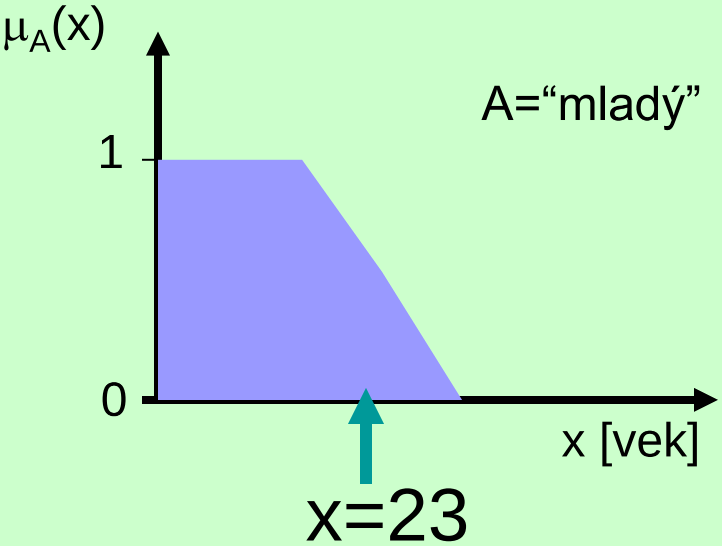
- Nechť je dána fuzzy množina **STÁŘÍ** a její prvky **mladý**, **středního věku** a **starý**.




$\mu_A(x)$
A="mladý"
1
μ=0.8
0
x=23
x [věk]

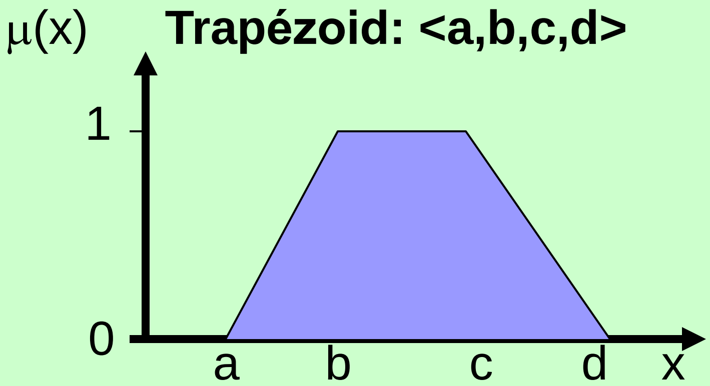
Porovnání



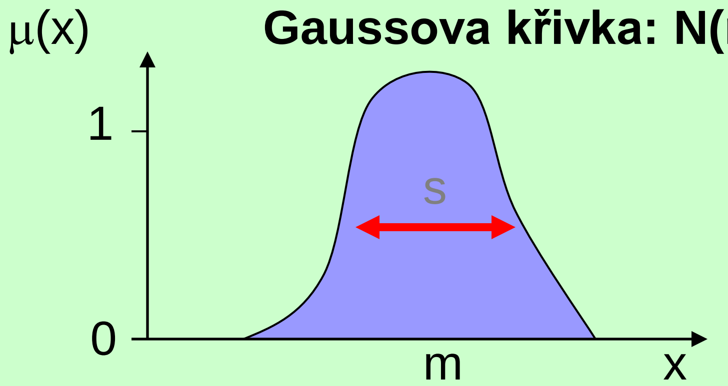


Různé funkce příslušnosti

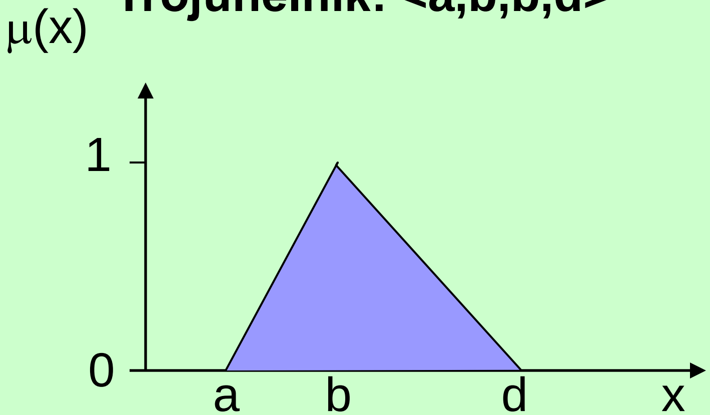
Trapézoid: <a,b,c,d>



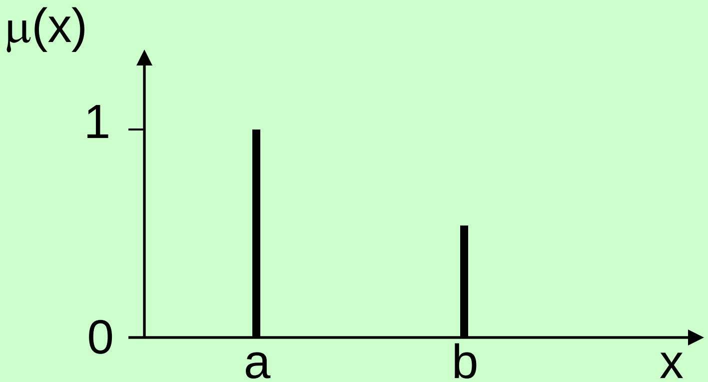
Gaussova křivka: N(m,s)



Trojúhelník: <a,b,b,d>

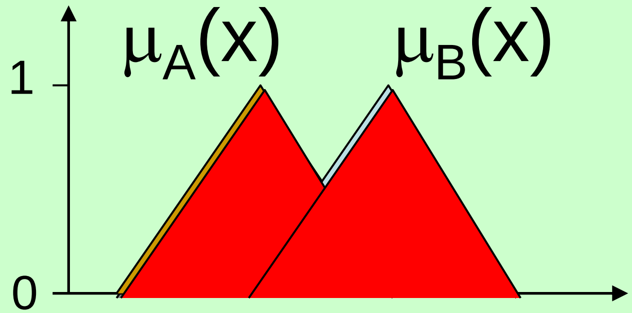


Singleton: (a,1) and (b,0.5)



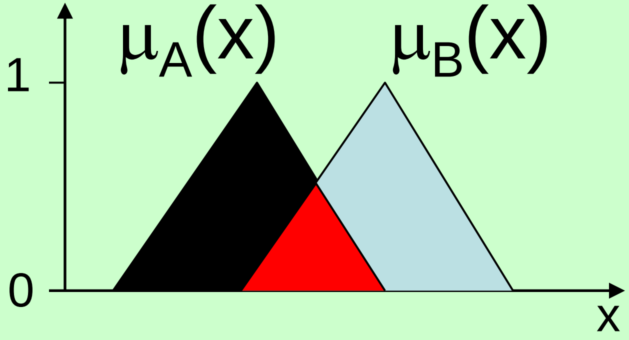
Operace sjednocení

$$\mu_{A\vee B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$



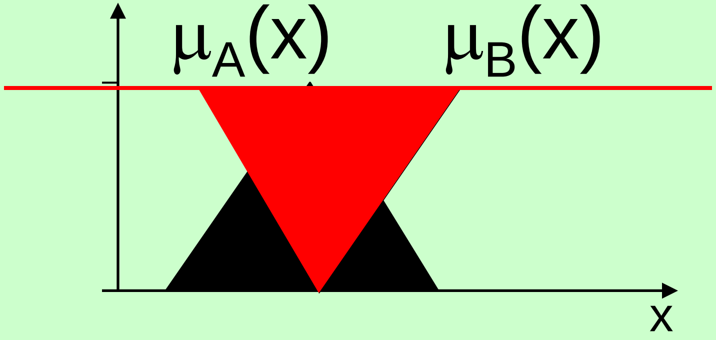
Průnik

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



Doplněk

$$\mu_{A-}(x)=1-\mu_A(x)$$



Přibližné usuzování

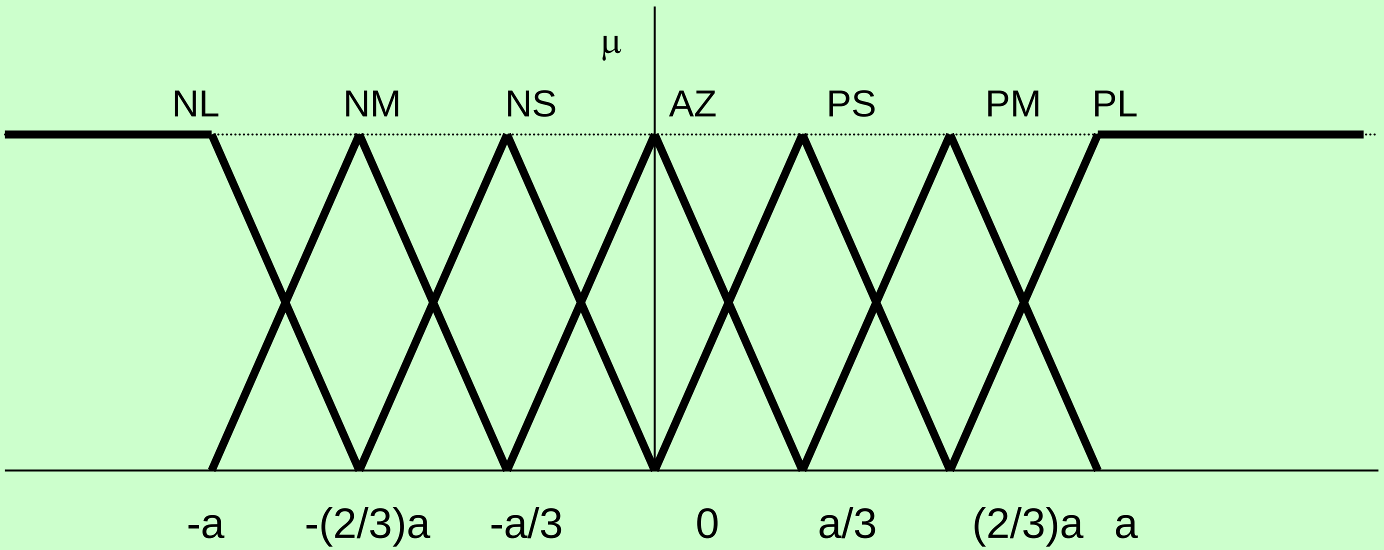
- Výroky respektující **fuzzy usuzování (inference)**. Místo booleovské logiky se využívá **fuzzy logika**
- **Fuzzy expertní systémy** využívají metody fuzzy usuzování podle **fuzzy pravidel**
- Získání výstupních hodnot ze vstupních pomocí:

<u>Fuzzifikace→Inference→Agregace→Deffuzifikace</u>

Fuzzifikace

- Převod vstupních (neurčitých) dat na fuzzy množiny
- Získáváme konkrétní funkce příslušnosti k dané fuzzy množině
- Musí být pokryto celé zvolené univerzum fuzzy množinami
- V prvním kroku provádíme normalizaci univerza např. na interval <0;1> nebo <-1;1>
- V druhém kroku se snažíme každé hodnotě univerza přiřadit stupně příslušnosti k daným fuzzy množinám Beze zbytku pokryjeme normalizované univerzum nosiči jednotlivých množin
- Nakonec, zvolíme konkrétní tvary funkcí příslušnosti
- **Lingvistická veličina=proměnná**
- **Lingvistická hodnota= term**

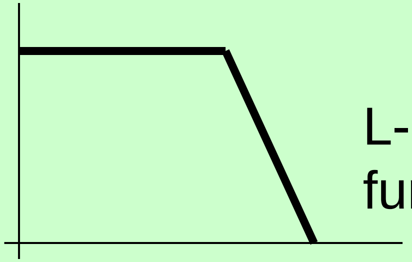
Fuzzifikace



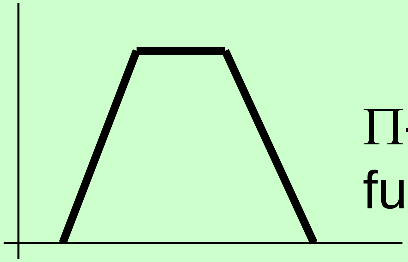
Zkratka	Význam v angličtině	Ekvivalent v češtině
NL	Large Negative	velká záporná hodnota
NM	Medium Negative	střední záporná hodnota
NS	Small Negative	malá záporná hodnota
AZ	Approximately Zero	přibližně nulová hodnota
PS	Small Positive	malá kladná hodnota
PM	Medium Positive	střední kladná hodnota
PL	Large Positive	velká kladná hodnota

Fuzzifikace

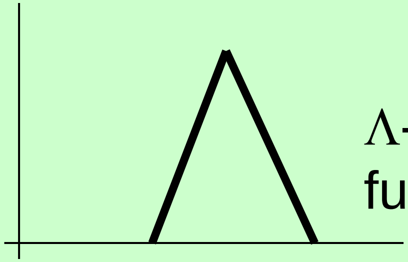
- V praxi lze používat různé tvary funkcí příslušnosti



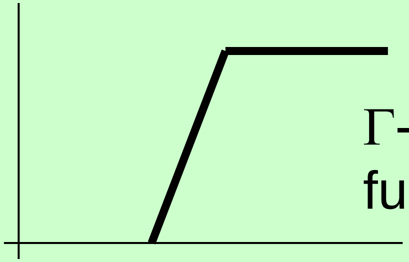
L-funkce



Π-funkce

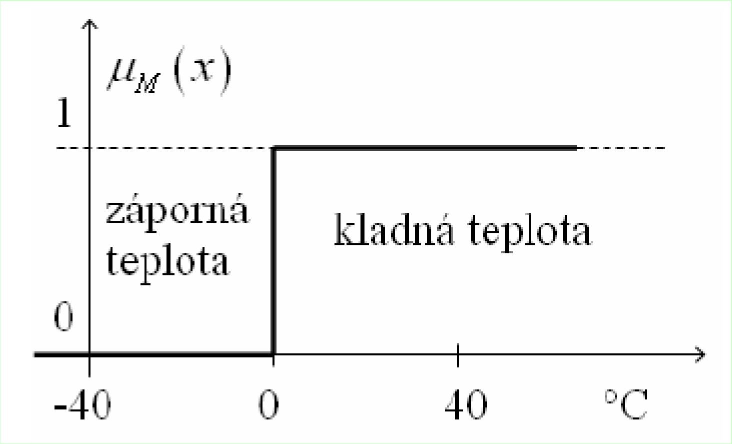


Λ-funkce

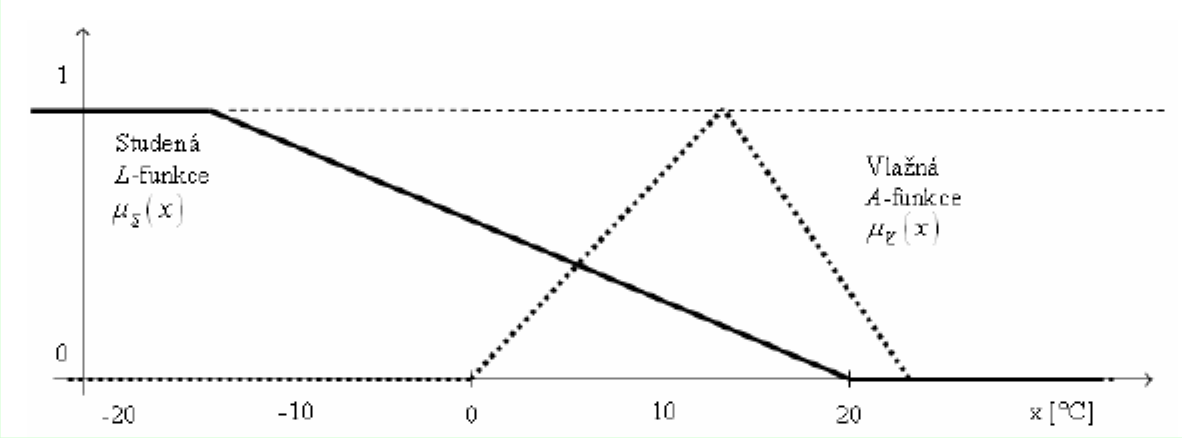


Γ-funkce

- Ostré množiny



- Fuzzy množiny
- Univerzum 0-1
- Lingvistické hodnoty
  - Ledová
  - Studená
  - Vlažná

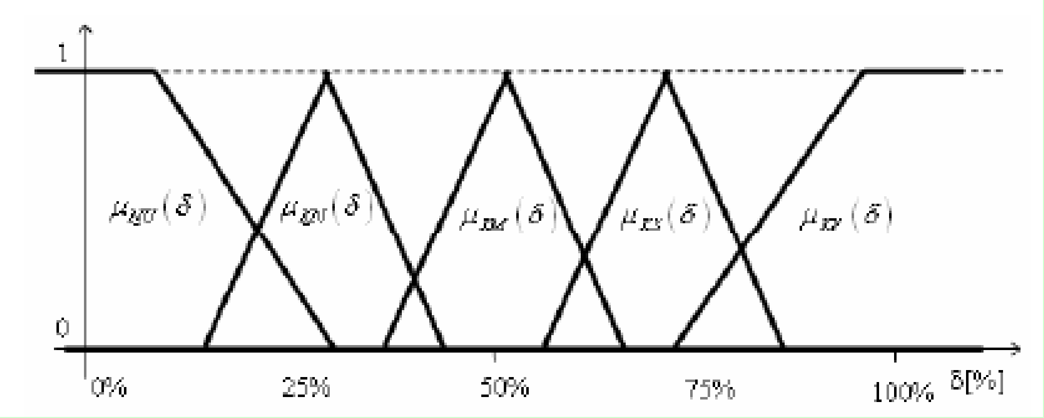


- Lingvistické termy

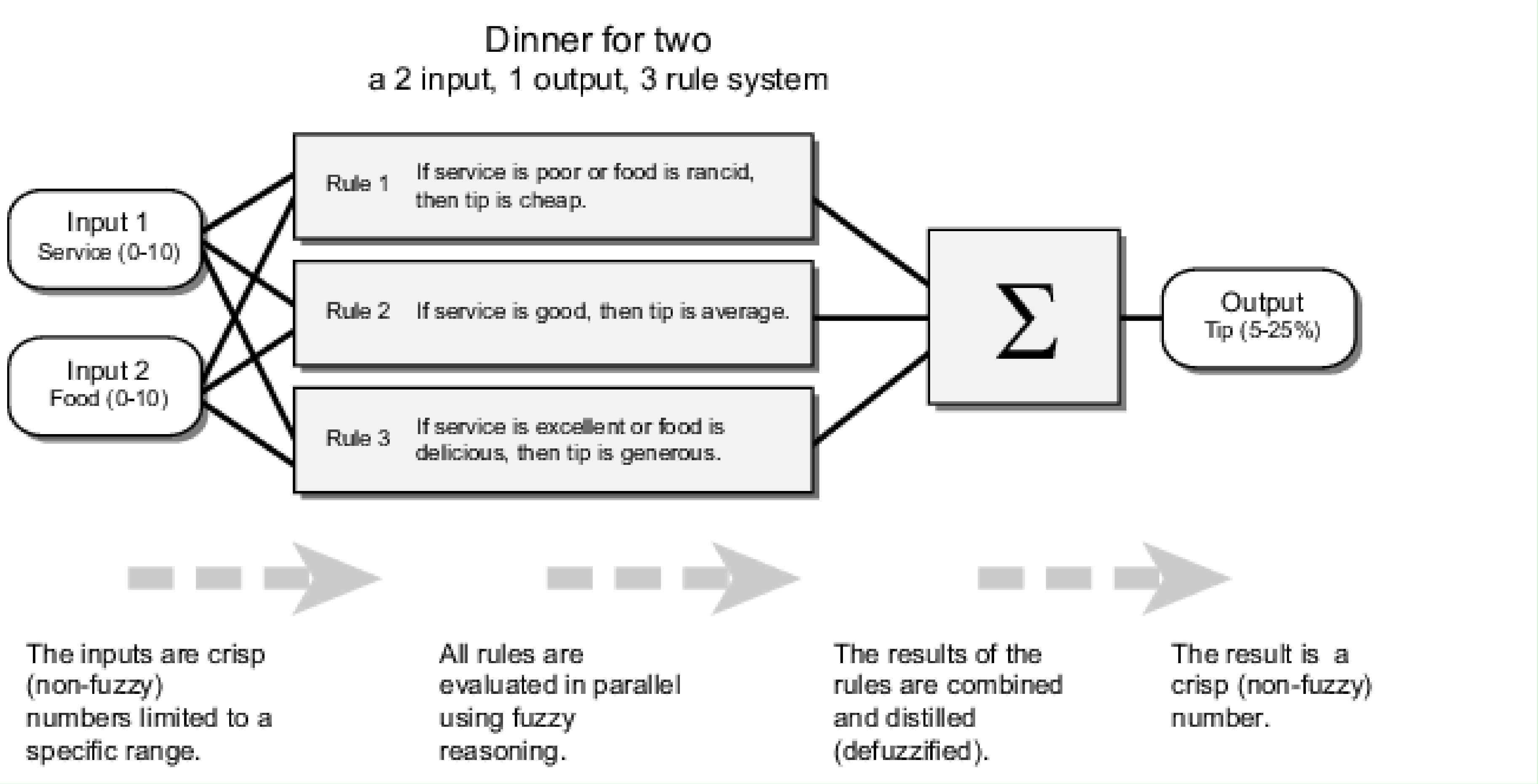
Význam	označení
Hodnota velká záporná	ZV
Hodnota střední záporná	ZS
Hodnota malá záporná	ZM
Hodnota záporná blízká nule	ZN
Hodnota nulová	NU
Hodnota kladná blízká nule	KN
Hodnota malá kladná	KM
Hodnota střední kladná	KS
Hodnota velká kladná	KV

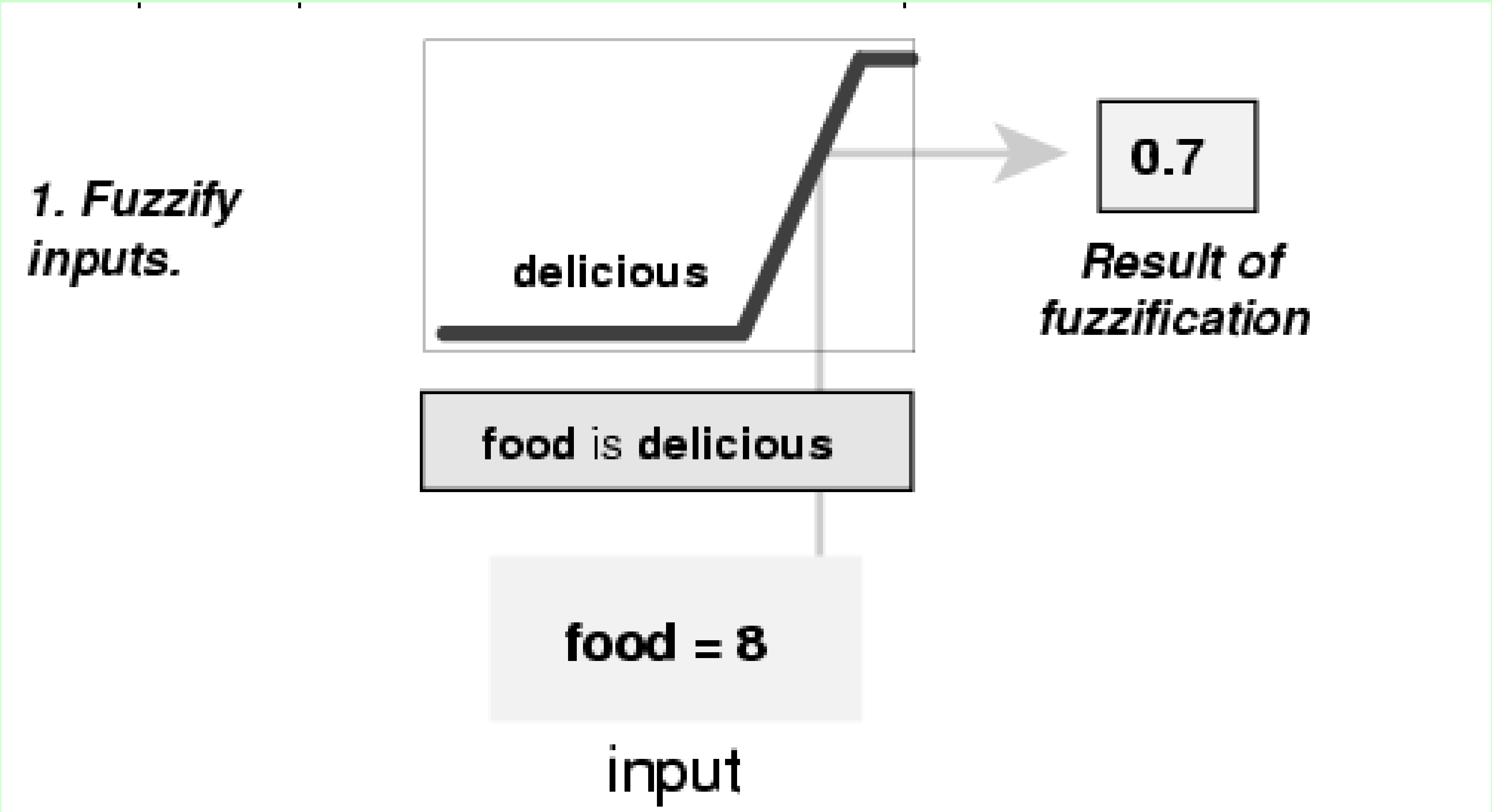
- Příklad

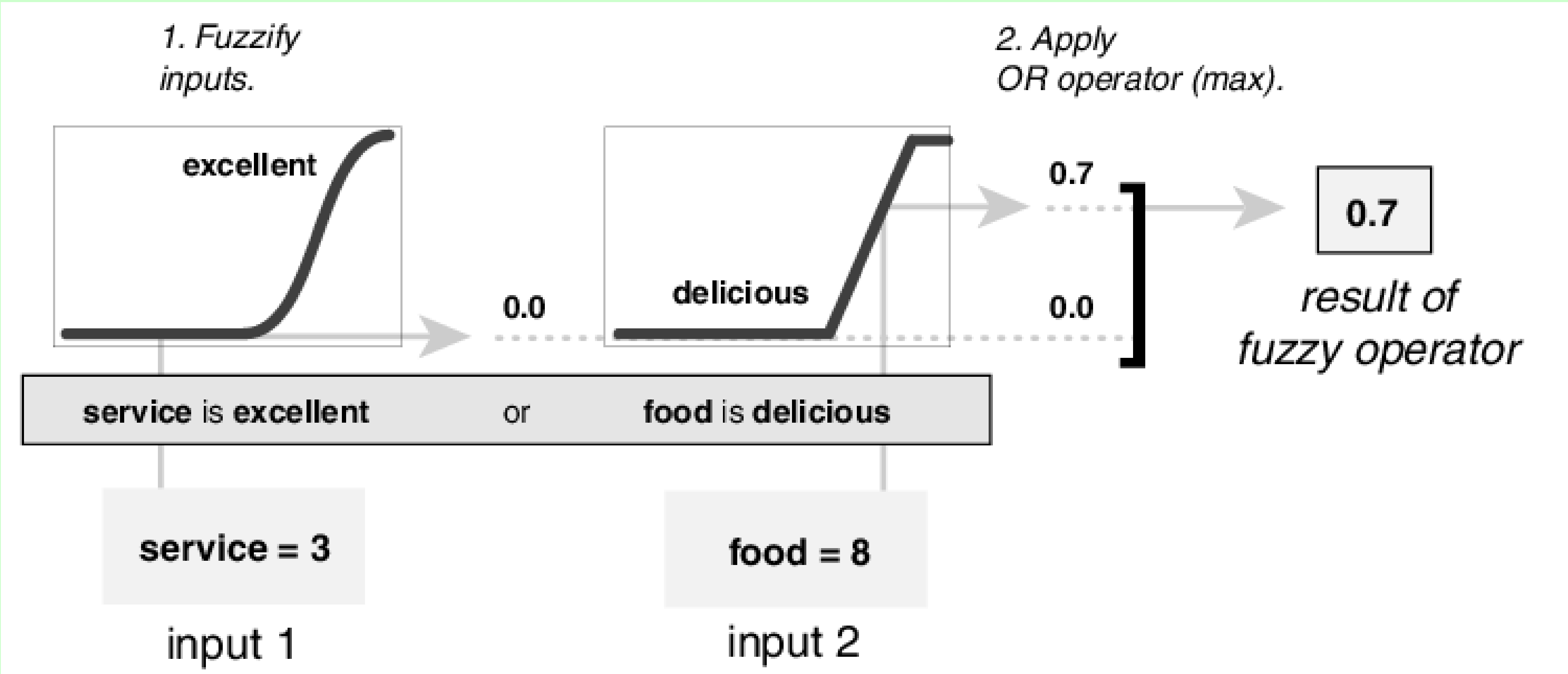
Lingvistická proměnná	*Označení lingvistické hodnoty - termy*
Úhel	záporný, nulový, kladný
Vzdálenost	nulová, blízká, střední, veliká, obrovská
Otevření ventilu	NU, KN, KM, KS, KV
Tepelný výkon	ZV, ZS, NU, KS, KV
Teplota	ZV, ZS, ZM, NU, KM, KS, KV
Regulační odchylka	ZV, ZS, ZM, ZN, NU, KN, KM, KS, KV
Přírůstek regulační odchylky	záporný (Z), kladný (K)



Pravidla IF-THEN, příklad výše spropitného

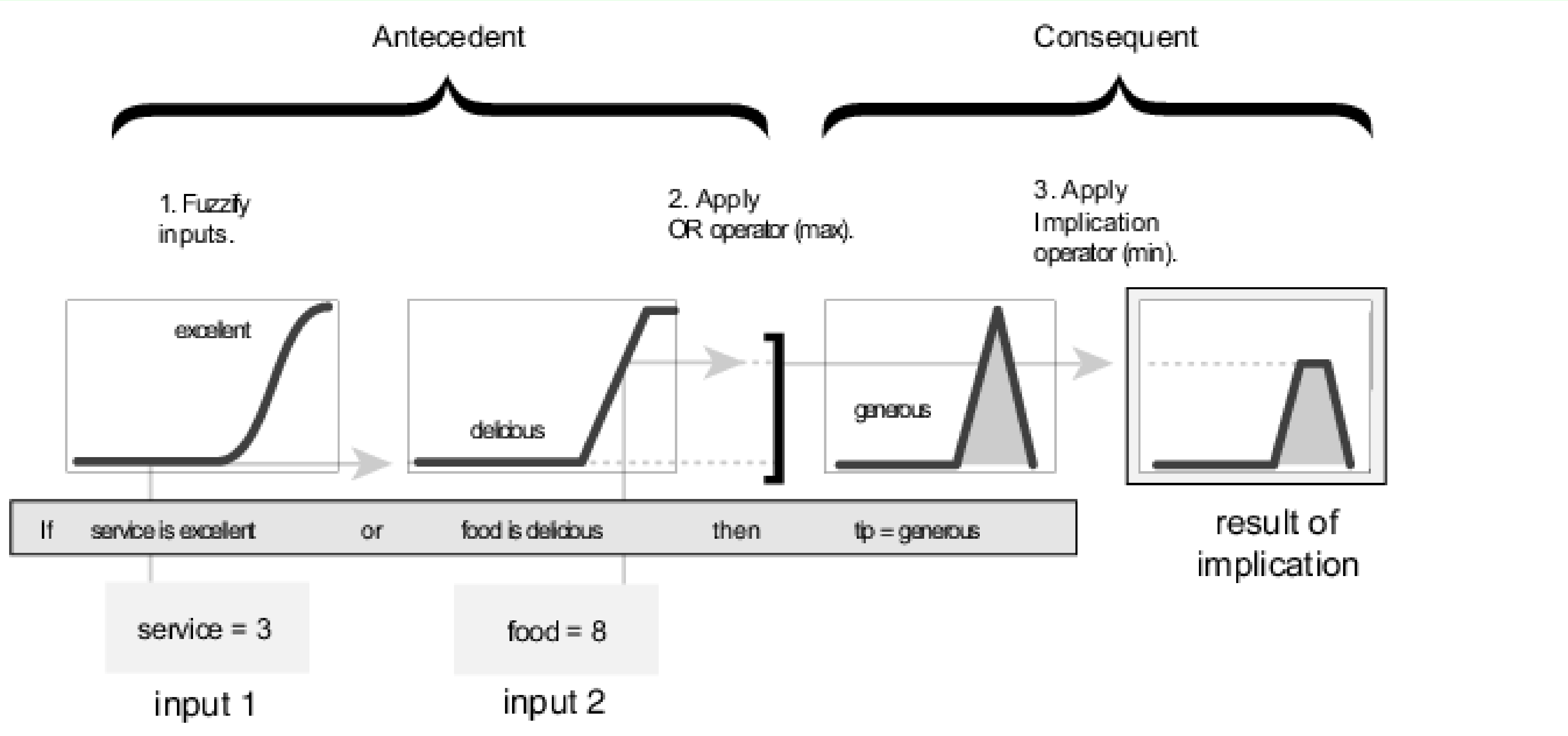


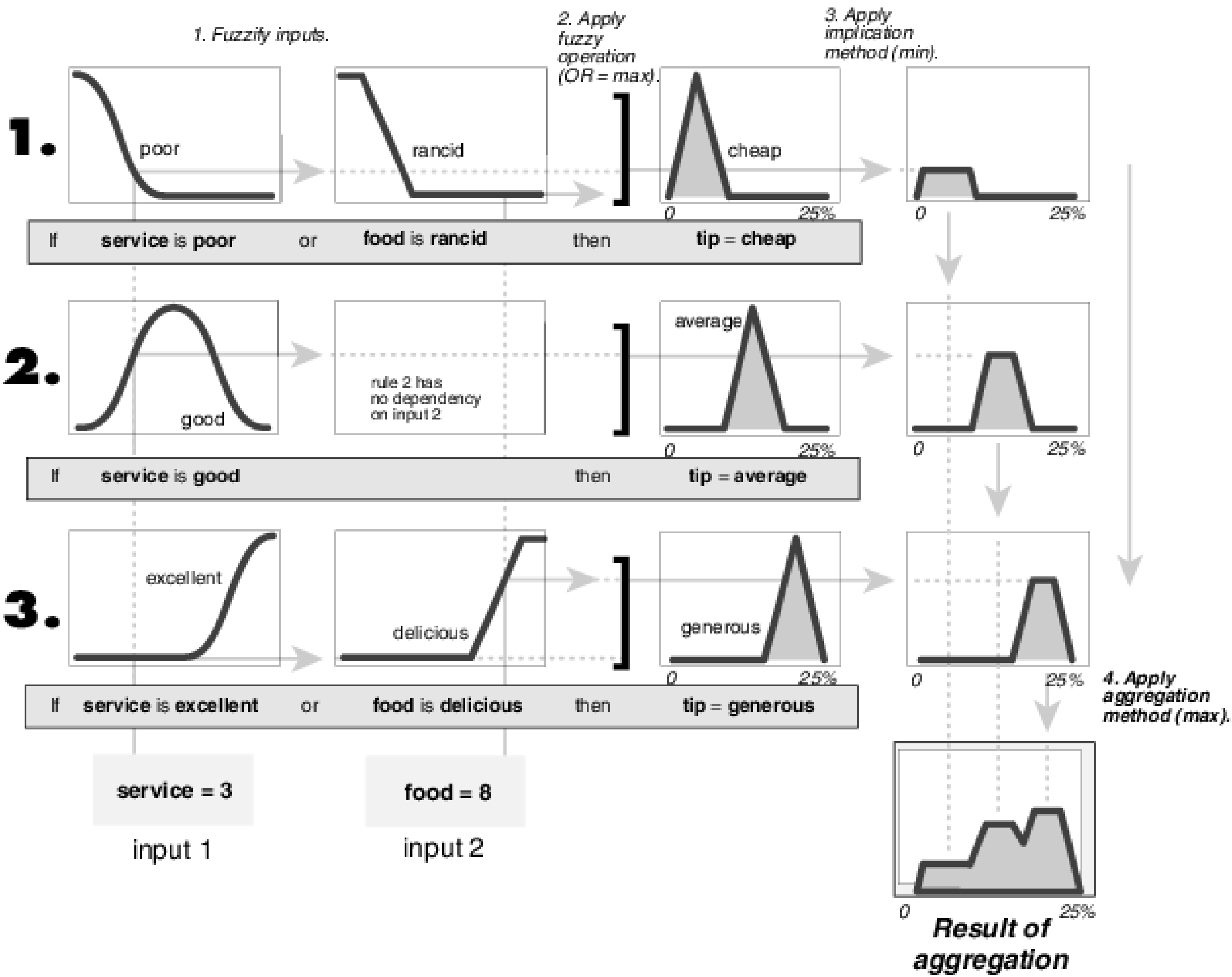

1. Fuzzify inputs.
delicious
0.7
Result of fuzzification
food is delicious
food = 8
input

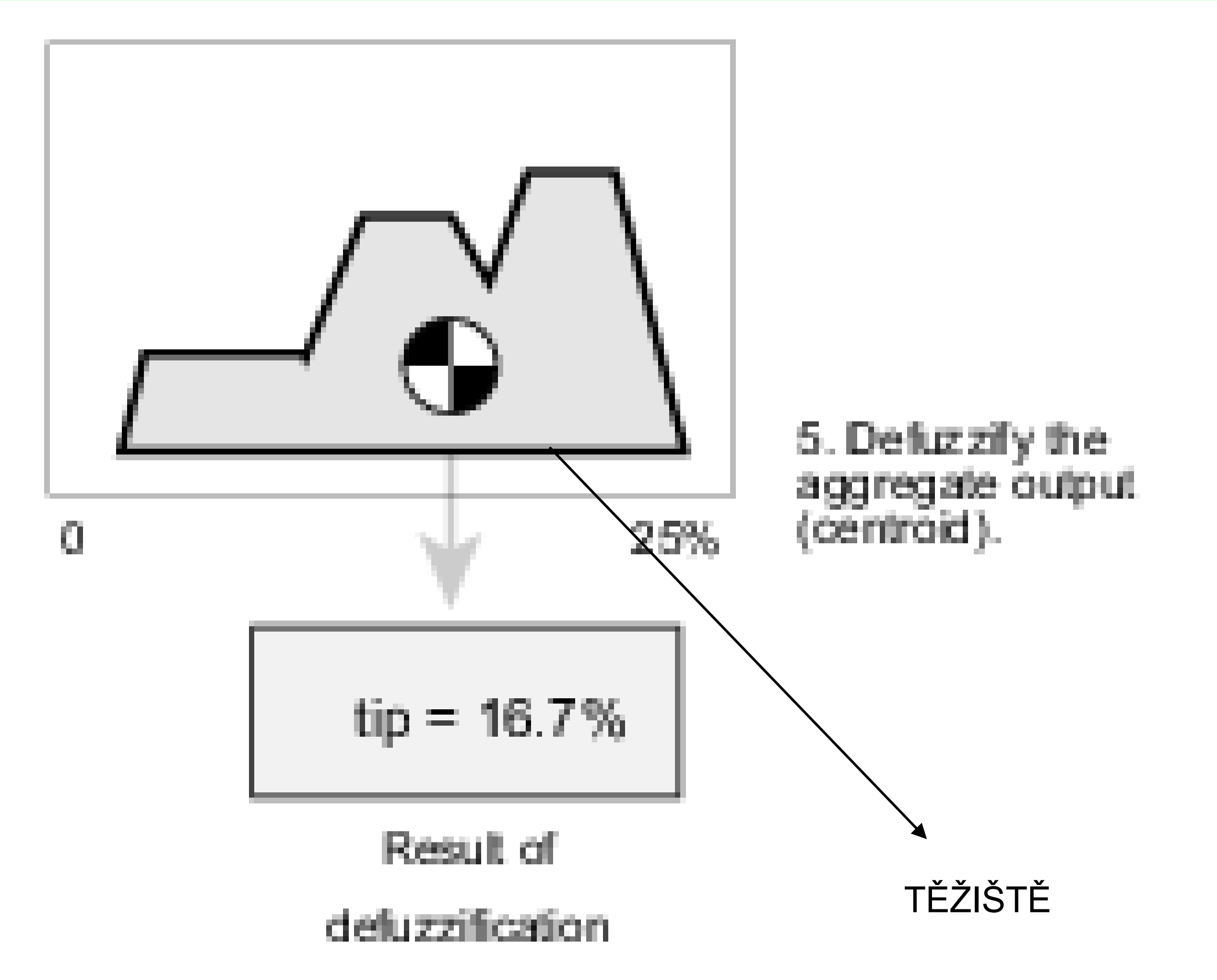

1. Fuzzify inputs.
2. Apply OR operator (max).
excellent
0.0
delicious
0.7
0.0
0.7
result of fuzzy operator
service is excellent
or
food is delicious
service = 3
food = 8
input 1
input 2

PŘEDPOKLAD, VSTUPNÍ INFORMACE, PŘÍČINA

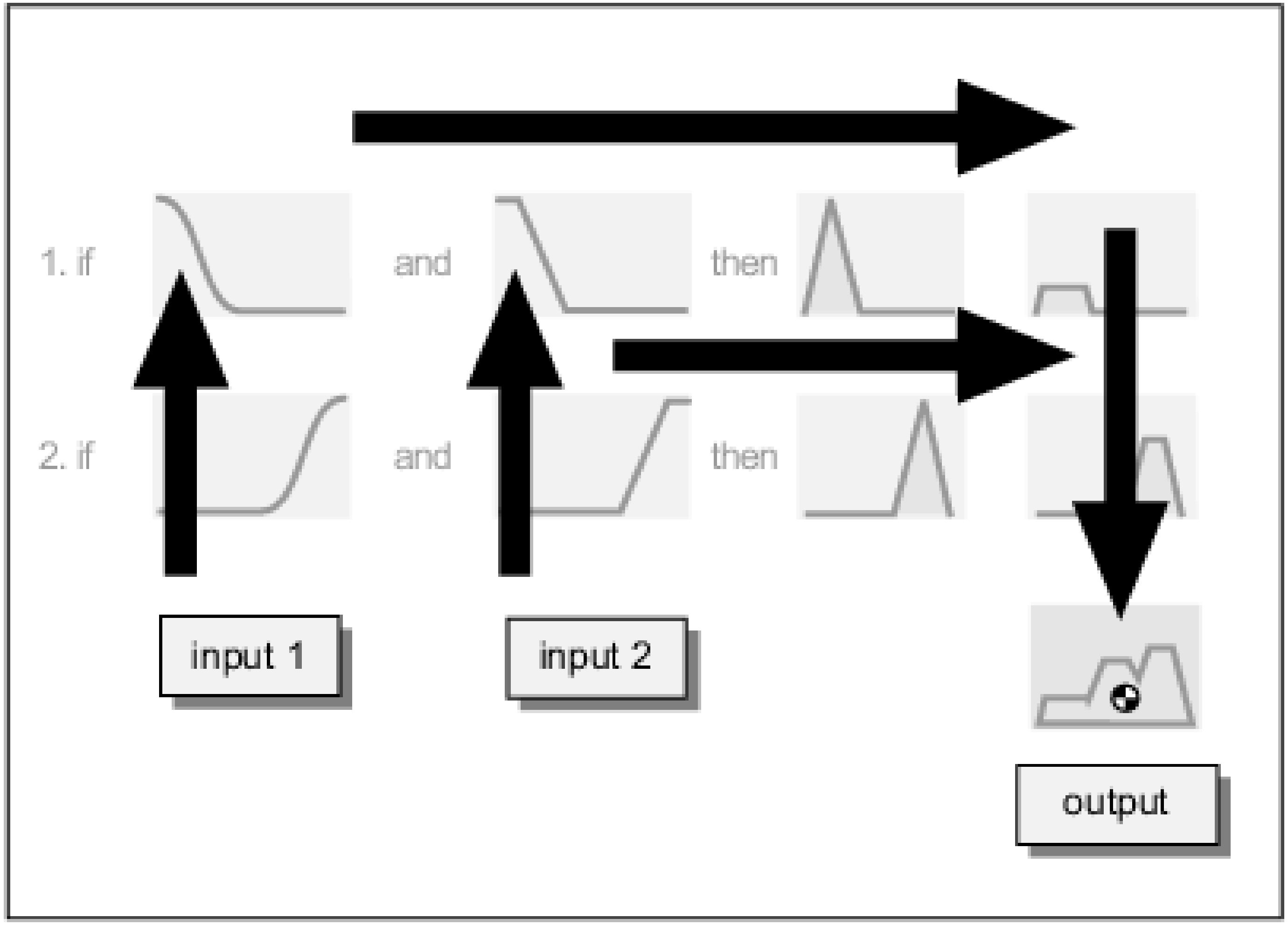
ZÁVĚR, DŮSLEDEK



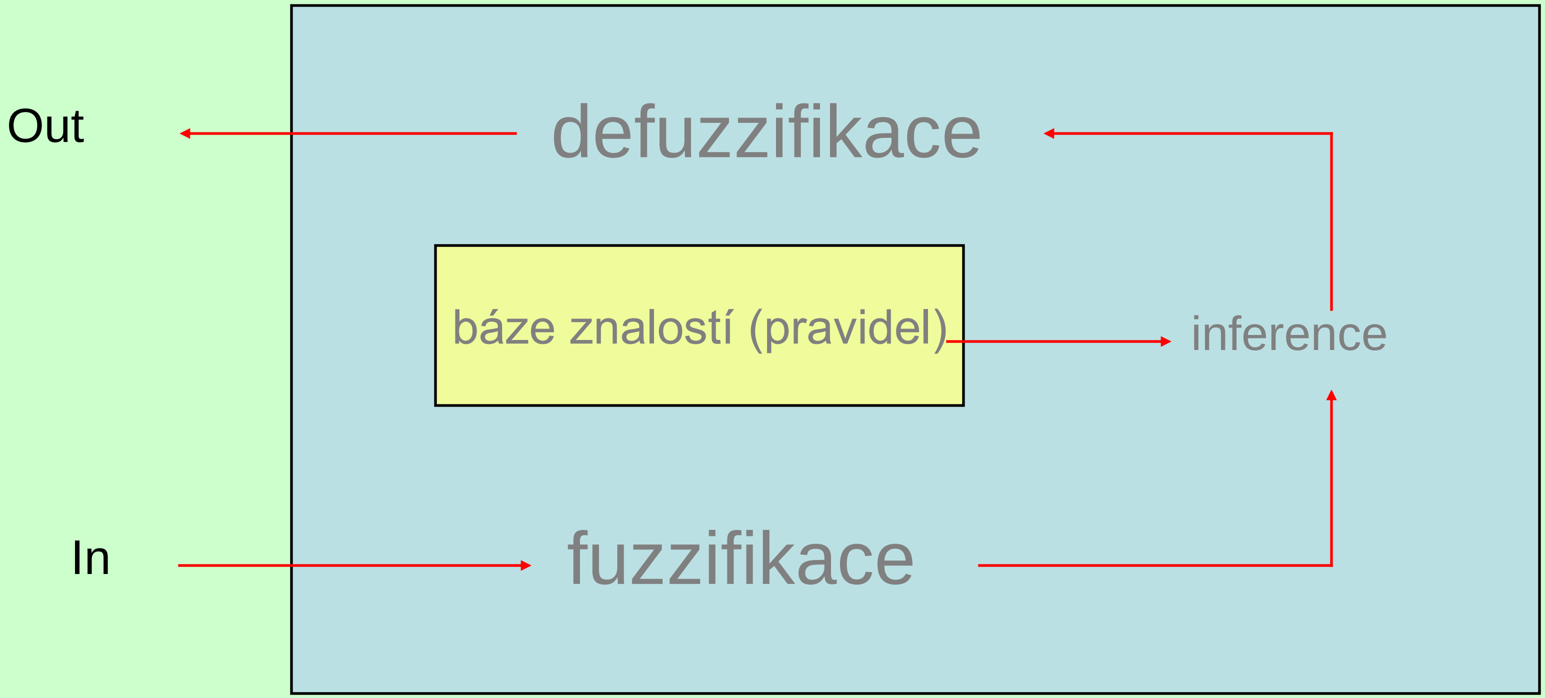

1. Fuzzify inputs.
2. Apply fuzzy operation (OR = max).
3. Apply implication method (min).
1.
poor
rancid
cheap
0
25%
If service is poor or food is rancid then tip = cheap
2.
good
rule 2 has no dependency on input 2
average
If service is good then tip = average
3.
excellent
delicious
generous
If service is excellent or food is delicious then tip = generous
4. Apply aggregation method (max).
service = 3
input 1
food = 8
input 2
Result of aggregation


0
25%
tip = 16.7%
Result of
defuzzification
5. Defuzzify the
aggregate output
(centroid).
TĚŽIŠTĚ

Interpreting the fuzzy inference diagram



Fuzzy systém



Odvozování - inference

- Inferenční pravidla
- **JESTLIŽE** *platí podmínka,* **PAK** *důsledek*
- Pravidla pro dvě fuzzy veličiny = dvourozměrná závislost:
  - regulační odchylka *e*
  - změna regulační odchylky delta *e*
- Cíl: změna akční veličiny delta *u*

Vstupní, výstupní veličiny

- Regulační odchylka *e*:
  - 5 lingvistických hodnot-termů (ZV=velká záporná, ZS=střední záporná, NU=nulová, KS=střední kladná,KV=velká kladná)
- Změna regulační odchylky delta *e*
  - 3 lingvistické hodnoty-termy (Z=záporná, NU=nulová, K=kladná)
- Změna akční veličiny delta *u*
  - 5 lingvistických hodnot-termů (ZV, ZS, NU, KS, KV)

Báze pravidel

- Počet pravidel: platí, že $P=n\text{x}m$, kde m a n je počet termů fuzzy množin vstupních veličin (5x3=15)

$\dot{e}$ \ e	ZV	ZS	NU	KS	KV
Z	**ZV**	**ZV**	**ZS**	**NU**	**KS**
NU	**ZV**	**ZS**	**NU**	**KS**	**KV**
K	**ZS**	**NU**	**KS**	**KV**	**KV**

Fuzzy vs. klasický přístup k řízení

- Pravidlově definovaný přístup:
  IF X AND Y THEN Z
- Fuzzy model - empirický vs. matematické modelování systému
  – spoléhá na zkušenost operátora, nikoli na technický popis systému

- Příklad: vstupy jako
  "SP =500C", "T <1000C", "210C <TEMP <220C"
  nahrazuje pravidlem:
  "IF (process is too cool) AND (process is getting colder)
  THEN (add heat to the process)"
  nebo
  "IF (process is too hot) AND (process is heating rapidly)
  THEN (cool the process quickly)".
  – Tvrzení velmi nepřesná, popisují přesně, čeho se má dosáhnout
    - Jako sprcha: …pokud je voda studená, člověk ví přesně co velmi rychle udělat…

Teorie možnosti

- **Possibility Theory**
- Rozšíření teorie fuzzy množin
- Motivovaná obtížnou reprezentací nepřesných či vágních informací v teorii pravděpodobnosti

L.A. Zadeh, “Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility,” Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, No. 1, 1978, pp. 3-28.

Základní úvahy

- Expertní systémy: znalostní báze obsahuje znalosti lidí, z nichž většina je nepřesných a kvalitativních
- Hranice mezi hypotézami je často definována vágně
- Vyjadřujeme-li takové znalosti, lidé-experti používají k popisu událostí a hypotéz pojmy jako „velice pravděpodobně“
  - “if the symptoms are . . ., then it is very likely that the disease is . . .”
- Zakódujeme-li tento typ expertních znalostí do pravděpodobností, obvykle ztratíme “fuzziness” (nepřesnost) a případ je reprezentován specifickými (a často nepřesnými) bodovými hodnotami

Teorie možnosti

- Snaha vyjádřit vágní pojmy precizně a přesně
- Nahrazuje binární pravděpodobnostní logiku ***vícehodnotovou logikou***
  - *Pravděpodobnostní teorie*: událost buď nastala nebo nenastala
  - *Teorie možnosti*: jsou „povoleny" stupně šedi
- Nepřesnosti lidských znalostí
  - Mohou se pouze přibližně shodovat s antecedenty pravidel
- Běžné (pravidlové) systémy se tomu obvykle vyhýbají: *partial matching* s dvouhodnotovou logikou nelze provést
- Teorie možnosti: přirozený a elegantní *partial matching* za použití kompoziční inference a interpolace

- Teorie pravděpodobnosti a možnosti se liší v ***základním přiřazení***, bez nějakého přímého vztahu – vysoká možnost nemusí implikovat vysokou pravděpodobnost a obráceně
  - Např.:, může-li Jan sníst 1 - 3 vajíčka k snídani, možnosti, že Jan může sníst 1, 2, 3 vajíčka mohou být 0,9 1,0 1,0
  - Ale, pravděpodobnost že Jan sní 1,2, či 3 vajíčka nějaké ráno může být 0,1 0,7 a 0,2
  - Nejsou žádná omezení na součet možností, zatímco součet všech pravděpodobností musí být 1

Teorie možnosti

- Jak propagovat míru důvěry?
- Teorie možnosti zkoumá především distribuce
- Possibilistické distribuce se přímo vztahují k fuzzy funkcím příslušnosti
- A: Fuzzy podmnožina U s $\mu_A : U \to \langle 0;1 \rangle$
- Tvrzení “*X* je *A*” přiřazuje ***possibilistickou distribuci*** Π_X takovou, že $\Pi_X = A$

  (lze psát “*X* je $A \to \Pi_X = A$”)
- ***Possibilistická distribuční funkce*** π_X

  je rovna funkci příslušnosti *A*: $\pi_X = \mu_A$

Příklad

Množina čísel U = (1,2,3,. . .)

A ... fuzzy množina malých čísel

subjektivní charakterizace A může být:

u	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(u)$	1	1	0,8	0,6	0,4	0,2

A lze napsat jako:

$A = 1/1 + 1/2 + 0{,}8/3 + 0{,}6/4 + 0{,}4/5 + 0{,}2/6$

„+“ označuje fuzzy sjednocení a výrazy 0,8/3 znamenají možnost 0,8 possibility že 3 je malé číslo

Tvrzení “X je malé číslo” přiřazuje X possibilistickou distribuci $\Pi_X = A$

Míra možnosti, $Poss\{ x \in A \}$, je možnost, že hodnota x náleží do A a je vyjádřena jako $Poss\ \{ x \in A \} = \max_{u \in A}[\pi_X(u)]$

(pro nekonečnou množinu $Poss\ \{ x \in A \} = \sup_{u \in A} [\pi_X(u)]$)

Literatura

- Mirko Navara, Petr Olšák: Základy fuzzy množin ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/fuzzy
- Mařík V. a kol.: Umělá inteligence I – III, Academia Praha
- Zelinka I. : Umělá inteligence – hrozba nebo naděje?
- Šmejkal L. – PLC a automatizace 2 – sekvenční logické systémy a základy fuzzy logiky