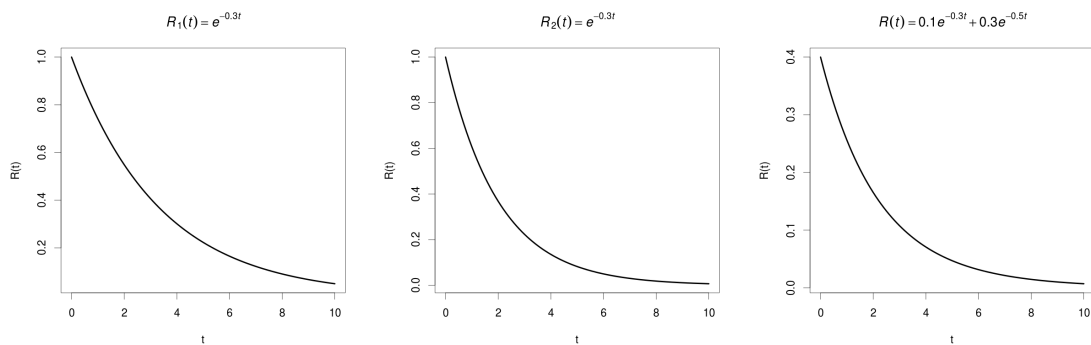


Statistika a spolehlivost v lékařství
2. cvičení, 1. dubna 2014

1 Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Využití: popis počátečního + normálního provozu



Obrázek 1: Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

$$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

- **Příklad 1** Nalezněte vztah pro výpočet $f(t)$

Řešení:

$$f(t) = -\frac{\partial R(t)}{\partial t} = \lambda_1 c_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

- **Příklad 2** Nalezněte vztah pro výpočet $\lambda(t)$.

Řešení: Vycházíme z definice intenzity

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

tedy

$$\lambda(t) = \frac{c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}}$$

- **Příklad 3** Jestliže platí $\int_0^\infty f(t) dt = 1$, pak platí $c_1 + c_2 = 1$. Dokažte.

Řešení:

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = [Q(t)]_0^{\infty} = [1 - R(t)]_0^{\infty} = \left[1 - c_1 e^{-\lambda_1 t} - c_2 e^{-\lambda_2 t}\right]_0^{\infty} = 1 - (1 - c_1 - c_2) = c_1 + c_2 = 1.$$

Lze také z $R(0) = 1$.

- **Příklad 4** Jaká je intenzita poruch v čase 0?

Řešení: Aplikujte výsledek příkladu 3 na výsledek příkladu 2 pro $\lambda(0)$:

$$\lambda(0) = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2$$

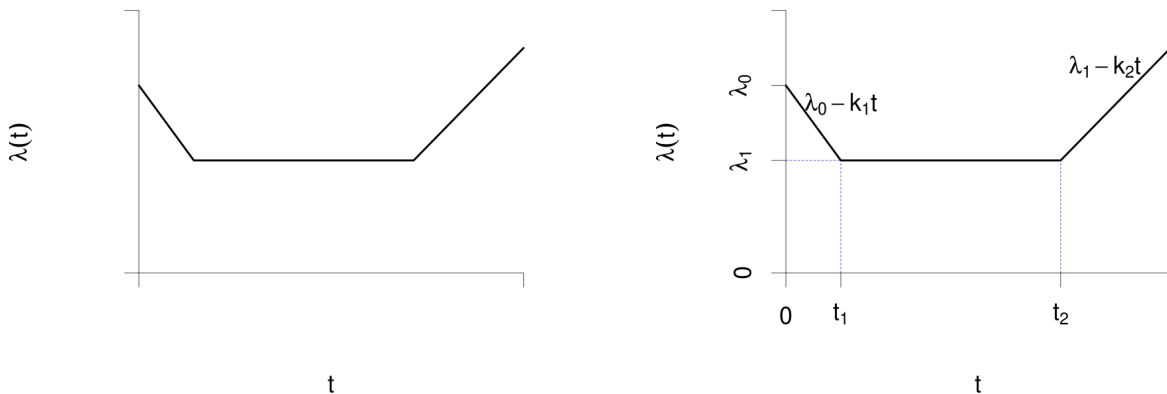
- **Příklad 5** Nalezněte vztah pro výpočet T_s .

Řešení:

$$T_s = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}$$

2 Rozdělení poruch s intenzitou po úsecích lineární

- **Příklad 6** V praxi se často používá tzv. „vanová“ charakteristika. Nalezněte její parametrizaci.



Obrázek 2: Obecný tvar „vanové křivky“ vlevo, vpravo její parametrizace.

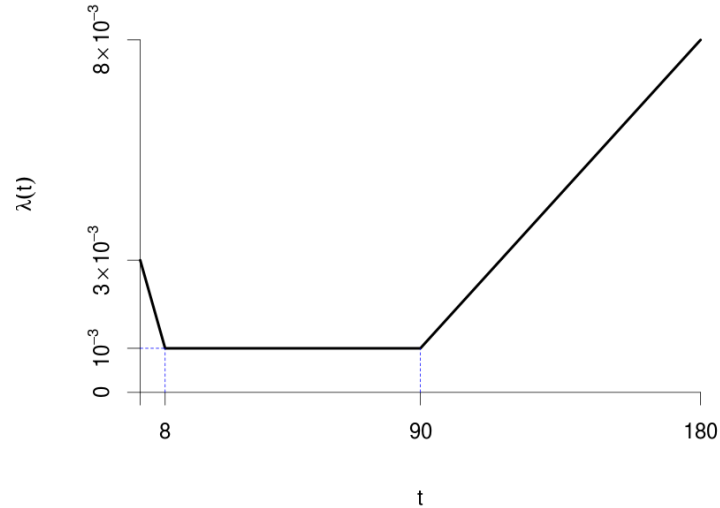
Řešení:

- 1) $t < t_1$: $\lambda(t) = \lambda_0 + k_1 t$ ($k_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{t_1}$)
- 2) $t_1 < t < t_2$: $\lambda(t) = \lambda_1$
- 3) $t > t_2$: $\lambda(t) = \lambda_1 + k_2(t - t_2)$

- **Příklad 7** Intenzita poruch daného systému je po částech lineární, viz obrázek, přičemž:

$$\begin{aligned}\lambda(0) &= 3 \cdot 10^{-3} \\ \lambda(50) &= 10^{-3} \\ \lambda(180) &= 8 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

Spočítejte pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$ v čase $t=150$.



Řešení: Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$ je dána

$$R(t) = R(0)e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}.$$

Integrál v exponentu můžeme spočítat jako součet tří integrálů (v dalším uvažujme $R(0) = 1$):

$$\int_0^{150} \lambda(\tau) d\tau = \int_0^8 \lambda(\tau) d\tau + \int_8^{90} \lambda(\tau) d\tau + \int_{90}^{150} \lambda(\tau) d\tau$$

a $R(t)$ je pak

$$e^{-\int_0^{150} \lambda(\tau) d\tau} = e^{-\int_0^8 \lambda(\tau) d\tau - \int_8^{90} \lambda(\tau) d\tau - \int_{90}^{150} \lambda(\tau) d\tau} = e^{-\int_0^8 \lambda(\tau) d\tau} e^{-\int_8^{90} \lambda(\tau) d\tau} e^{-\int_{90}^{150} \lambda(\tau) d\tau}$$

Integrál v exponentu odpovídá ploše pod grafem intenzity poruch $\lambda(t)$, proto můžeme jednoduše počítat $R(t) = e^{-S}$, kde S je právě plocha pod grafem. $\lambda(t)$.

Nejprve tedy spočítejme plochy tak, aby $R(t) = e^{-S_1} e^{-S_2} e^{-S_3}$:

$$S_1 = \frac{3 \cdot 10^{-3} + 10^{-3}}{2} (8 - 0) = 1,6 \cdot 10^{-2} \quad \left[\frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} (x_1 - x_0) \right]$$

$$S_2 = 10^{-3} (90 - 8) = 8,2 \cdot 10^{-2}$$

Pro výpočet S_3 musíme spočítat $\lambda(150)$. Interpolací:

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \frac{\lambda(t_1) - \lambda(t_0)}{t_1 - t_0} (t - t_0)$$

dostaneme

$$\lambda(150) = \frac{\lambda(180) - \lambda(90)}{180 - 90}(150 - 90) = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{90} 60 \approx 5,66 \cdot 10^{-3},$$

potom

$$S_3 = \frac{10^{-3} + 4,66 \cdot 10^{-3}}{2}(150 - 90) \approx 0,2$$

Konečně

$$R(t) = e^{-1,6 \cdot 10^{-2}} e^{-8,2 \cdot 10^{-2}} e^{-0,2} \approx 0,742.$$

- **Příklad 8** Pro systém se stejnou intenzitou poruch jako v předchozím příkladu určete čas τ , pro který $R(\tau) = 0,6$.

Řešení: Z předchozího příkladu víme, že $R(90) = e^{-S_1} e^{-S_2} = 0,907$. Proto bude τ pro $R(\tau) = 0,6$ určitě větší než 90 a pro výpočet budeme vycházet ze vztahu pro třetí interval $t \in (90; \infty)$. Nejprve nalezneme parametrický tvar polopřímky popisující intenzitu poruch pro $t > 90$: ve tvaru $\lambda(t) = \lambda_0 + kt$. Pro zjednodušení uvažujme substituci $\tau = t - 90$, pak

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \lambda(90) = 10^{-3} \\ k &= \frac{\lambda(t_1) - \lambda(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0) = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{180 - 90} = 7,7 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

Ze vztahů pro pp. bezporuchového provozu

$$R(90 + \tau_2) = R(90) e^{-\int_0^{\tau_2} 10^{-3} + 7,7 \cdot 10^{-5} t dt} = R(90) e^{-(10^{-3} \tau_2 + 3,8 \cdot 10^{-5} \tau_2^2)} = 0,6$$

z toho

$$e^{-(10^{-3} \tau_2) + 3,8 \cdot 10^{-5} \tau_2^2} = \frac{0,6}{R(90)} = \frac{0,6}{0,907}$$

po zlogaritmování

$$\begin{aligned}3,8 \cdot 10^{-5} \tau_2^2 + 10^{-3} \tau_2 &= 0,4165 \\ 3,8 \cdot 10^{-5} \tau_2^2 + 10^{-3} \tau_2 - 0,4165 &= 0 \\ \tau_2 &= \frac{-10^{-3} \pm \sqrt{10^{-6} - 4 \cdot 3,88 \cdot 10^{-5} \cdot (-0,4165)}}{2 \cdot 3,88 \cdot 10^{-5}} = 91,43s \\ \tau &= 90 + \tau_2 = 181,43s\end{aligned}$$

Pozn.: Pozor! Kvadratická rovnice má obecně dvě řešení. Protože jsme počítali s funkcí λ začínající v čase $t = 90$, je druhé řešení záporné \Rightarrow bereme kladné řešení. Pokud bychom ale počítali s funkcí λ vyjádřenou vzhledem k počátečnímu času $t = 0$, vyjdou obě řešení kladná, ale druhé řešení bude $\tau < 90$. Protože víme, že musí platit $\tau > 90$, bereme za výsledek větší z obou hodnot.

Pozn.: kvadratická rovnice při alternativním výpočtu – integrál v intervalu $\langle 90; \tau \rangle$:
 $3,8 \cdot 10^{-5} \tau^2 - 6 \cdot 10^{-3} \tau - 0,188 = 0$

3 Spolehlivost soustav

Předpoklad : každý prvek i každá soustava se nacházejí vždy v jednom ze stavů : **bezporuchovém stavu** nebo **ve stavu poruchy**.

- **Příklad 9 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sériová soustava)** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy, $R = ?$ Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p , prvky jsou stejné.

Řešení:

$$q = 1 - p,$$

$$R = P(X_1 \cap X_2) = P(X_1 | X_2) \cdot P(X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2) = p^2,$$

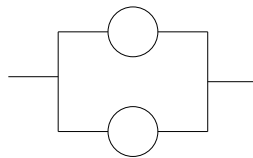
$$Q = 1 - R = P(\overline{X_1} \cup \overline{X_2}) = P(\overline{X_1}) + P(\overline{X_2}) - P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2}) = 2(1 - p) - (1 - p)^2 = 1 - p^2.$$

obecné vztahy R, Q , pro n prvků :

$$R = p^n$$

$$Q = 1 - p^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (1 - p)^i$$

- **Příklad 10 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - paralelní soustava)** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p , prvky jsou stejné.



Řešení:

$$R = P(X_1 \cup X_2) = 1 - Q = P(X_1) + P(X_2) - P(X_1 \cdot X_2) = 2p - p^2,$$

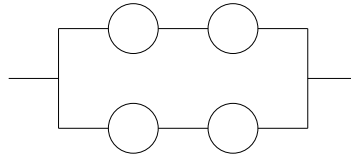
$$Q = P(\overline{X_1} \cap \overline{X_2}) = (1 - p)(1 - p) = 1 - 2p + p^2.$$

obecné vztahy R, Q , pro n prvků :

$$R = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} p^i$$

$$Q = (1-p)^n$$

- **Příklad 11 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sérioparalelní soustava)** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p , všechny prvky jsou stejné.

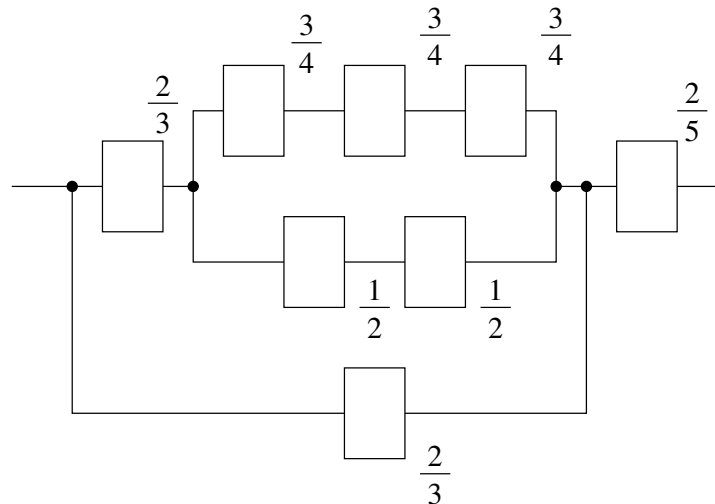


Řešení:

$$R = 2p^2 - p^4,$$

$$Q = (1-p^2)(1-p^2) = 1 - 2p^2 + p^4.$$

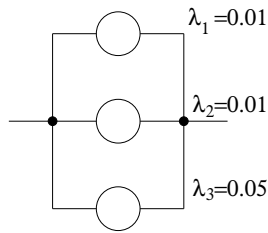
- **Příklad 12 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sérioparalelní)** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy.



Řešení:

$$R = \left\{ 1 - \left[1 - \left(1 - \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] \right) \cdot \frac{2}{3} \right] \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \right) \right\} \cdot \frac{2}{5} = \frac{913}{2888} = 0,317.$$

- **Příklad 13 (Paralelní soustava se třemi prvky)** Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy na Obr. 3 složené z prvků se známými intenzitami poruch. (Pravděpodobnost počítejte v čase $t=50$.)



Obrázek 3:

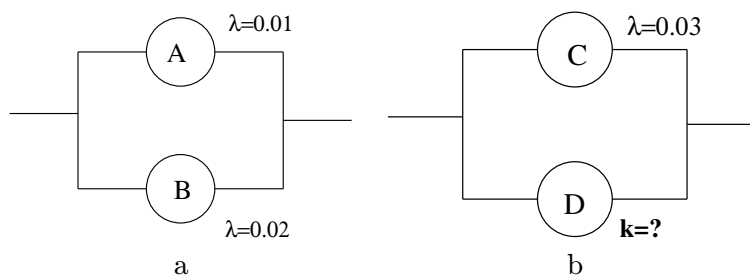
Řešení: Je nutné si uvědomit že pravděpodobnost bezporuchového provozu je funkce času – budeme hledat pravděpodobnost v konkrétním čase $t = 50$. Dále je nutné si ujasnit, jakému rozdělení pravděpodobnosti podléhají prvky soustavy. Jejich intenzity jsou zadány jako konstanty a proto se jedná o exponenciální rozdělení poruch. Pro jednotlivé prvky v čase $t=50$ platí:

$$\begin{aligned} R_1(50) &= e^{-\lambda_1 \cdot 50} = e^{-0,5} = 0,607, \\ R_2(50) &= R_1(50) = e^{-0,5} = 0,607, \\ R_3(50) &= e^{-\lambda_3 \cdot 50} = e^{-2,5} = 0,082. \end{aligned}$$

Pro soustavu potom bude platit

$$R(50) = 1 - [(1 - R_1(50))(1 - R_2(50))(1 - R_3(50))] = 1 - [0,393 \cdot 0,393 \cdot 0,918] = 0,858.$$

- **Příklad 14 (Paralelní soustava se třemi prvky)** Uvažujme obvody na obr.4. Prvky, jejichž poruchy podléhají exponenciálnímu rozdělení, jsou označeny parametrem λ . Spodní prvek na obr.4 vykazuje poruchy podléhající Rayleighovu rozdělení s parametrem k . Určete tento parametr tak, aby pravděpodobnost bezporuchového provozu obou soustav byla v čase $t = 10$ s stejná.



Obrázek 4:

Řešení: Nejprve si spočítáme pravděpodobnost bezporuchového provozu jednotlivých prvků:

$$\begin{aligned} R_A(t) &= e^{-\lambda_A t} \rightarrow R_A(10) = e^{-0.01 \cdot 10} = 0.904 \\ R_B(t) &= e^{-\lambda_B t} \rightarrow R_B(10) = e^{-0.02 \cdot 10} = 0.818 \\ R_C(t) &= e^{-\lambda_C t} \rightarrow R_C(10) = e^{-0.03 \cdot 10} = 0.740 \\ R_D(t) &= e^{-\frac{kt^2}{2}} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu levé soustavy v čase $t = 10$ s je:

$$R_1(10) = R_A(10) + R_B(10) - R_A(10)R_B(10) = 0.904 + 0.818 - 0.904 \cdot 0.818 = 0.983$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu pravé soustavy v čase $t = 10$ s je:

$$R_2(10) = R_C(10) + R_D(10) - R_C(10)R_D(10) = 0.740 + R_D(10) - 0.740R_D(10)$$

Určíme $R_D(10)$:

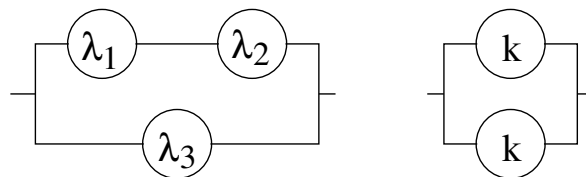
$$R_D(10) = \frac{R_2(10) - R_C(10)}{1 - R_C(10)} = \frac{0.983 - 0.740}{1 - 0.740} = 0.934.$$

Teď můžeme vypočítat hodnotu k :

$$R_D(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}} \rightarrow k = \frac{-2 \ln R_D(t)}{t^2} = \frac{-2 \ln 0.934}{10^2} = 0.00136.$$

- **Příklad 15** První obvod na obrázku je složen z prvků, jejichž poruchy podléhají exponenciálnímu rozdělení poruch s parametry $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.02$, $\lambda_3 = 0.03$. Druhý obvod je složen ze dvou prvků, jejichž poruchy lze popsat Rayleighovým rozdělením s parametrem k .

Určete k tak, aby pravděpodobnost bezporuchového provozu obou soustav v čase $t = 10$ byla stejná.



Řešení: Nejprve určíte spolehlivost levého obvodu:

$$R_{left}(t) = R_1(t)R_2(t) + R_3(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)$$

a dosadíme

$$\begin{aligned} R_1(t) &= e^{-\lambda_1 t} \rightarrow R_1(10) = e^{0.01 \cdot 10} = 0.905 \\ R_2(t) &= e^{-\lambda_2 t} \rightarrow R_2(10) = e^{0.02 \cdot 10} = 0.818 \\ R_3(t) &= e^{-\lambda_3 t} \rightarrow R_3(10) = e^{0.03 \cdot 10} = 0.741 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost bezporuchového obvodu vlevo je v čase 10:

$$R_{left}(10) = 0.905 \cdot 0.818 + 0.741 - 0.905 \cdot 0.818 \cdot 0.741 = 0.932$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy vpravo (spolehlivost prvků označíme $R_k(t)$) je obecně:

$$R_{right}(t) = R_k(t) + R_k(t) - R_k^2(t) = 2R_k(t) - R_k^2(t)$$

a jelikož má platit $R_{left}(10) = R_{right}(10)$, tak

$$0.932 = 2R_k(10) - R_k^2(10)$$

Dostáváme tedy jednoduchou rovnici s neznámou proměnnou $R_k(10)$:

$$R_k^2(10) - 2R_k(10) + 0.932 = 0$$

která má dva kořeny: 0.739 a 1.26. Správné řešení je 0.739, neboť $R_k(10)$ je pravděpodobnost bezporuchového provozu, tj. číslo v intervalu $< 0, 1 >$. Tato pravděpodobnost je popsána Rayleighovým rozdělením, tedy $R_k(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}}$. Odtud:

$$0.739 = R_k(10)$$

$$0.739 = e^{-\frac{k10^2}{2}}$$

a tedy

$$k = \frac{-2 \ln 0.739}{10^2} = 0.00605.$$

Soustava m z n

Mějme soustavu s n prvky, přičemž alespoň m musí správně pracovat. Pokud jsou prvky shodné a nezávislé, pak lze spolehlivost soustavy popsat binomickým rozdělením.

Pravděpodobnost bezporuchového stavu právě m prvků z n je

$$f(m, n, p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

- **Příklad 16** Jaká je pravděpodobnost bezporuchového stavu nejméně m prvků z n ?

Řešení:

$$R = \sum_{k=m}^n f(k, n, p) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- **Příklad 17** Pro kterou soustavu platí, že $m = 1$?

Řešení: Paralelní soustava

- **Příklad 18** Pro kterou soustavu platí, že $m = n$?

Řešení: Sériová soustava

- **Příklad 19 (Ocelové lano - soustava m z n)** Ocelové lano má 4 vlákna, správná funkčnost je zajištěná pokud nejsou přetržena alespoň dvě vlákna. $n = 4$; $m = 2$; Pravděpodobnost nepřetržení jednoho vlákna je $p = 0.9$; $R = ?$

Řešení:

$$R = \binom{4}{2} 0,9^2 \cdot 0,1^2 + \binom{4}{3} 0,9^3 \cdot 0,1 + \binom{4}{4} 0,9^4 = 0,9963.$$