

A6M33SSL: Statistika a spolehlivost v lékařství

Teorie spolehlivosti

Přednáška 2

Vojta Vonásek
vonasek@labe.felk.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky

Opakování

Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$: je pravděpodobnost, že systém funguje v čase t .

Pravděpodobnost poruchy v časovém intervalu:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt,$$

kde $f(t)$ je hustota pravděpodobnosti poruch.

Intenzita poruch $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

- prvky mají různé $\lambda(t)$ a různé $f(t)$
- často používaná rozdělení: Exponenciální, Rayleighovo, Weibullovo, Log-normální, Poissonovo

Jak získat parametry spolehlivosti:

- Nejdůležitější jsou MTBF nebo $\lambda(t)$
- Datasheets, MIL-HDBK-217F, databáze výrobců
- Měření dat
 - Časy poruch t_i
 - Intenzity poruch v časovém intervalu $\lambda(t)$
 - Statistické zpracování
- Různá rozdělení pro různé typy poruch/období používání

Exponenciální rozdělení

- Konstantní intenzita poruch: $\lambda(t) = \lambda_0$
- Často používané, dobře se s ním počítá

Základní vlastnosti:

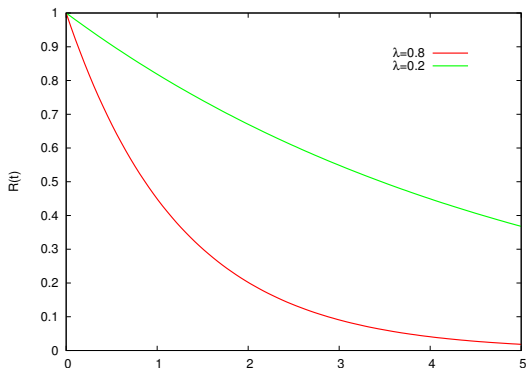
$$\lambda(t) = \lambda_0$$

$$R(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$D = \frac{1}{\lambda_0^2}$$



Exponenciální rozdělení

- Konstantní intenzita poruch: $\lambda(t) = \lambda_0$
- Často používané, dobře se s ním počítá

Základní vlastnosti:

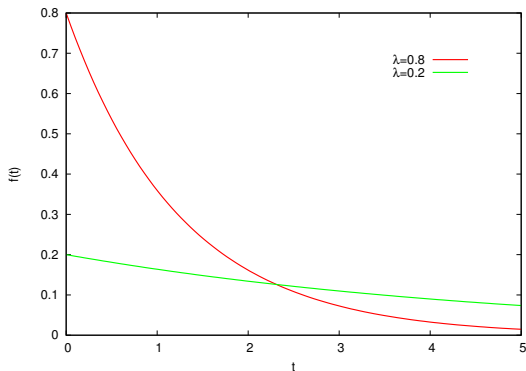
$$\lambda(t) = \lambda_0$$

$$R(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$D = \frac{1}{\lambda_0^2}$$



Exponenciální rozdělení

- Parametr rozdělení λ_0 je určen střední hodnotou
- Jednoduchý odhad z dat
- Používá se pro modelování života elektronických komponent, nebo prvků nejsou mechanicky namáhané
- Je vhodné pro komponenty u nichž lze předpokládat, že pokud se nepoužívají, tak jsou stejně dobré, jako nové prvky (např. pojistky, žárovky)
- Vhodné pro aproximaci chování systémů v období normálního provozu
- Vhodný pro poruchy SW
- Nevhodné pro použití v období zahořování nebo dožívání systému

Rayleighovo rozdělení

Základní vlastnosti:

$$\lambda(t) = kt \quad k > 0$$

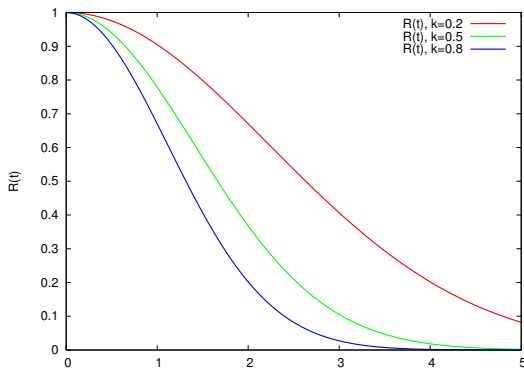
$$R(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$f(t) = kte^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

$$D = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{k}$$

- Odvoďte $R(t)$ a $f(t)$ z $\lambda(t)$



Rayleighovo rozdělení

Základní vlastnosti:

$$\lambda(t) = kt \quad k > 0$$

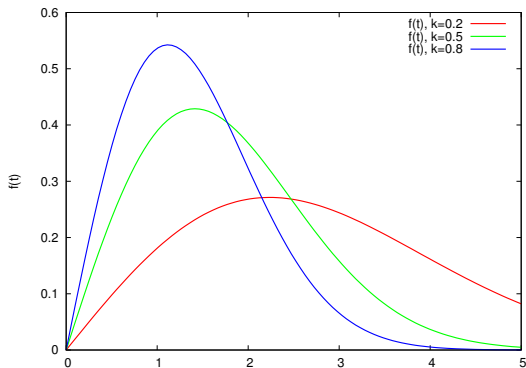
$$R(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$f(t) = kte^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

$$D = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{k}$$

- Odvoďte $R(t)$ a $f(t)$ z $\lambda(t)$



Rayleighovo rozdělení

- Rostoucí intenzita poruch, postupná degradace materiálu
- Vhodné pro modelování období dožívání

Příklad

Výrobce pneumatik vyvinul nový materiál, který zlepšuje valivý odpor, ale také zvyšuje opotřebení. Měření ukázala, že intenzita poruch roste lineárně s čase a lze ji popsat

$$\lambda(t) = 0.5 \cdot 10^{-8}t,$$

kde t je v hodinách. Jaká je pravděpodobnost poruchy pneumatiky po 1 roce používání?

$$R(1rok) = e^{\frac{-kt^2}{2}} = e^{\frac{-0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 8760^2}{2}} = 0.825$$

Rayleighovo rozdělení

- Rostoucí intenzita poruch, postupná degradace materiálu
- Vhodné pro modelování období dožívání

Příklad

Výrobce pneumatik vyvinul nový materiál, který zlepšuje valivý odpor, ale také zvyšuje opotřebení. Měření ukázala, že intenzita poruch roste lineárně s čase a lze ji popsat

$$\lambda(t) = 0.5 \cdot 10^{-8}t,$$

kde t je v hodinách. Jaká je pravděpodobnost poruchy pneumatiky po 1 roce používání?

$$R(1rok) = e^{-\frac{kt^2}{2}} = e^{-\frac{0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 8760^2}{2}} = 0.825$$

Jaká je střední doba bezporuchového provozu?

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} = \sqrt{\frac{\pi}{20.5 \cdot 10^{-8}}} = 17550 \text{ (hodin)}$$

Weibullovo rozdělení

Základní vlastnosti:

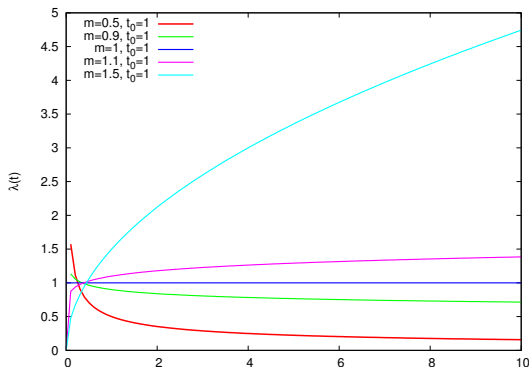
$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \quad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right) \right]$$



Weibullovo rozdělení

Základní vlastnosti:

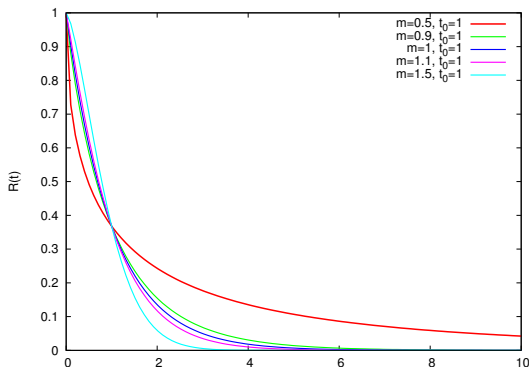
$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \quad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right) \right]$$



Weibullovo rozdělení

Základní vlastnosti:

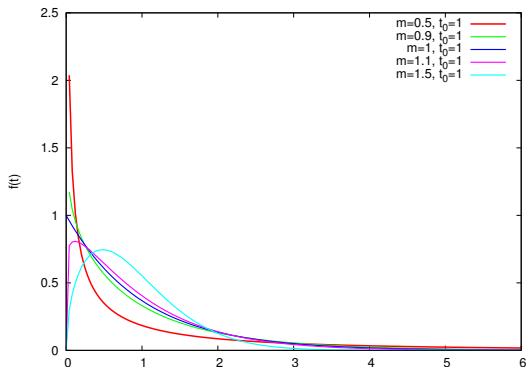
$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \quad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right) \right]$$



Weibullovo rozdělení

- Flexibilní, lze modelovat různé typy intenzit
- Vhodné pro modelování období dožití
- Poruchy ložisek, elektronek
- Pokud $m = 1 \rightarrow$ Exponenciální rozdělení
- Pokud $m = 2 \rightarrow$ Rayleighovo rozdělení
- Existuje i tříparametrová forma Weibullova rozdělení

Příklad:

Součástka má poruchy dle Weibullova rozdělení s parametry $m = 2$ a $t_0 = 250$. Jaká je pravděpodobnost bezporuchového provozu v čase $t = 10$?

$$R(t) = e^{\frac{-t^m}{t_0}}$$

$$R(10) = e^{\frac{-10^2}{250}} = 0.67.$$

Kombinace rozdělení

- Základní rozdělení nejsou vždy vhodná pro modelování poruch
- Reálné prvky mají složitější průběh intenzit poruch
- Lze využít kombinací základních rozdělení

Kombinace dvou exponenciálních rozdělení:

$$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

- Vhodné pro modelování počátečního období života a normálního provozu

Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Předpokládejme pravděpodobnost bezporuchového provozu ve tvaru

$$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Jaká je hustota pravděpodobnosti poruch?

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

$$f(t) = c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

Musí platit $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$ a $R(0) = 1 = c_1 + c_2$.

Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Předpokládejme pravděpodobnost bezporuchového provozu ve tvaru

$$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

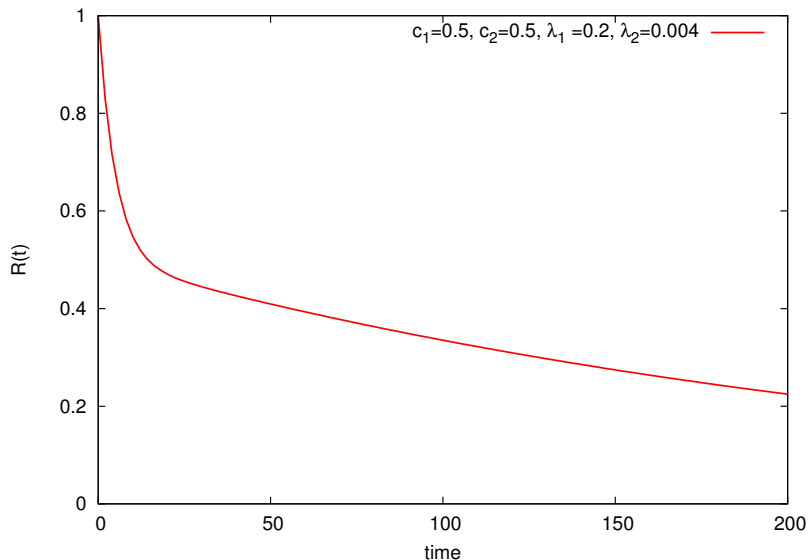
Jaká je střední doba bezporuchového provozu?

Lze využít vzorce:

$$\begin{aligned} T_s &= \int_0^{\infty} R(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \\ &= \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} \end{aligned}$$

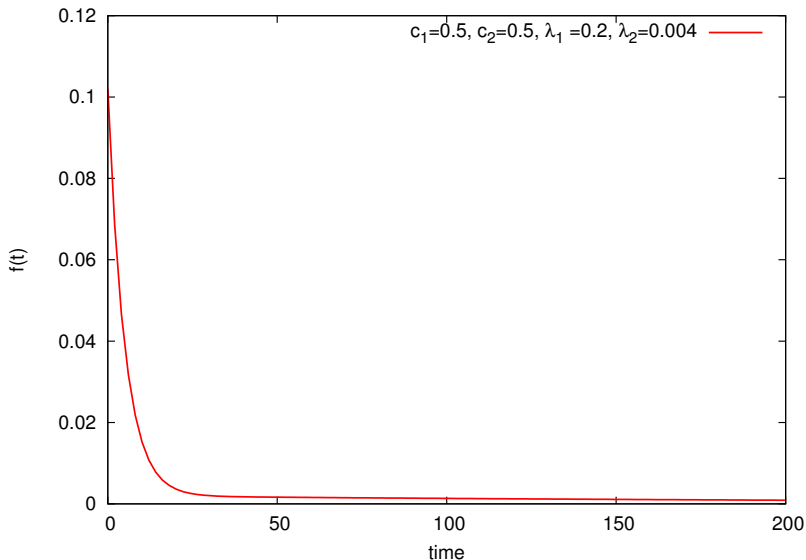
Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



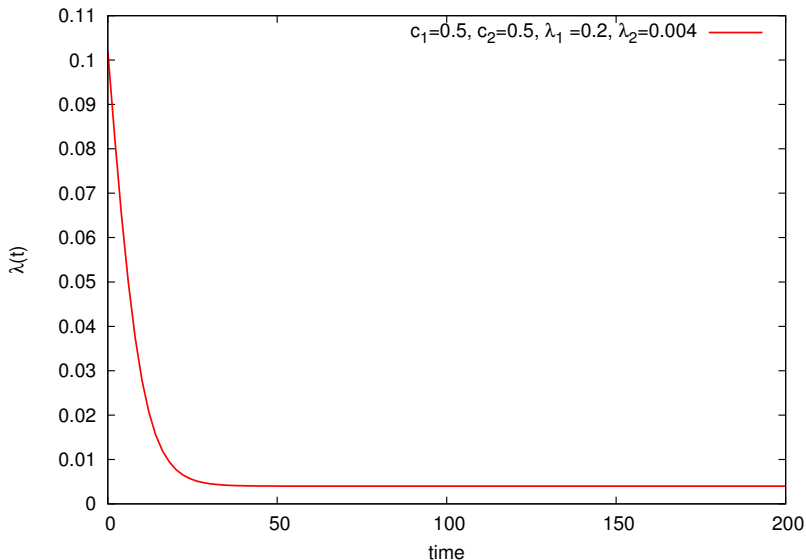
Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



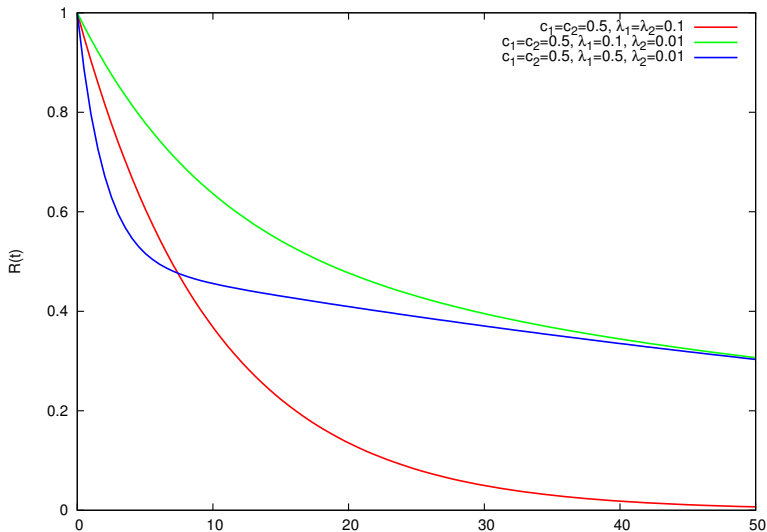
Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



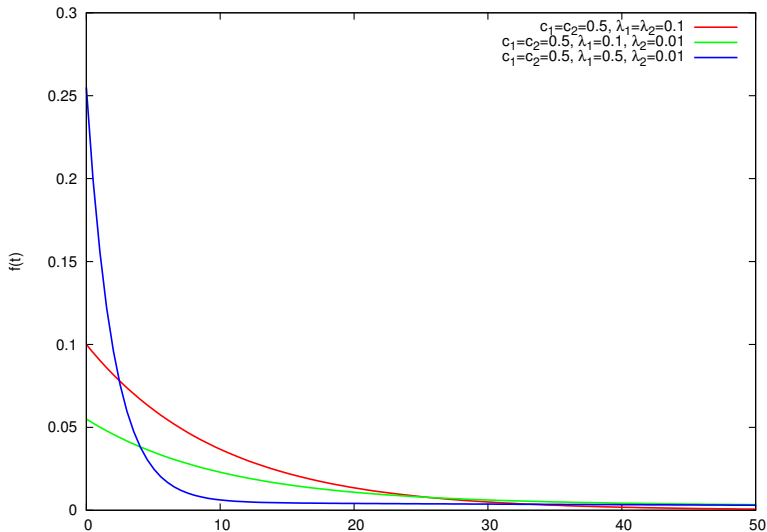
Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



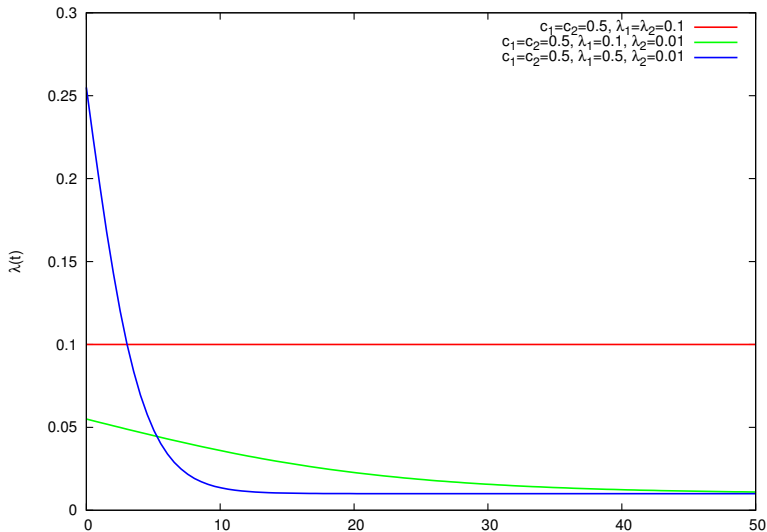
Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



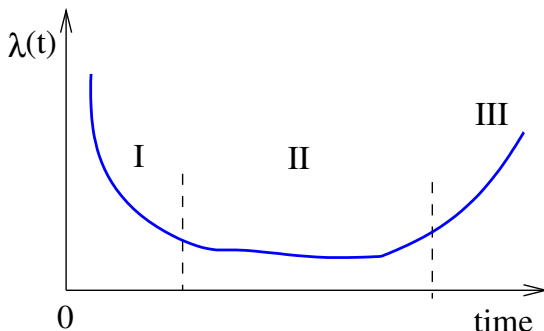
Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



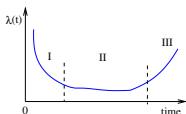
Intenzita poruch pro reálné prvky

- Reálné prvky většinou nemívají konstantní intenzitu poruch
- Průběhy $\lambda(t)$ se podobají vanové charakteristice (Bathtub curve)



- Oblast I: počáteční poruchovost
- Oblast II: normální provoz
- Oblast III: období dožití

Vanová charakteristika



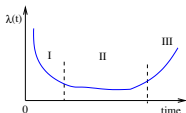
Oblast I: období počáteční poruchovosti

- Období relativně velké poruchovosti, ale ta rychle klesá
- Příčiny: chyby v konstrukci a výrobě
- Weibullovo rozdělení, kombinace exp. rozdělení
- Lze urychlit tzv. zahořováním

Zahořování

- Součástky jsou vystaveny zvýšenému namáhání (např. teplota)
- To urychlí vznik časných vad
- Do provozu jdou pouze součástky, které vykazují konstantní intenzitu poruch
- Používá se např. u elektronických součástek

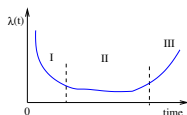
Vanová charakteristika



Oblast II: normální provoz

- Intenzita poruch je zpravidla konstantní
- Příčiny: náhodné poruchy, nedodržení provozních podmínek, špatné skladování/přeprava
- Exponenciální rozdělení poruch

Vanová charakteristika

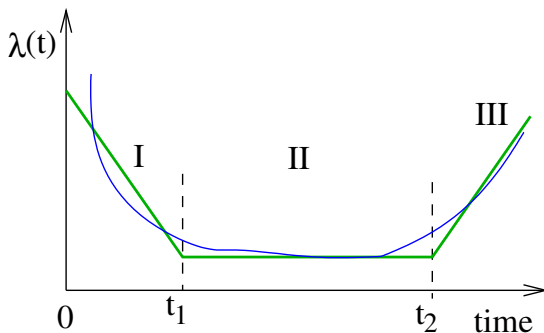


Oblast III: dožití

- Intenzita poruch se zvyšuje
- Příčiny: únava materiálů, stárnutí, opotřebení
- Lze modelovat např. Rayleighbovým nebo Weibullovým rozdělením

Intenzita poruch pro reálné prvky

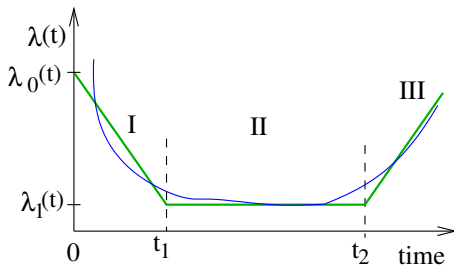
- lineární aproximace



Ukázka výpočtu:

- Jaká je pravděpodobnost poruchy v čase t ?
- V jakém čase t_β je $R(t_\beta) = \beta$?

Vanová charakteristika



Ukázka výpočtu:

- Jaká je pravděpodobnost poruchy v čase t ?
- V jakém čase t_β je $R(t_\beta) = \beta$?

Spolehlivost SW vs HW

HW

- Chyby jsou dány stárnutím materiálu, chyby návrhu, špatné používání, vliv prostředí
- Intenzita poruch má spíše vanovou křivku
- Stárnutí materiálu probíhá i při nepoužívání prvků
- Spolehlivost může být zvýšena lepším návrhem, použitím lepších materiálů, zálohováním
- Opravy obvykle vrací systém do původního stavu (výměna prvků)
- Poruchám mohou předcházet varovné signály (např. zhoršení kvality)

SW

- Chyby jsou způsobeny špatným návrhem, chybami v kódu, neočekávaná vstupní data
- Intenzita poruch se nezvyšuje
- Poruchy nemohou nastat, pokud se SW nepoužívá
- Spolehlivost může být zvýšena lepším testováním
- Oprava SW je obvykle realizována novým SW (nová verze)
- Žádné varování

Příklady SW chyb

Ariane 5

- Chyba v SW, který počítal výšku, byl použit starší SW pro Ariane 4 (včetně konstant jako např. rychlost)
- Došlo k přetečení při konverzi z 64bit do 16bit rychlosti

Mars Climate Orbiter

- Špatné použití jednotek (anglické míry místo SI)
- ~ \$327 mil.

Therac 25

- Chyba v paralelním kódu
- Pacienti dostávali až 100 násobné dávky radiace
- Pět lidí zemřelo na vysoké ozáření

