Rozdělení diskrétní náhodné proměnné

- Nejčastěji užívaná rozdělení:
  - binomické (Bernoulliho)
  - Poissonovo

1. Binomické rozdělení

Užití: pravděp. výskytu jevu ve výběrech určitého rozsahu nebo opakovaných zkouškách, jev buď nastane nebo nenastane (příznivý nebo nepříznivý výsledek zkoušky)

$$\text{příznivý} \downarrow p \qquad \text{nepříznivý} \downarrow 1\text{-}p$$

Nechť: počet nezávislých zkoušek n
počet příznivých výsledků m
pravděp. jednoho příznivého výsledku p

Hustota pravděp. binomického rozdělení:

$$f(m) = f(m; n, p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad \forall m;\ m = 0,1,\ldots,n$$

m – příznivých výsledků
n-m – nepříznivých výsledků
počet kombinací: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

- všechny kombinace (možné posloupnosti jevů) jsou nezávislé $\Rightarrow$ součin (současný výskyt) pravděp. všech komponent
- pravděp., že v n zkouškách budou pouze:
  příznivé výsledky: $f(n; n, p) = p^n$
  nepříznivé výsledky: $f(0; n, p) = (1-p)^n$

Distribuční funkce náhodné proměnné M s binomickým rozdělením:

$$F(m) = P(M \le m) = \sum_{k=0}^{m} f(k; n, p) \quad k = 0,1,,\ldots,m$$

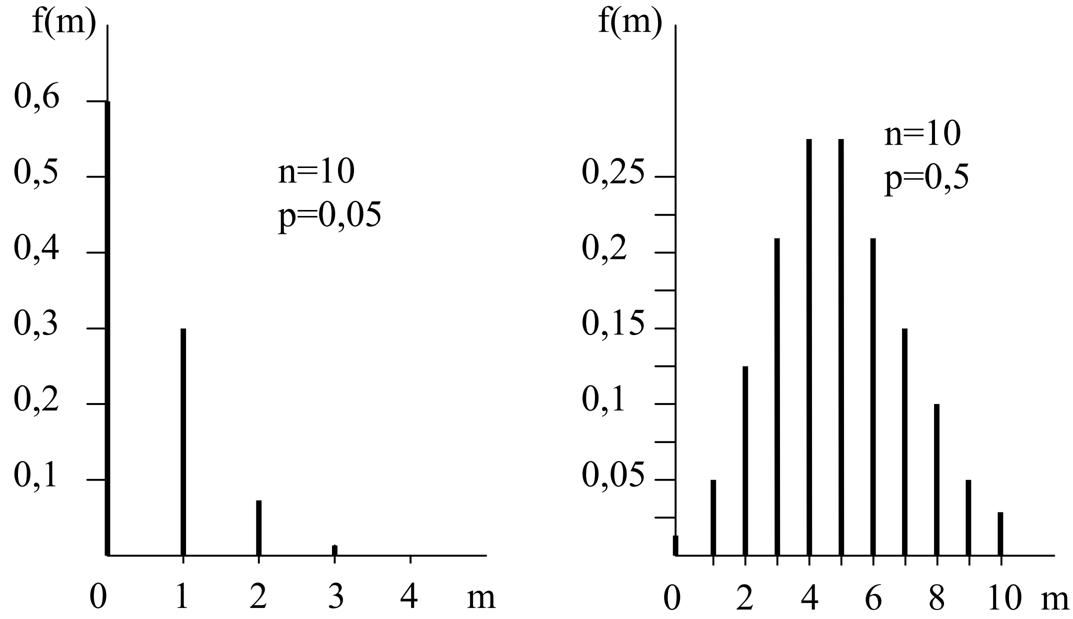
Pozn.: pro n>>1 se F(m) blíží normálnímu rozdělení

Střední hodnota: $E(M) = n.p$
Rozptyl: $D(M) = n.p.(1-p)$

Pozn.: zavedení substituce náhodné proměnné

$$X = \frac{M}{n}$$

platí, že: $$E(X)=\frac{1}{n}E(M)=p$$
$$D(X)=\frac{1}{n^2}D(M)=\frac{p.(1-p)}{n}$$



Průběhy diskrétní hustoty pravděpodobnosti pro binomické rozdělení

2. Poissonovo rozdělení

Užití: popis výskytu izolovaných jevů v čase, délce, ploše, aj. Počet výskytů jevů na jednotku míry musí být udán.
Př.: počet poruch za jednotku času
počet poruch na jednotku množství

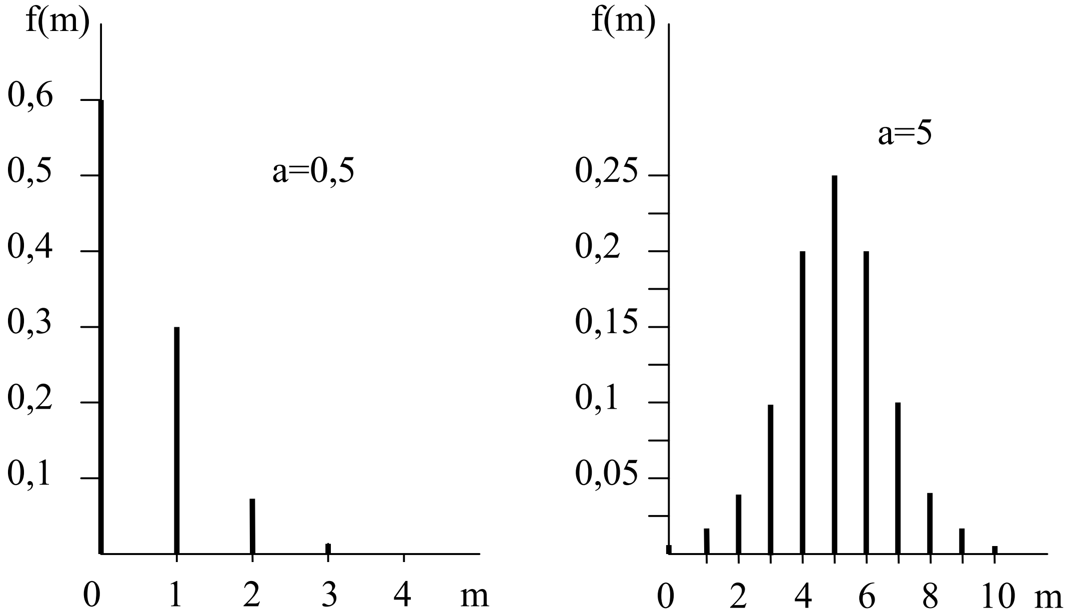
Pozn.: Poissonovo rozdělení je limitním případem binomického rozdělení kdy
$p \to 0$ … pravděp. příznivého výskytu
$n \to \infty$ … počet zkoušek

Hustota pravděp. Poissonova rozdělení:

$$f(m;a)=\frac{a^m}{m!}\exp(-a)$$

m=0,1,2,… udává počet výskytů jevu
a………… střední počet jevů v dané jednotce míry

Střední hodnota: $E(M)=n.p=a$
Rozptyl: $D(M)=a$



Průběhy diskrétní hustoty pravděpodobnosti pro Pissonovo rozdělení

- Zvláštní tvar Poissonova rozdělení pro děje probíhající v čase:
  - nechť jevy vzájemně nezávislé
  - výskyt jevu během intervalu Δt s pravděp. p jež je úměrná délce jež je úměrná délce trvání Δt
  - označme λ počet výskytů za jednotku času t$\Rightarrow$

    $\Rightarrow p = \lambda.\Delta t$

$$f(m;\lambda,t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\exp(-\lambda t)$$

počet výskytu jevů　　　a…střední počet výskytu jevů v jednotce míry

<u>Pozn.</u>: $f(0;\lambda,t) = \exp(-\lambda t)$

pravděpodobnost, že v čase t nenastal žádný jev $\Rightarrow$ výraz pro pravděpodobnost bezporuchového provozu exp. rozdělení:

$R(t) = \exp(-\lambda t)$

Odhad parametrů zákona rozdělení

- zpracování záznamů zkoušek spolehlivosti

určování:

  - modely pravděp. rozdělení poruch (odhady parametrů příslušného zákona rozdělení)
  - střední doba bezporuchového provozu, rozptyl, nebo další momenty váh. proměnné

Vstupní počet testovaných výrobků (testů)

<10	–problematické, nutno dodatečně ověřit
>10 <100	–statistický odhad parametrů
>100	–dobré a shodné výsledky od odlišných metod

- metoda největší věrohodnosti
- metoda nejmenších čtverců

- Nechť soubor hodnot s normálním rozdělením se střední hodnotou a a rozptylem σ^2
  - výběrový průměr z n hodnot je $\bar{x}$ s rozptylem σ^2/n
  - zvolme $\varepsilon > 0$ a hledejme pravděp., že výběrový průměr $\bar{x} \in \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon \rangle$

Z vlastností normálního rozdělení $\Rightarrow$

$$\alpha = P\left(a-\varepsilon \le \overline{X} \le a+\varepsilon\right) = \Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

ε–přesnost odhadu Laplaceova funkce

kde: $\Phi_0(x) = \int_{-x}^{x} \varphi_0(y)\,dy$

hustota pravděp. norm. rozdělení

nebo $\Phi_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(x)$

distribuční funkce norm. rozdělení

Obrácená úloha:

- soubor hodnot s normálním rozdělením
- rozptyl σ^2
- střední hodnota a není známa (?)
- provedený výběr n hodnot s výběrovým průměrem $\overline{X}$

Úkol: V jakém intervalu leží neznámá hodnota a ?

$$\alpha = P\left(\overline{X} - \varepsilon \le a \le \overline{X} + \varepsilon\right) = \Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

! náhodné meze   nenáhodná veličina !!

!!! ODLIŠNÉ OD PŘEDCHOZÍ ÚLOHY !!!

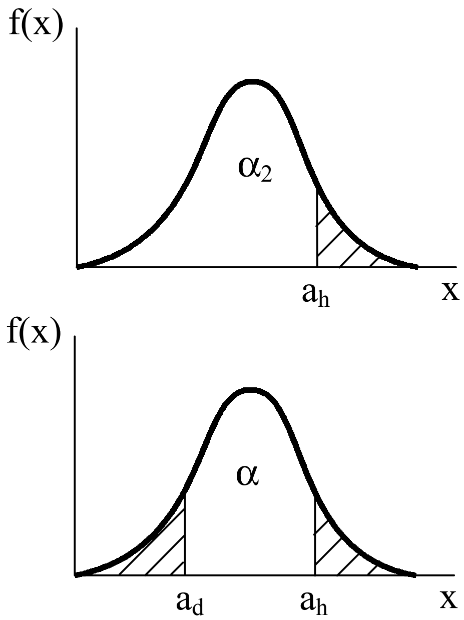
- interval $\left(\overline{X} - \varepsilon, \overline{X} + \varepsilon\right)$ je konfidenční interval pravděp. X je rozsah konfidenčního intervalu (konfidenční úroveň)

Pozn.: konfidenční interval lze omezit a jednostranně, tj.:

$$P\left(a \ge a_{dolní}\right) = \alpha_1$$
$$P\left(a \le a_{horní}\right) = \alpha_2$$

- dosazení předch. rcí pro α, α_1 a α_2 dostáváme:

$$\alpha = P\left(a \ge a_{dolní}\right) - P\left(a \le a_{horní}\right) = \alpha_1 - \left(1 - \alpha_2\right) = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$$



Konfidenční interval omezený jednostranně (nahoře) a oboustraně (dole)

Pozn.: při neznámém rozdělení lze pro hrubý odhad použít Čebyševovu nerovnost:

platí: $P\left(\left|x - E(x)\right| \ge \sigma.k\right) \le \frac{1}{k^2}$;$k \ge 0$

pro $\left|x - E(x)\right| \ge \sigma \Rightarrow \alpha$ je 3x větší

pro $\left|x - E(x)\right| \ge 3\sigma \Rightarrow \alpha$ je 40x větší

porovnáním s mezemi pro normální rozdělení

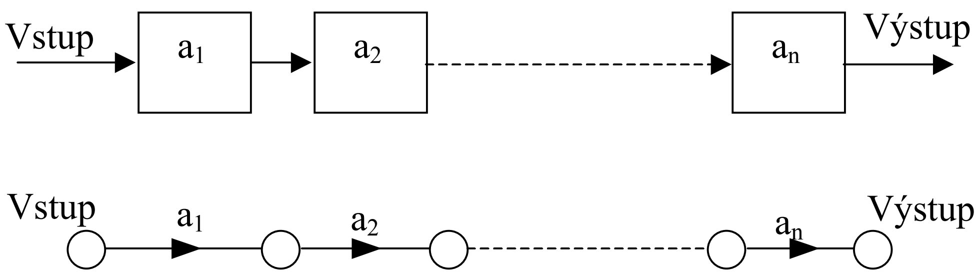
- existují i grafické metody odhadu vhodného rozdělení – dle intenzity poruch

Spolehlivost soustav

- dekompozice složitých soustav
  (snadné zjišťování spolehlivosti parametrů podsystémů)
- analýza struktury a vzájemných vazeb:
  - častý předpoklad nezávislosti poruch podsystémů – výhodné
  - závislé poruchy (!) v soustavách s interakcí nebo v soustavách působících na společné prostředí

Pozn.: v dalším předpokládáme následující omezení (pro zjednodušení)
- každá soustava (nebo její komponenty) se nachází ve stavu poruchy nebo bezporuchové funkce
- pravděpodobnostní popis bezporuchového provozu prvků je konstantní v čase
- soustavy jsou neopravované

Sériová sustava: (logická struktura)
- všechny systémy musí být funkční $\Rightarrow$ celá soustava je funkční
- porucha alespoň jednoho systému způsobí poruchu celé soustavy



Blokové schéma a graf sériové soustavy

Směr průchodu signálů (obecně orientovaná multigraf)

Nechť: n…počet prvků
$\overline{X_i}$ …stav poruchy i-tého prvku
X_i…bezporuchový stav i-tého prvku
příslušné pravděp. nechť jsou $P(X_i), P(\overline{X_i})$

Pravděp. bezporuchového provozu: (průnik jevů bez poruch)

$$R = P(x_1)\cdot P(x_2 \mid x_1)\cdot P(x_3 \mid x_1 x_2)\cdots P(x_n \mid x_1 x_2 \ldots x_{n-1})$$

Jsou-li prvky bez interakce (pravděp. jsou nezávislé):

$$R = \prod_{i=1}^{n} P(x_i)$$

Pravděpodobnost poruchy $\Leftrightarrow \exists$ prvek v poruchovém stavu:

$$Q = P\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n}\right)$$

(sjednocení jevů)

- poruchové jevy se vzájemně nevylučují

rozvinutím pravé strany rovnice:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{x_i}\right) - \sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{n} P\left(\overline{x_i}\,\overline{x_j}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\ldots\overline{x_n}\right)$$: celkem 2^n-1 členů

součty pravděp. všech možných kombinací současných výskytů 3…(n-1) jevů

Závěr:

- Sériová soustava má vždy horší bezporuchovost než je bezporuchovost nejméně spolehlivého prvku
- Je-li soustava složena z n shodných prvků s pravděp. bezporuchového stavu p a pravděp. poruchy q $\Rightarrow$
  pravděp. poruchy: $R = p^n = (1-q)^n$
  pravděp. bez. provozu: $Q = 1 - p^n = 1 - (1-q)^n$