# A6M33SSL: Statistika a spolehlivost v lékařství
# Teorie spolehlivosti
# Přednáška 2

Vojta Vonásek
vonasek@labe.felk.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky

# Opakování

**Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$:** je pravděpodobnost, že systém funguje v čase $t$.

**Pravděpodobnost poruchy v časovém intervalu:**

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t,$$

kde $f(t)$ je hustota pravděpodobnosti poruch.

**Intenzita poruch $\lambda(t)$:**

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

- prvky mají různé $\lambda(t)$ a různé $f(t)$
- často používaná rozdělení: Exponenciální, Rayleighovo, Weibullovo,Log-normální, Poissonovo

# Opakování

## Jak získat parametry spolehlivosti:

- Nejdůležitější jsou MTBF nebo $\lambda(t)$
- Datasheets, MIL-HDBK-217F, databáze výrobců
- Měření dat
  - Časy poruch $t_i$
  - Intenzity poruch v časovém intervalu $\lambda(t)$
  - Statistické zpracování
- Různá rozdělení pro různé typy poruch/období používání

# Exponenciální rozdělení

- Konstantní intenzita poruch: $\lambda(t) = \lambda_0$
- Často používané, dobře se s ním počítá

## Základní vlastnosti:

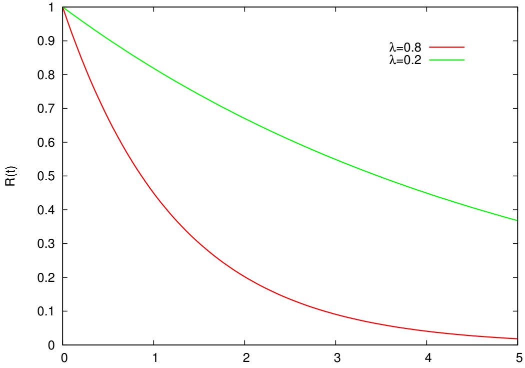
$$\lambda(t) = \lambda_0$$

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}$$

$$f(t) = \lambda_0 \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$D = \frac{1}{\lambda_0^2}$$

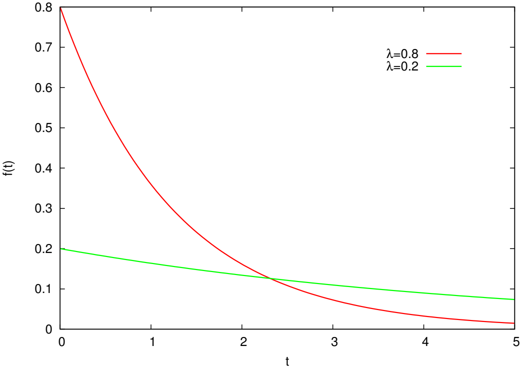


# Exponenciální rozdělení

- Konstantní intenzita poruch: $\lambda(t) = \lambda_0$
- Často používané, dobře se s ním počítá

## Základní vlastnosti:

$$\lambda(t) = \lambda_0$$
$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}$$
$$f(t) = \lambda_0 \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}$$
$$T_s = \frac{1}{\lambda_0}$$
$$D = \frac{1}{\lambda_0^2}$$



# Exponenciální rozdělení

- Parametr rozdělení $\lambda_0$ je určen střední hodnotou
- Jednoduchý odhad z dat
- Používá se pro modelování života elektronických komponent, které nejsou tolik mechanicky namáhané
- Je vhodné pro komponenty u nichž lze předpokládat, že pokud se nepoužívají, tak jsou stejně dobré, jako nové prvky (např. pojistky, žárovky)
- Vhodné pro aproximaci chování systémů v období normálního provozu
- Vhodný pro poruchy SW
- Nevhodné pro použití v období zahořování nebo dožívání systému

# Rayleighovo rozdělení

## Základní vlastnosti:

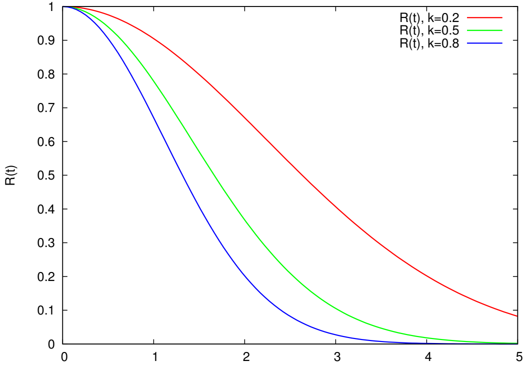
$$\lambda(t) = kt \qquad k > 0$$

$$R(t) = \mathrm{e}^{\frac{-kt^2}{2}}$$

$$f(t) = kt\mathrm{e}^{\frac{-kt^2}{2}}$$

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

$$D = (2 - \frac{\pi}{2})\frac{1}{k}$$




- Odvoďte $R(t)$ a $f(t)$ z $\lambda(t)$

# Rayleighovo rozdělení

## Základní vlastnosti:

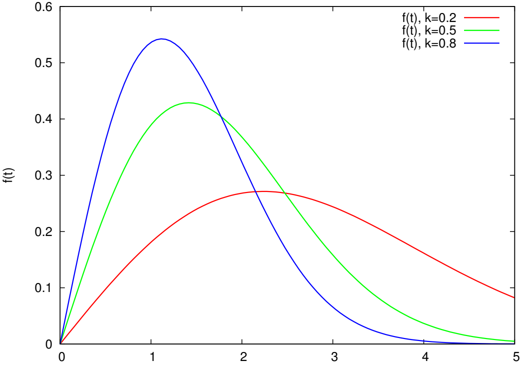
$$\lambda(t) = kt \qquad k > 0$$

$$R(t) = \mathrm{e}^{\frac{-kt^2}{2}}$$

$$f(t) = kt\mathrm{e}^{\frac{-kt^2}{2}}$$

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

$$D = (2 - \frac{\pi}{2})\frac{1}{k}$$




- Odvoďte $R(t)$ a $f(t)$ z $\lambda(t)$

# Rayleighovo rozdělení

- Rostoucí intenzita poruch, postupná degradace materiálu
- Vhodné pro modelování období dožívání

**Příklad**

Výrobce pneumatik vyvinul nový materiál, který zlepšuje valivý odpor, ale také zvyšuje opotřebení. Měření ukázala, že intenzita poruch roste lineárně s čase a lze ji popsat

$$\lambda(t) = 0.5 \cdot 10^{-8} t,$$

kde $t$ je v hodinách. Jaká je pravděpodobnost poruchy pneumatiky po 1 roce používání?

$$R(1rok) = \mathrm{e}^{\frac{-kt^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{-0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 8760^2}{2}} = 0.825$$

# Rayleighovo rozdělení

- Rostoucí intenzita poruch, postupná degradace materiálu
- Vhodné pro modelování období dožívání

**Příklad**

Výrobce pneumatik vyvinul nový materiál, který zlepšuje valivý odpor, ale také zvyšuje opotřebení. Měření ukázala, že intenzita poruch roste lineárně s čase a lze ji popsat

$$\lambda(t) = 0.5 \cdot 10^{-8} t,$$

kde $t$ je v hodinách. Jaká je pravděpodobnost poruchy pneumatiky po 1 roce používání?

$$R(1rok) = \mathrm{e}^{\frac{-kt^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{-0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 8760^2}{2}} = 0.825$$

Jaká je střední doba bezporuchového provozu?

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} = \sqrt{\frac{\pi}{20.5 \cdot 10^{-8}}} = 17550 \text{ (hodin)}$$

# Weibullovo rozdělení

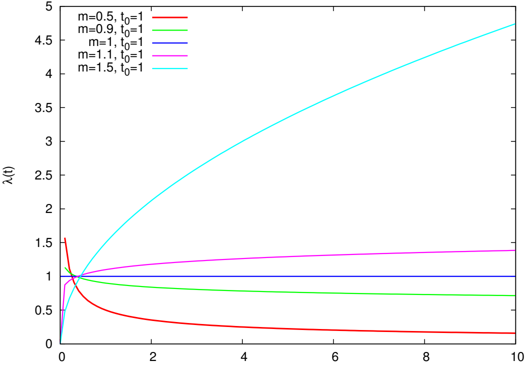
## Základní vlastnosti:

$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \qquad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \mathrm{e}^{\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = \mathrm{e}^{\frac{-t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma(\frac{1}{m} + 1)$$




$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[ \Gamma(\frac{2}{m} + 1 - \Gamma^2(\frac{1}{m} + 1) \right]$$

# Weibullovo rozdělení

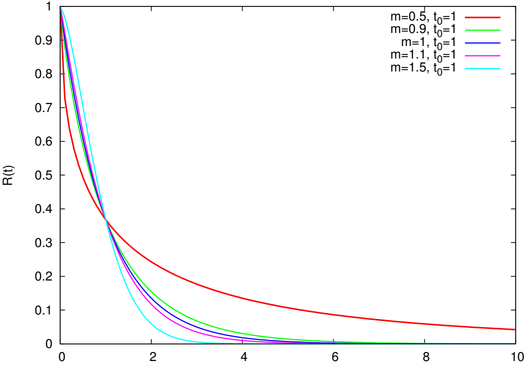
## Základní vlastnosti:

$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \qquad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \mathrm{e}^{\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = \mathrm{e}^{\frac{-t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma(\frac{1}{m} + 1)$$




$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[ \Gamma(\frac{2}{m} + 1 - \Gamma^2(\frac{1}{m} + 1) \right]$$

# Weibullovo rozdělení

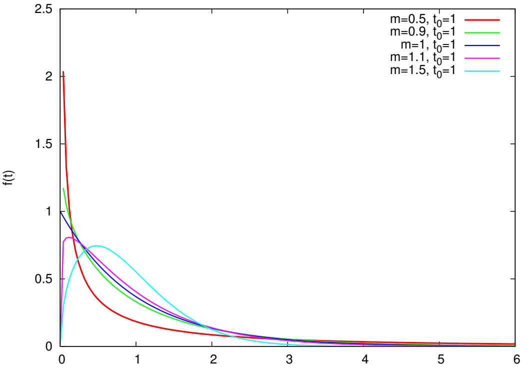
## Základní vlastnosti:

$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \qquad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \mathrm{e}^{\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = \mathrm{e}^{\frac{-t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma(\frac{1}{m} + 1)$$




$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[ \Gamma(\frac{2}{m} + 1 - \Gamma^2(\frac{1}{m} + 1) \right]$$

# Weibullovo rozdělení

- Flexibilní, lze modelovat různé typy intenzit
- Vhodné pro modelování období dožití
- Poruchy ložisek, elektronek
- Pokud $m = 1 \rightarrow$ Exponenciální rozdělení
- Pokud $m = 2 \rightarrow$ Rayleighovo rozdělení
- Existuje i tříparametrová forma Weibullova rozdělení

**Příklad:**

Součástka má poruchy dle Weibullova rozdělení s parametry $m = 2$ a $t_0 = 250$. Jaká je pravděpodobnost bezporuchového provozu v čase $t = 10$?

$$R(t) = \mathrm{e}^{\frac{-t^m}{t_0}}$$

$$R(10) = \mathrm{e}^{\frac{-10^2}{250}} = 0.67.$$

# Kombinace rozdělení

- Základní rozdělení nejsou vždy vhodná pro modelování poruch
- Reálné prvky mají složitější průběh intenzit poruch
- Lze využít kombinací základních rozdělení

## Kombinace dvou exponenciálních rozdělení:

$$R(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

- Vhodné pro modelování počátečního období života a normálního provozu

# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Předpokládejme pravděpodobnost bezporuchového provozu ve tvaru

$$R(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}.$$

**Jaká je hustota pravděpodobnosti poruch?**

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$f(t) = c_1 \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

Musí platit $\int_0^\infty f(t) \mathrm{d}t = 1$ a $R(0) = 1 = c_1 + c_2$.

# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Předpokládejme pravděpodobnost bezporuchového provozu ve tvaru

$$R(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}.$$

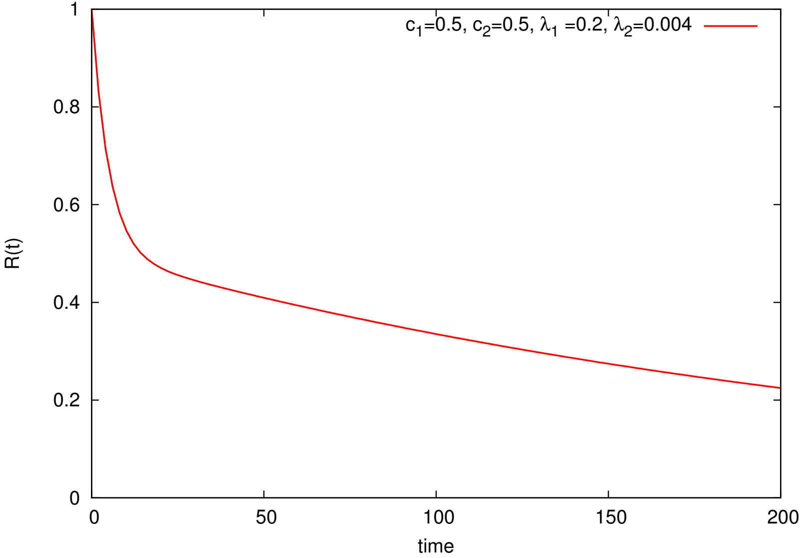
**Jaká je střední doba bezporuchového provozu?**

Lze využít vzorce:

$$\begin{aligned} T_s &= \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty c_1\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \\ &= \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} \end{aligned}$$

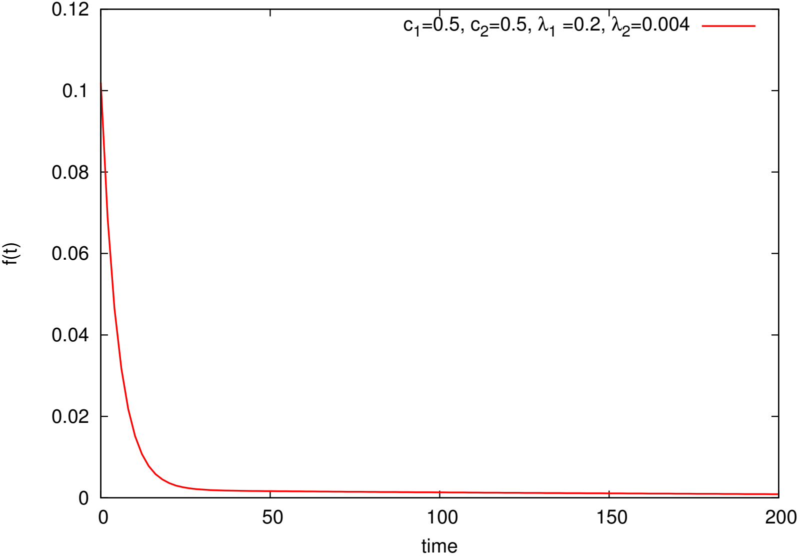
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



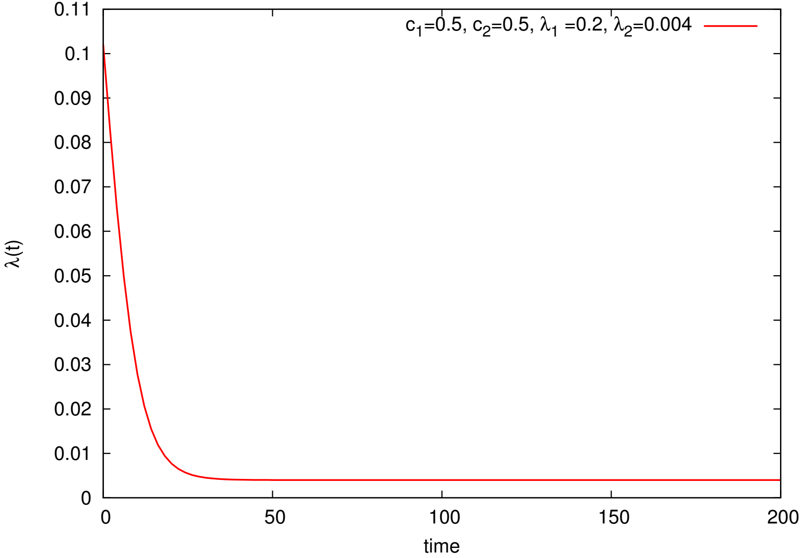
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



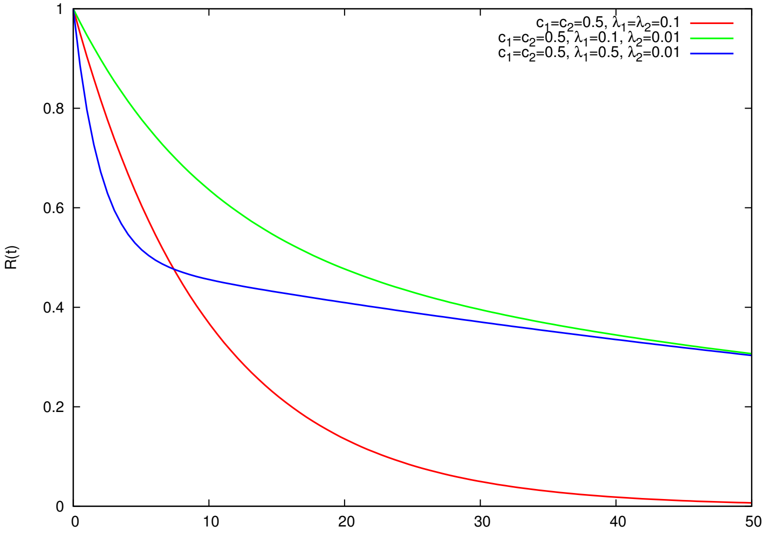
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



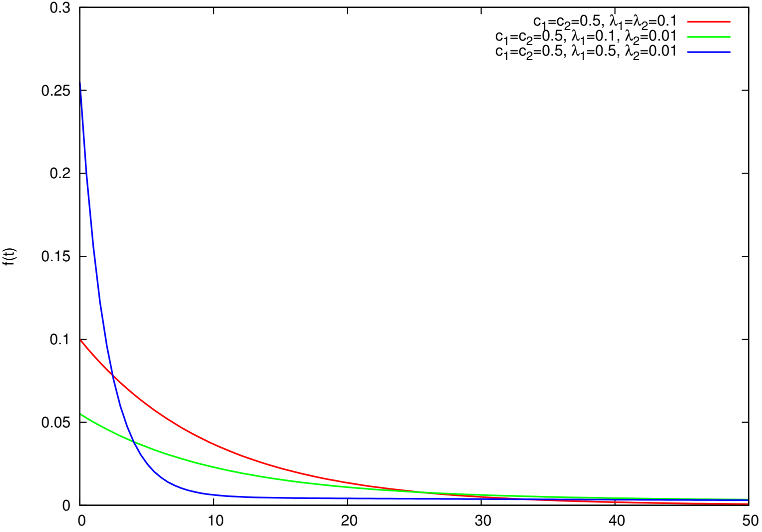
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



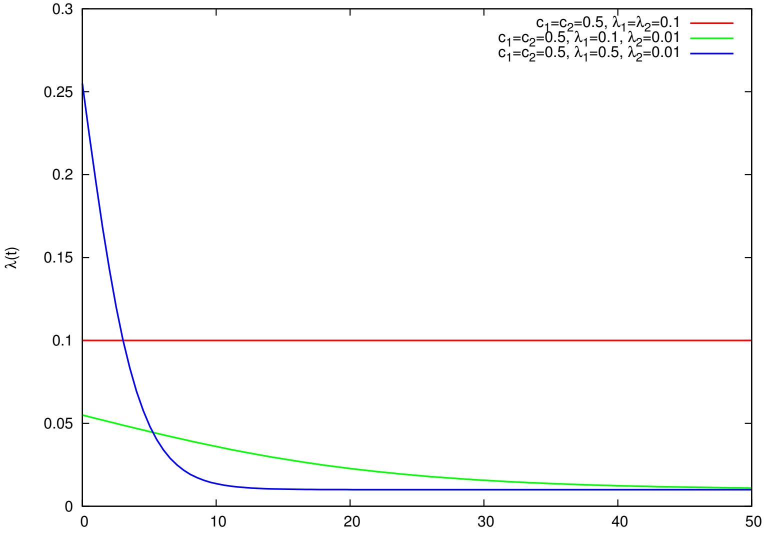
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



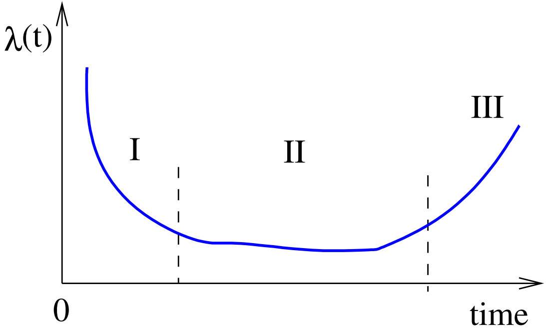
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad: $c_1 = c_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.004$.



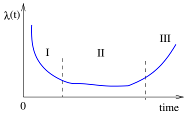
# Intenzita poruch pro reálné prvky

- Reálné prvky většinou nemívají konstantní intenzitu poruch
- Průběhy $\lambda(t)$ se podobají vanové charakteristice (Bathtube curve)




- Oblast I: počáteční poruchovost
- Oblast II: normální provoz
- Oblast III: období dožití

# Vanová charakteristika



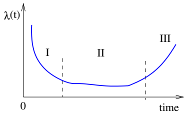

### Oblast I: období počáteční poruchovosti

- Období relativně velké poruchovosti, ale ta rychle klesá
- Příčiny: chyby v konstrukci a výrobě
- Weibullovo rozdělení, kombinace exp. rozděleních
- Lze urychlit tzv. zahořováním

### Zahořování

- Součástky jsou vystaveny zvýšenému namáhání (např. teplota)
- To urychlí vznik časných vad
- Do provozu jdou pouze součástky, které vykazují konstantní intenzitu poruch
- Používá se např. u elektronických součástek

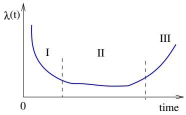
# Vanová charakteristika




**Oblast II: normální provoz**

- Intenzita poruch je zpravidla konstantní
- Příčiny: náhodné poruchy, nedodržení provozních podmínek, špatné skladování/přeprava
- Exponenciální rozdělení poruch

# Vanová charakteristika

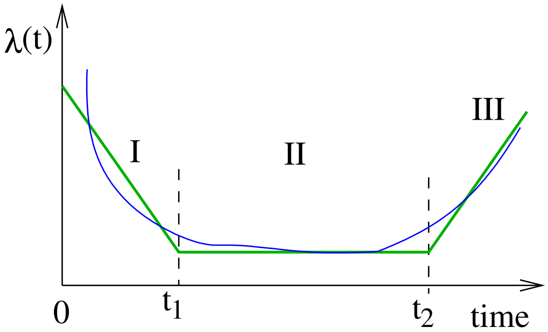



**Oblast III: dožití**

- Intenzita poruch se zvyšuje
- Příčiny: únava materiálů, stárnutí, opotřebení
- Lze modelovat např. Rayleighbovým nebo Weibullovým rozdělením

# Intenzita poruch pro reálné prvky

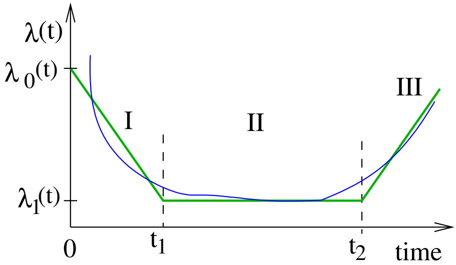
- lineární aproximace




Ukázka výpočtu:

- Jaká je pravděpodobnost poruchy v čase $t$?
- V jakém čase $t_\beta$ je $R(t_\beta) = \beta$?

# Vanová charakteristika




Ukázka výpočtu:

- Jaká je pravděpodobnost poruchy v čase $t$?
- V jakém čase $t_\beta$ je $R(t_\beta) = \beta$?

# Spolehlivost SW vs HW

**HW**

- Chyby jsou dány stárnutím materiálu, chyby návrhu, špatné používání, vliv prostředí
- Intenzita poruch má spíše vanovou křivku
- Stárnutí materiálu probíhá i při nepoužívání prvků
- Spolehlivost může být zvýšena lepším návrhem, použitím lepších materiálů, zálohováním
- Opravy obvykle vrací systém do původního stavu (výměna prvků)
- Poruchám mohou předcházet varovné signály (např. zhoršení kvality)

**SW**

- Chyby jsou způsobeny špatným návrhem, chybami v kódu, neočekávaná vstupní data
- Intenzita poruch se nezvyšuje
- Poruchy nemohou nastat, pokud se SW nepoužívá
- Spolehlivost může být zvýšena lepším testováním
- Oprava SW je obvykle realizována novým SW (nová verze)
- Žádné varování

# Příklady SW chyb

## Ariane 5

- Chyba v SW, který počítal výšku, byl použit starší SW pro Ariane 4 (včetně konstant jako např. rychlost)
- Došlo k přetečení při konverzi z 64bit do 16bit rychlosti

## Mars Climate Orbiter

- Špatné použití jednotek (anglické míry místo SI)
- $\sim \$327$ mil.

## Therac 25

- Chyba v paralelním kódu
- Pacienti dostávali až 100 násobné dávky radiace
- Pět lidí zemřelo na vysoké ozáření