Markovovy řetězce

Mirko Navara
Centrum strojového vnímání
katedra kybernetiky FEL ČVUT
Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a
http://cmp.felk.cvut.cz/˜navara/MVT
http://cmp.felk.cvut.cz/˜navara/psi

20. února 2013

Obsah

1 O čem to může být?

Příklad 1 (basketbal). *[MN: PMS] Alice a Bob se střídavě strefují míčem do koše, začíná Alice. Kdo se první strefí, vyhrává. Alice se strefí s pravděpodobností a, Bob s pravděpodobností b. Jaká je pravděpodobnost výsledků hry?*

Řešení. *Po prvním hodu s pravděpodobností a Alice vyhrává, s pravděpodobností $1-a$ se pokračuje. Po 2. hodu hra skončí výhrou Boba s pravděpodobností $(1-a)\,b$, nebo je situace stejná jako na začátku a šance se dělí ve stejném poměru, tj. $a:(1-a)\,b$. Alice vyhraje s pravděpodobností*

$$\frac{a}{a+(1-a)\,b}=\frac{a}{a+b-a\,b}\,,$$

Bob s pravděpodobností

$$\frac{(1-a)\ b}{a+(1-a)\,b}=\frac{(1-a)\ b}{a+b-a\,b}\,.$$

(Předpokládáme, že aspoň jedna z pravděpodobností a,b je nenulová. Více viz [MN: PMS].) □

Příklad 2 (foton). *[MN: PMS] Foton vnikne do tenké vrstvy s rovnoběžnými stěnami. Na jejím rozhraní může projít, nebo se odrazí a dojde k druhému rozhraní, kterým projde, nebo se odrazí atd. Vypočtěte pravděpodobnosti průchodu fotonu do jednotlivých poloprostorů vymezených touto vrstvou.*

Řešení. *Jde o příklad „basketbal“ v jiné interpretaci. Obdobná úloha se řeší při programování barevných tiskáren.* □

Dosud jsme si poradili i elementárními metodami teorie pravděpodobnosti, jsou však obtížnější úlohy.

2 O čem to je?

Příklad 3 (otevřené restaurace). *Piják se pohybuje Skloněnou ulicí mezi dvěma restauracemi. Před každými dveřmi, které nevedou do restaurace, se rozhodne, kterým směrem se vydá; s pravděpodobností c půjde z kopce, s pravděpodobností $1-c$ půjde do kopce.* ***Až najde restauraci, zůstane v ní.*** *Jaké jsou pravděpodobnosti dosažení obou restaurací? (Jednodimenzionální náhodná procházka s absorpčními bariérami.)*

Příklad 4 (otevřené restaurace ve vzdálenosti 2 – speciální případ předchozího**).** *Obě restaurace jsou od výchozího místa vzdáleny o 2 vchody. Sdružíme 2 kroky do jednoho: Po 2 krocích dorazí buď do dolní restaurace (s pravděpodobností $a=c^2$), nebo do horní (s pravděpodobností $(1-c)^2$), nebo se vrátí do výchozího bodu. Jde o příklad „basketbal“, kde*

$$a=c^2\,,\qquad (1-a)\,b=(1-c)^2\,.$$

V dolní restauraci skončí s pravděpodobností $\dfrac{c^2}{c^2+(1-c)^2}$, např. pro $c=2/3$ s pravděpodobností $4/5$. Obecnější případ tak snadno nevyřešíme. □

Příklad 5 (informační kanál se zpětnou vazbou). *Odesílatel pošle zprávu v kódu, dovolujícím odhalit chyby v přenosu. (Pro jednoduchost zanedbáváme riziko nerozpoznané chyby.) Zpráva je doručena správně s pravděpodobností c. Poté příjemce za stejných podmínek pošle zpět* *(jednobitovou) zprávu o úspěšnosti přijetí. Chybná zpráva o správném přenosu vypadá stejně jako správná zpráva o chybném přenosu. V těchto případech se přenos opakuje za stejných podmínek. Chybná zpráva o chybném přenosu vypadá stejně jako správná zpráva o správném přenosu. V těchto případech přenos končí; přijatá zpráva může být správná nebo chybná. Jaké jsou pravděpodobnosti ukončení správným/chybným přijetím zprávy?*

Řešení. *Jde o příklad „otevřené restaurace ve vzdálenosti 2", resp. „basketbal".* □

Další otázky: Jaké je rozdělení délky komunikace a její střední hodnota?

Příklad 6 (shoda v tenisu). *Alice s Bobem hrají tenis, došlo ke shodě, takže hru vyhraje hráč, který jako první vyhraje o 2 míče víc než soupeř. Alice vyhraje míč s pravděpodobností c. Jaké jsou pravděpododobnosti výsledků hry? Jaké rozdělení a střední hodnotu má počet míčů hry?*

Řešení. *Jde opět o příklad „otevřené restaurace ve vzdálenosti 2".* □

Takto bychom však nevyřešili výsledek hry od jejího počátku (místo od shody), setu, zápasu, turnaje...

Příklad 7 (zavřené restaurace). *Jako příklad „otevřené restaurace", ale* ***do restaurace pijáka nepustí a pošlou ho zpět směrem, ze kterého přišel****. Jak často se objeví před kterými dveřmi? (Jednodimenzionální náhodná procházka s odrážejícími bariérami.)*

Příklad 8 (otevřená a zavřená restaurace). *Jako předchozí, ale* ***do jedné restaurace pijáka nepustí a pošlou ho zpět směrem, ze kterého přišel. Do druhé restaurace ho pustí*** *a tam zůstane. (Jednodimenzionální náhodná procházka s jednou odrážející a jednou absorpční bariérou.)*

Cvičení 1. *Upravte předchozí úlohy na jednodimenzionální náhodné procházky tak, že se náhodně nevolí směr, ale* ***změna směru****.*
(Návod: Potřebujeme zdvojit stavy, do nichž se lze dostat z obou stran, a tím přidat informaci o tom, z kterého směru jsme přišli. Tu je potřeba dodat i v popisu počátečního stavu.)

Otázky: Jaké je asymptotické chování systému? Závisí na počátečním stavu?
Jaké je rozdělení a střední hodnota doby dosažení daného bodu?
Kolikrát se vrátí na dané místo a po jakém čase?

3 Matematický model: (homogenní) Markovovy řetězce *(Markov chains)*

Doporučená literatura: [Hsu 1996, Papoulis, Pillai 2002, Wasserman 2004].
Posloupnost diskrétních náhodných veličin $X_0, X_1, X_2, \ldots$ s hodnotami ze spočetné množiny **stavů**, obvykle $\{1, 2, \ldots\}$.
Indexována je **diskrétním časem** s hodnotami z množiny $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Z hlediska **okamžiku** t rozlišujeme **minulost** ($< t$) a **budoucnost** ($> t$).
Dáno:
Pravděpodobnosti počátečních stavů (=rozdělení náhodné veličiny X_0),

$$p_i(0) = p_{X_0}(i)\,,$$

popř. daný počáteční stav s, tj.

$$p_i(s) = \delta_{is} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = s, \\ 0 & \text{pro } i \neq s, \end{cases}$$

pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j v jednom kroku,

$$p_{ij} = P[X_{t+1} = j \mid X_t = i]\,,$$

(nezávislé na čase t); pro konečně mnoho stavů je lze popsat **maticí přechodu**

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

která je **stochastická** (=má jednotkové řádkové součty),

$$\forall i = 1, \ldots, n : \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1\,.$$

Homogenní: Matice přechodu nezávisí na čase.
Řetězce: S diskrétním časem a diskrétními stavy; pro spojitý čas dostáváme **Markovův proces** *(Markov process)*.
Markovovy: Pravděpodobnost budoucích stavů je plně určena současným stavem, bez ohledu na minulé stavy,

$$P[X_{t+1} = j \mid X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0] = P[X_{t+1} = j \mid X_t = i_t] = p_{i_t j}\,.$$

(Stav nese „dostatečnou informaci“ o předchozím průběhu.) To je *podmíněná nezávislost* budoucího a minulého stavu při daném současném stavu: pro $u < t < v$ a libovolné stavy i, j, k

$$P[X_u = j, X_v = k \mid X_t = i] = P[X_u = j \mid X_t = i] \cdot P[X_v = k \mid X_t = i]\,.$$

Pravděpodobnosti stavů vyjadřuje na počátku řádkový vektor

$$\boldsymbol{p}(0) = (p_1(0), \ldots, p_n(0)) = (p_{X_0}(1), \ldots, p_{X_0}(n))\;,$$

dále se vyvíjejí podle rekurentního vzorce

$$\boldsymbol{p}(t+1) = \boldsymbol{p}(t)\,\boldsymbol{P}\,,$$

takže

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(t+u) &= \boldsymbol{p}(t)\,\boldsymbol{P}^u\,, \\ \boldsymbol{p}(u) &= \boldsymbol{p}(0)\,\boldsymbol{P}^u\,. \end{aligned}$$

Prvky matice $\boldsymbol{P}^t$ značíme $p_{ij}^{(t)}$, což je pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j v t krocích.
Chapmanova-Kolmogorovova rovnice:

$$\boldsymbol{P}^{t+u} = \boldsymbol{P}^t\,\boldsymbol{P}^u\,,$$

po složkách:
$$p_{ij}^{(t+u)} = \sum_k p_{ik}^{(t)}\, p_{kj}^{(u)}\,,$$
kde sčítáme přes všechny možné stavy v čase t.

Princip superpozice (=linearita): Pokud jsou počáteční pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(0)$ konvexní kombinací (=směsí) rozdělení,
$$\boldsymbol{p}(0) = c\,\boldsymbol{q}(0) + (1-c)\,\boldsymbol{r}(0)\,, \qquad c \in \langle 0,1\rangle\,,$$
jsou pozdější pravděpodobnosti dány stejnou konvexní kombinací pravděpodobností jednotlivých složek,
$$\boldsymbol{p}(u) = \boldsymbol{p}(0)\,\boldsymbol{P}^u = c\,\boldsymbol{q}(u) + (1-c)\,\boldsymbol{r}(u) = c\,\boldsymbol{q}(0)\,\boldsymbol{P}^u + (1-c)\,\boldsymbol{r}(0)\,\boldsymbol{P}^u\,.$$

Důsledek 1. *Stačí nám vyšetřit případy, kdy počáteční stav je daný (=Diracovo rozdělení).*

Příklad 9 (**basketbal** – pokračování). *Pokud rozlišujeme jednotlivé hody (a kdo je na řadě), je matice přechodu*
$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
pravděpodobnosti stavů
$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(0) &= (0,1,0,0)\,, \\ \boldsymbol{p}(1) &= (0,1,0,0)\,\boldsymbol{P} = (a,0,1-a,0)\,, \\ \boldsymbol{p}(2) &= (a,0,1-a,0)\,\boldsymbol{P} = (a,(1-a)\ (1-b)\,,0,b\ (1-a))\,, \\ \boldsymbol{p}(3) &= (a,(1-a)\ (1-b)\,,0,b\ (1-a))\,\boldsymbol{P} = \\ &= (a + a\ (1-a)\ (1-b)\,,0,(1-a)^2\ (1-b)\,,b\ (1-a))\ \ldots \end{aligned}$$
Pokud sdružíme 2 kroky do jednoho, dostaneme novou matici přechodu
$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & (1-a)\ (1-b) & 0 & b\ (1-a) \\ a\ (1-b) & 0 & (1-a)\ (1-b) & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Jelikož začíná Alice, do 3. stavu se nedostaneme; bez něj máme zjednodušený popis
$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (1-a)\ (1-b) & b\ (1-a) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Např. pro $a = 1/2$, $b = 1/3$ dostáváme

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.749\,99 & 1.693\,5 \cdot 10^{-5} & 0.250\,00 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 10 (otevřené restaurace ve vzdálenosti 2 – pokračování)**.**

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 2\,c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 \\ 0 & c^2 & 0 & c\,(1-c) & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bez 2. a 4. stavu dostaneme zjednodušený popis, v němž 2 kroky považujeme za jeden (z lichého stavu se po sudém počtu kroků dostaneme do lichého stavu, sudé stavy ignorujeme):

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Např. pro $c = 2/3$ dostáváme

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{52}{81} & \frac{16}{81} & \frac{13}{81} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.799\,76 & 3.007\,3 \cdot 10^{-4} & 0.199\,94 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 11 (zavřené restaurace ve vzdálenosti 2 – pokračování)**.** *(Obě restaurace jsou* *vzdáleny o 2 vchody.)*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 2\,c-c^2 & 0 & (1-c)^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 2c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 \\ 0 & c^2 & 0 & 1-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \end{pmatrix}.$$

Bez 2. a 4. stavu dostaneme zjednodušený popis, v němž 2 kroky považujeme za 1:

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} c & 1-c & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 \\ 0 & c & 1-c \end{pmatrix}.$$

Např. pro $c = 2/3$ *dostáváme*

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^2 = \begin{pmatrix} \frac{16}{27} & \frac{10}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{40}{81} & \frac{34}{81} & \frac{7}{81} \\ \frac{8}{27} & \frac{14}{27} & \frac{5}{27} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 0.533\,42 & 0.399\,95 & 6.662\,2\cdot 10^{-2} \\ 0.533\,27 & 0.400\,03 & 6.669\,7\cdot 10^{-2} \\ 0.532\,97 & 0.400\,18 & 6.684\,7\cdot 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Příklad 12 (otevřená a zavřená restaurace ve vzdálenosti 2 – pokračování**).** *(Obě restaurace jsou vzdáleny o 2 vchody.)*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 2\,c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 \\ 0 & c^2 & 0 & 1-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \end{pmatrix}.$$

Bez 2. a 4. stavu dostaneme zjednodušený popis, v němž 2 kroky považujeme za jeden:

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 \\ 0 & c & 1-c \end{pmatrix}.$$

Např. pro $c = 2/3$ dostáváme

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{52}{81} & \frac{22}{81} & \frac{7}{81} \\ \frac{8}{27} & \frac{14}{27} & \frac{5}{27} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.986\,13 & 1.040\,5 \cdot 10^{-2} & 3.468\,3 \cdot 10^{-3} \\ 0.972\,25 & 2.081\,0 \cdot 10^{-2} & 6.936\,6 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Cvičení 2. *[Wasserman 2004] Markovův řetězec X_t, $t \in \mathbb{N}$, má matici přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

a počáteční pravděpodobnosti $(0.3,\ 0.4,\ 0.3)$. *Najděte pravděpodobnosti*

$$P[X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3]\,,$$
$$P[X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 2]\,.$$

Cvičení 3. *(upraveno dle [Wasserman 2004]) Házíme kostkou. Náhodná veličina X_t je maximum z prvních t hodů. Ukažte, že se jedná o Markovův řetězec, najděte jeho přechodový diagram a matici přechodu.*

4 Klasifikace stavů Markovových řetězců s konečně mnoha stavy

Permutace stavů:
Pokud v popisu změníme pořadí stavů, změní se stejně pořadí složek vektorů i řádků a sloupců matice přechodu.

Příklad 13 (basketbal – pokračování)**.** *Matice přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se permutací stavů $(1, 4, 2, 3)$ *změní na matici*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & b & 1-b & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 14 (**zavřené restaurace ve vzdálenosti 2** – pokračování)**.** *Sloučením dvou kroků do jednoho jsme dospěli k matici:*

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 2\,c-c^2 & 0 & (1-c)^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 2c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 \\ 0 & c^2 & 0 & 1-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \end{pmatrix}.$$

Seřadíme-li stavy v pořadí $1,3,5,2,4,$ *dostaneme blokově diagonální matici:*

$$\begin{pmatrix} c & 1-c & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,c-c^2 & (1-c)^2 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 1-c^2 \end{pmatrix}.$$

Stav j je **dosažitelný** (angl. *accessible*) ze stavu i, jestliže se z i do j dá přejít s nenulovou pravděpodobností (pro nějaký počet kroků),

$$\exists t > 0 : p_{ij}^{(t)} > 0\,.$$

Stav je **přechodný** (angl. *transient*), jestliže se do něj (někdy) vrátíme s pravděpodobností < 1, v opačném případě je **trvalý** (angl. *persistent, recurrent*).
Speciální případ: Stav i je **absorpční** (angl. *absorbing*), jestliže $p_{ii} = 1$, tj.

$$p_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Věta 1. *Stav i je trvalý* $\iff \sum\limits_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)} = \infty\,.$

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Číslo $\sum\limits_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)}$ je střední hodnota počtu návratů. S pravděpodobností 0 se nevrátíme. S pravděpodobností 1 se aspoň jednou vrátíme. Pravděpodobnost, že 1. návrat bude i poslední, je 0. Pravděpodobnost, že n-tý návrat bude poslední, je 0 pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To je spočetně mnoho jevů, tedy pravděpodobnost, že počet návratů bude konečný, je 0. S pravděpodobností 1 se vrátíme nekonečněkrát. „$\Longleftarrow$“ Předpokládejme, že stav i je přechodný. Označme $q < 1$ pravděpodobnost, že se někdy vrátíme. Po prvním návratu následuje druhý s podmíněnou pravděpodobností q, celkově s pravděpodobností q^2, n-tý s pravděpodobností q^n. Celkový součet pravděpodobností návratů $\sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)}$ je roven součtu pravděpodobností n-tého návratu přes všechna n,

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} < \infty\,.$$

□

Důsledek 2. *Stav i je přechodný* $\iff \sum\limits_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)} < \infty\,.$

Perioda stavu i je největší společný dělitel všech čísel t, pro která $p_{ii}^{(t)} > 0$.
Stav je **periodický** (angl. *periodic*), jestliže má periodu $t > 1$, v opačném případě je **neperiodický** (angl. *aperiodic*).
Nutná podmínka: Je-li stav i periodický, musí být odpovídající prvek na diagonále $p_{ii} = 0$.
Stav je **ergodický** (angl. *ergodic*), jestliže je trvalý a neperiodický.

Příklad 15 (náhodná procházka v cyklu). *Pro náhodnou procházku v cyklu sudé délky mají všechny stavy periodu 2 (přecházíme mezi sudými a lichými), jsou trvalé a periodické. Pro náhodnou procházku v cyklu liché délky mají všechny stavy periodu 1 (přestože se do nich nelze vrátit v 1 kroku!) a jsou ergodické.*

Množina trvalých stavů je **uzavřená**, jestliže ji nelze opustit.
Markovův řetězec je **nerozložitelný**, jestliže neobsahuje vlastní (=menší neprázdnou) *uzavřenou* podmnožinu stavů, tj. z každého stavu jsou všechny stavy dosažitelné.
$\Rightarrow$ Nemá přechodné stavy.
Dosažitelnost (BÚNO: v obou směrech) rozděluje všechny *trvalé* stavy na disjunktní uzavřené množiny (=třídy) stavů. (Dosažitelné jsou právě ty dvojice stavů, které patří do stejné třídy.)
Každou třídu tvoří *nerozložitelný* Markovův řetězec, v němž všechny stavy mají stejnou periodu.
$\Rightarrow$ Pokud jsou všechny stavy trvalé a řetězec je rozložitelný, lze matici přechodu vyjádřit jako *blokově diagonální* ($\mathbf{0}$ je nulová matice):

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{D}_k \end{pmatrix}.$$

(Každý blok odpovídá jedné uzavřené podmnožině, k tomu je ale potřeba upravit pořadí stavů, a tím i řádků a sloupců matice.)
Pokud existují přechodné stavy a zařadíme je až za trvalé, matice přechodu má tvar

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{D}$ vyjadřuje pravděpodobnosti přechodů mezi trvalými stavy, $\boldsymbol{Q}$ mezi přechodnými a $\boldsymbol{R}$ vyjadřuje pravděpodobnosti přechodů z přechodných stavů do trvalých. Po rozkladu množiny trvalých stavů na nejmenší uzavřené podmnožiny dostaneme tvar

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{D}_k & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2 & \cdots & \boldsymbol{R}_k & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}.$$

Příklad 16 (basketbal – pokračování). *Matice přechodu po permutaci stavů byla*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & b & 1-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_2 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 stavy jsou trvalé (dokonce absorpční), zbývající 2 přechodné,

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1-a \\ 1-b & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Příklad 17 (**otevřené restaurace ve vzdálenosti 2** – pokračování)**.**

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutací stavů $(1, 5, 2, 3, 4)$ *dostaneme matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 1-c & 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 3 přechodné,

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1-c & 0 \\ c & 0 & 1-c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-c \end{pmatrix}.$$

Příklad 18 (**zavřené restaurace ve vzdálenosti 2** – pokračování)**.** *Sloučením dvou kroků do jednoho a přeskupením stavů („napřed liché, pak sudé“) jsme dospěli k blokově diagonální matici:*

$$\begin{pmatrix} c & 1-c & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,c-c^2 & (1-c)^2 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 1-c^2 \end{pmatrix}.$$

Tento řetězec lze rozložit na 2 nerozložitelné: jeden se 3 stavy (odpovídajícími lichým, $1, 3, 5$, *v původní reprezentaci), druhý se 2 stavy (odpovídajícími původním sudým,* $2, 4$*). Všechny stavy jsou ergodické.*

Cvičení 4. *[Wasserman 2004] Markovův řetězec má maticí přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.05 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete přechodné a trvalé stavy a jejich periodu.

Cvičení 5. *[Hsu 1996] Markovův řetězec má maticí přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Je 1. *stav periodický?*

5 Asymptotické chování Markovových řetězců s konečně mnoha stavy

Metody řešení:

- Speciální případy lze řešit exaktně.
- Obecně potřebujeme určit $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$. Pro matici řádu 2 viz Dodatek 9.
- Obtížné úlohy lze simulovat na počítači (metoda MCMC=Markov Chain Monte Carlo) a získat tak aspoň představu o jejich vlastnostech.

5.1 Přechodné stavy

Věta 2. *Pravděpodobnosti přechodných stavů konvergují k* 0.

Důkaz. V konečném čase T se z přechodného stavu přejde do některého trvalého s pravděpodobnos aspoň $\varepsilon > 0$, v některém z přechodných stavů zůstáváme s pravděpodobností nejvýše $1 - \varepsilon$. V čase $2T$ zůstáváme v některém z přechodných stavů s pravděpodobností nejvýše $(1-\varepsilon)^2$, v čase kT s pravděpodobností nejvýše $(1-\varepsilon)^k \to 0$ pro $k \to \infty$. □

Důsledek 3. *S pravděpodobností* 1 *se dostaneme do některé uzavřené množiny trvalých stavů a v té již zůstaneme.*

Důsledek 4. *Existuje trvalý stav.*

Otázky:
Do jakých trvalých stavů přejdeme z přechodných? Za jak dlouho?

Věta 3. *Nechť stavy* $1, \dots, i$ *jsou absorpční,* $i+1, \dots, n$ *přechodné. Pak matice přechodu má tvar*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_i & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} ,$$

kde $\boldsymbol{I}_i$ *je jednotková matice řádu* i*. Pravděpodobnost, že z přechodného stavu* $j > i$ *skončíme v absorpčním stavu* $k \le i$*, je prvek na pozici* $(j-i, k)$ *v matici*

$$(\underbrace{\boldsymbol{I}_{n-i} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^3 + \dots}_{\boldsymbol{F}})\,\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{R},$$

kde $\boldsymbol{I}_{n-i}$ *je jednotková matice řádu* $n-i$ *a*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_{n-i} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^3 + \dots$$

*je **fundamentální matice** tohoto řetězce.*

Důkaz. (částečný) Tvar matice přechodu jsme již odvodili. Matice $\boldsymbol{Q}$ popisuje „recyklaci“ přechodných stavů a matice $\boldsymbol{R}$ jejich nevratnou přeměnu na trvalé. □

Pokud jsou pouze přechodné a absorpční stavy, pak je lze seřadit tak, jak požaduje předchozí věta.

Věta 4.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_{n-i} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^3 + \ldots = (\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,.$$

Důkaz. (částečný) Označme

$$\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{I}_{n-i} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^3 + \ldots + \boldsymbol{Q}^t\,.$$

Pak

$$(\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^2 - \boldsymbol{Q}^3 + \ldots - \boldsymbol{Q}^{t+1} = \boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q}^{t+1}\,.$$

Matice $\boldsymbol{Q}$ má všechny součty řádků nejvýše 1 a některé menší než 1. O takových maticích je známo, že

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{Q}^t = \boldsymbol{0}$$

a že $\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q}$ je regulární. Tudíž

$$\lim_{t\to\infty} (\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{I}_{n-i}\,,$$

$$\boldsymbol{F} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{F}_t = (\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,.$$

□

Příklad 19 (**basketbal** – pokračování)**.** *Matice přechodu po permutaci stavů byla*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & b & 1-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 2 přechodné,

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1-a \\ 1-b & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a+b-a\,b} \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 1-b & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \frac{1}{a+b-a\,b} \begin{pmatrix} a & b\,(1-a) \\ a\,(1-b) & b \end{pmatrix}.$$

Začíná Alice (stav 3*, tj.* 1*. přechodný), pravděpodobnosti přechodů do absorpčních stavů jsou tedy v* 1*. řádku výsledné matice.*

Alice vyhraje s pravděpodobností $\dfrac{a}{a+b-a\,b}$, *Bob s pravděpodobností* $\dfrac{b\,(1-a)}{a+b-a\,b}$.

Např. pro $a = 1/2$, $b = 1/3$ *Alice vyhraje s pravděpodobností* $3/4$, *Bob s pravděpodobností* $1/4$.

Příklad 20 (otevřené restaurace ve vzdálenosti 2 – pokračování). *Permutací původních stavů* $(1,5,2,3,4)$ *jsme dostali matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 1-c & 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 3 přechodné,

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1-c & 0 \\ c & 0 & 1-c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & c-1 & 0 \\ -c & 1 & c-1 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2\,c^2 - 2\,c + 1} \begin{pmatrix} 1-c+c^2 & 1-c & (1-c)^2 \\ c & 1 & 1-c \\ c^2 & c & c^2-c+1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \frac{1}{2\,c^2 - 2\,c + 1} \begin{pmatrix} c\,(1-c+c^2) & (1-c)^3 \\ c^2 & (1-c)^2 \\ c^3 & (1-c)\,(1-c+c^2) \end{pmatrix}.$$

Např. pro $c = 2/3$ *dostáváme*

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{14}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}.$$

Tato matice udává pravděpodobnosti výsledků pro libovolný přechodný počáteční stav (i pro jejich směs, tj. počáteční rozdělení, kterým ji stačí vynásobit zleva). Např. pro rovnoměrné rozdělení počátečních stavů dostaneme

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{14}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{45} & \frac{11}{45} \end{pmatrix}.$$

Co když trvalé stavy nejsou všechny absorpční?
Můžeme ignorovat rozdíly mezi trvalými stavy, které jsou navzájem dosažitelné: Každou nerozložitelnou uzavřenou množinu stavů nahradíme jedním „novým“ stavem, který již dále nerozlišujeme. Ten je absorpční.
Tím jsme převedli úlohu na předcházející (máme pouze přechodné a absorpční stavy).
Dozvíme se, s jakou pravděpodobností skončíme v které nerozložitelné uzavřené množině.
Kdybychom chtěli vědět pravděpodobnosti stavů uvnitř této množiny, analýza by byla složitější (záleží nejen na tom, přes který stav do ní vstoupíme, ale také, kdy).

Už víme, že s pravděpodobností 1 přejdeme do nějaké nerozložitelné uzavřené množiny, kterou už neopustíme.
Otázka je, co se děje dál.

5.2 Nerozložitelné Markovovy řetězce

Stacionární rozdělení pravděpodobností $\boldsymbol{p}$ je takové, které se zachovává, tj.

$$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\,.$$

Lze je najít vyřešením této (homogenní) soustavy lineárních rovnic pro $\boldsymbol{p}$ s dodatečnou podmínkou, že součet neznámých je 1.

Věta 5. *Jestliže **nerozložitelný** Markovův řetězec má **všechny stavy ergodické**, pak má jediné stacionární rozdělení pravděpodobností; k tomu konverguje při libovolném počátečním rozdělení.*

Důsledek 5. *V tom případě $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$ existuje a je rovna matici, jejíž všechny řádky jsou rovné stacionárnímu rozdělení.*

Příklad 21 (**zavřené restaurace ve vzdálenosti 2** – pokračování)**.** *Pro liché stavy jsme dostali zjednodušený popis, v němž 2 kroky považujeme za 1:*

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} c & 1-c & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 \\ 0 & c & 1-c \end{pmatrix},$$

např. pro $c = 2/3$

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Tento Markovův řetězec je nerozložitelný a má všechny stavy ergodické, takže má jediné stacionární rozdělení pravděpodobností, které dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$(a, b, 1-a-b)\,\boldsymbol{P}_Z = (a, b, 1-a-b)\,,$$

$$(a, b, 1-a-b) = \left(\frac{8}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{15}\right).$$

Poznámka 1. *Stacionární rozdělení může existovat i u jiných Markovových řetězců, ale nemusíme se k němu přiblížit.*
Např. pro

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je rozdělení $(1/3, 1/3, 1/3)$ *stacionární, ale z počátečního rozdělení* $(1, 0, 0)$ *se k němu nepřiblížíme.*

Uvažujme **nerozložitelný** Markovův řetězec, který **není ergodický**.
Nutná podmínka: Matice přechodu musí mít nulovou diagonálu.
Všechny stavy mají stejnou periodu $T > 1$.
Lze je rozdělit na T disjunktních tříd $M_1, \ldots, M_T$ tak, že z každé třídy lze v jednom kroku přejít pouze do následující (a z M_T do M_1).
Do každé třídy se vrátíme po T krocích.
Sloučením T kroků do jednoho dostaneme Markovův řetězec s maticí přechodu $\boldsymbol{P}^T$.
Ten je rozložitelný, třídy $M_1, \ldots, M_T$ odpovídají nerozložitelným Markovovým řetězcům, které mají všechny stavy ergodické, takže mají jediné stacionární rozdělení pravděpodobností.
$\Rightarrow$ Až na to, že se periodicky prochází mezi třídami $M_1, \ldots, M_T$, můžeme asymptotické chování uvnitř nich určit stejně jako v předchozím případě.

Cvičení 6. *[Wasserman 2004] Najděte stacionární rozdělení Markovova řetězce s maticí přechod*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 \\ 0.05 & 0.5 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 7 (rosnička)**.** *(upraveno dle [Wasserman 2004]) Rosnička skáče po k schůdcích. Každým skokem se s pravděpodobností $c \in (0,1)$ dostane o schůdek výš, s pravděpodobností $1-c$ spadne zpět do vody a začíná od začátku. Z nejvyššího schůdku vždy spadne do vody (=„nejnižší schůdek“). Kde ji máme hledat, tj. jaká je pravděpodobnost jejího výskytu na jednotlivých schůdcích po dlouhém průběhu? Řešte pokud možno obecně, pak pro hodnoty $k = 4$, $c = 1/2$.*

5.3 Rozložitelné Markovovy řetězce

bez přechodných stavů se řeší rozkladem na nerozložitelné. Mohou existovat stacionární rozdělení, ale nemusí být limitou.

Příklad 22. *Pro*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_2$$

jsou všechna rozdělení stacionární. Pro

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou stacionární všechna rozdělení $\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, \frac{1-c}{2}, \frac{1-c}{2}\right)$, $c \in \langle 0, 1\rangle$, ale z počátečního rozdělení $(0,0,0,1)$ se k žádnému stacionárnímu neblížíme.

5.4 Příklady

Příklad 23 (**chcete být milionářem?** – zjednodušené zadání bez záchytných bodů)**.** *Hráč zaplatí za vstup do hry. Odpovídá na otázky, pravděpodobnost, že zná správnou odpověď, je $c \in (0,1)$. Po správné odpovědi může skončit s výhrou $1, 2, 4, 8, \ldots$, obecně 2^{k-1}, kde k je počet správně zodpovězených otázek. Po chybné odpovědi končí a nedostává nic.*

- *Jak dlouho má hrát, aby maximalizoval zisk? (Délka hry a výše výhry není omezena.)*
- *Jaké je při optimální strategii rozdělení, střední hodnota a rozptyl výhry po k kolech (resp. vyřazení v nejvýše k-tém kole)?*
- *Jaká je adekvátní cena za vstup do hry?*

Hráč zaplatil za vstup do hry, určitě má hrát první kolo. Před k-tým kolem (pokud do něj postoupí) se rozhoduje mezi jistou výhrou 2^{k-1} a další otázkou, která může vést k výhře buď 0, nebo 2^k (s pravděpodobností c). Optimální rozhodnutí tedy bude vždy stejné (závislé na c, nikoli na k). Pro $c < 1/2$ končí po 1. kole. Pro $c > 1/2$ je optimální hrát co nejdéle. Pak matice přechodu je

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-c & c \end{pmatrix},$$

první stav (vyřazení) je absorpční, druhý (pokračování ve hře) je přechodný, takže ***pravděpodobnost výhry je nulová****!*
Výhra X_k *po* k *kolech má alternativní rozdělení,*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_k &= c^k\, 2^{k-1}\,, \\ \mathrm{D}X_k &= \mathrm{E}X_k^2 - (\mathrm{E}X_k)^2 = c^k\, 2^{2(k-1)} - c^{2k}\, 2^{2(k-1)} = (1-c^k)\, c^k\, 2^{2(k-1)}\,. \end{aligned}$$

Pro $c > 1/2$ *je*

$$\lim_{k\to\infty} c^k\, 2^{k-1} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} (2\,c)^k = \infty\,,$$

tedy ***adekvátní cena za vstup do hry je nekonečná****!*

Cvičení 8. *Popište Markovův řetězec, popisující hru „chcete být milionářem?“ se záchytnými body a omezeným počtem kol.*

Příklad 24 (ruinování v ruletě). *V ruletě sázka na barvu přináší výhru ve výši dvojnásobku vkladu s pravděpodobností* d *o málo menší než* $1/2$ *(dle typu rulety* $\frac{24}{49}$*,* $\frac{18}{37}$ *nebo* $\frac{18}{38} = \frac{9}{19}$*). Hráč vsadí nejprve* 1000 *EUR. Po první výhře končí. Po každé prohře vsadí dvojnásobnou částku než v předchozím kole. Jaké je rozdělení a střední hodnota jeho výhry?*
Jde o obdobu hry „chcete být milionářem?“ s vyměněnými rolemi hráče a bankéře a $c = 1-d$*. Bankéři se hra „vyplácí“, přestože má nulovou pravděpodobnost výhry. Nereálný je předpoklad, že hru lze hrát libovolně dlouho.*

Cvičení 9. *Jak bude vypadat „ruinování v ruletě“, jestliže hráč (případně i bankéř) má omezené finance?*

Cvičení 10 (petrohradský paradox). *Hráč zaplatí za účast ve hře, v níž hází mincí. Padne-li líc, vyhraje 1 EUR. Padne-li rub, hra pokračuje a výhra se zdvojnásobuje, tj. padne-li líc poprvé v* k*-tém hodu, výhra je* 2^{k-1} *EUR. Jaká je adekvátní cena za účast ve hře?*

Cvičení 11 (prodlužovačky)**.** *Prodlužovačky s pravděpodobností* $c \in (0,1)$ *mění pořadí vodičů (fáze* $\leftrightarrow$ *nulák). Jaká je pravděpodobnost, že sériové spojení* k *prodlužovaček mění pořadí vodičů?*

Cvičení 12 (informační kanál)**.** ** Binární informační kanál přenese* 0 *s pravděpodobností* 0.1 *jako* 1*,* 1 *s pravděpodobností* 0.2 *jako* 0*. Spojíme jich* k *do série. Jaké jsou pravděpodobnosti chyb? Jaký bude výstup pro* $k \to \infty$*?*

6 Markovovy řetězce s nekonečně mnoha stavy

Místo násobení matic bychom potřebovali nekonečné sumy.
Klasifikace stavů je složitější o další možnosti (**nulový** stav), nemusí existovat trvalý stav...
Lze setrvat v přechodných stavech (nekonečně mnoha).

Příklad 25 (nekonečná náhodná procházka)**.** *[Wasserman 2004, Zvára, Štěpán 2002]*

- *Pokud oba směry volíme se stejnou pravděpodobností, do výchozího bodu se vrátíme s pravděpodobností* 1*. S pravděpodobností* 1 *navštívíme výchozí bod (stejně jako všechny ostatní!)* ***nekonečněkrát****, přesto* ***střední doba mezi návraty je nekonečná****.*

- *Pokud oba směry volíme se různou pravděpodobností, do výchozího bodu se vrátíme s pravděpodobností < 1. Pak jsou **všechny stavy přechodné**.*

Příklad 26 (nekonečná náhodná procházka ve více dimenzích)**.** *[Enc. Math.] Při nekonečné náhodné procházce se vždy vydáme do některého ze sousedních bodů, a to se stejnou pravděpodobností.*

- *V 1 dimenzi se do výchozího bodu vrátíme s pravděpodobností* 1.
- *Ve* 2 *dimenzích (volíme ze* 4*-okolí) se do výchozího bodu vrátíme s pravděpodobností* 1.
- *Ve* 3 *dimenzích (volíme ze* 6*-okolí) se do výchozího bodu vrátíme s pravděpodobností přibližně* 1.

7 Příklady aplikací

- Hromadná obsluha a fronty
- Klasifikace, rozpoznávání *(od třídění chmelu po rozpoznávání obličejů)*
- Pohyb nosičů náboje v polovodičích, rekombinace
- Chemické a jaderné reakce (řetězová reakce)
- Vývoj populací
- ...

Příklad 27. *Ve stabilní populaci budou mít nakonec všichni stejná příjmení.*

Příklad 28. *S jakou pravděpodobností vymřeme.*

8 Co zde nebylo

8.1 Příklad použití: Luštění šifer

Doporučená literatura: [Diaconis 2009].
Pro přiřazení písmen neznámým znakům stačí frekvence výskytů dvojic po sobě jdoucích znaků.
Model: Markovův řetězec, který má stejnou matici přechodu jako jazyk zprávy.
(Ignorujeme delší sekvence než 2 i význam slov a textu.)
Kritérium: Maximální věrohodnost.
(Vliv počátečního rozdělení stavů ignorujeme.)
Metoda optimalizace *(parametrický prostor je obrovský!)*: Metropolisův algoritmus.
Počáteční přiřazení znaků zvolíme libovolně, pak náhodně vyměňujeme dvojice znaků, přičemž preferujeme ty výměny, které zvyšují věrohodnost.
K výměně nemusí dojít, tím se příslušný Markovův řetězec *(úplně jiný než v modelu, zde stavy jsou **zobrazení** znaků)* stává ergodický a konverguje ke stacionárnímu rozdělení, které má vysokou věrohodnost.

8.2 Kdy se vrátíme do stejného stavu?

Doporučená literatura: [Hsu 1996].

Příklad 29. *Alice a Bob házejí mincí. Alice vyhrává, pokud padne 2× za sebou líc, Bob, pokud padne líc a hned po něm rub. V ostatních případech hra pokračuje. Jsou jejich šance na výhru stejné? Budou ve velmi dlouhém řetězci obě sekvence přibližně stejně časté?*

8.3 Nehomogenní Markovovy řetězce

Asymptotické chování je složitější.

8.4 Markovovy procesy

Doporučená literatura: [Apl. mat. 1978, Hsu 1996, Papoulis, Pillai 2002].
Díky spojitému času dovolují modelovat např. Brownův pohyb, difuzi...

9 Dodatek: Mocniny stochastických matic řádu 2

Obecná stochastická matice řádu 2 je tvaru

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \langle 0, 1\rangle$.
A. Pokud $a = b = 0$, je $\boldsymbol{P}$ jednotková matice a $\boldsymbol{P}^t = \boldsymbol{P}$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$.
B. Nadále předpokládáme, že $a + b > 0$. Pak

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1},$$

kde

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

má na diagonále vlastní čísla matice $\boldsymbol{P}$, $\lambda = 1 - a - b \in \langle -1, 1)$,

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

má ve sloupcích odpovídající pravé vlastní vektory (na velikosti nezáleží),

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

má v řádcích odpovídající levé vlastní vektory.
Mocniny diagonální matice lze počítat po složkách,

$$\boldsymbol{D}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix}$$

pro všechna $t \in \mathbb{N}$. Protože

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}^2\,\boldsymbol{T}^{-1}\,,$$
$$\boldsymbol{P}^t = \underbrace{\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1}\,\ldots\,\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1}}_{t\times} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}^t\,\boldsymbol{T}^{-1}\,,$$

lze mocniny matice $\boldsymbol{P}$ vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^t &= \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix} \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & -a\,\lambda^t \\ 1 & b\,\lambda^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b + a\,\lambda^t & a - a\,\lambda^t \\ b - b\,\lambda^t & a + b\,\lambda^t \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \left(\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \lambda^t \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right),
\end{aligned}$$

kde $\lambda = 1 - a - b$.
Speciální případy:

- $a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$,
$$\boldsymbol{P}^t = \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$
  nezávisí na t.

- $a = b = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$,
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{P}^t &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } t \text{ liché}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{pro } t \text{ sudé}. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Pro $|\lambda| < 1$, tj. $a + b \notin \{0, 2\}$, je
$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{P}^t = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Podobně lze počítat i mocniny matic vyšších řádů.
Používají se v kapitole 5.

Literatura

[Apl. mat. 1978] kol.: *Aplikovaná matematika.* Oborové encyklopedie SNTL, Praha, 1978.

[Diaconis 2009] Diaconis, P.: The Markov Chain Monte Carlo Revolution. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (2009), no. 2, 179–205.

[Enc. Math.] Hazewinkel, M.: *Encyclopaedia of Mathematics.* Kluwer Academic Publishers, 1995.

[Hsu 1996] Hsu, H.P.: *Probability, Random Variables, and Random Processes.* McGraw-Hill, 1996.

[MN: PMS] Navara, M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* ČVUT, Praha, 2007.

[Papoulis, Pillai 2002] Papoulis, A., Pillai, S.U.: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.* McGraw-Hill, Boston, 2002.

[Wasserman 2004] Wasserman, L.: *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference.* Springer Texts in Statistics, 2nd ed., 2004.

[Zvára, Štěpán 2002] Zvára, K., Štěpán, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* 2. vydání, Matfyzpress, MFF UK, Praha, 2002.