1 Opakování: pravděpodobnost

Vysvětlete termíny:

1.1 Náhodný jev (elementární jev, prostor elementárních jevů)

Příklad: Házení kostkou.

1.2 Pravděpodobnost

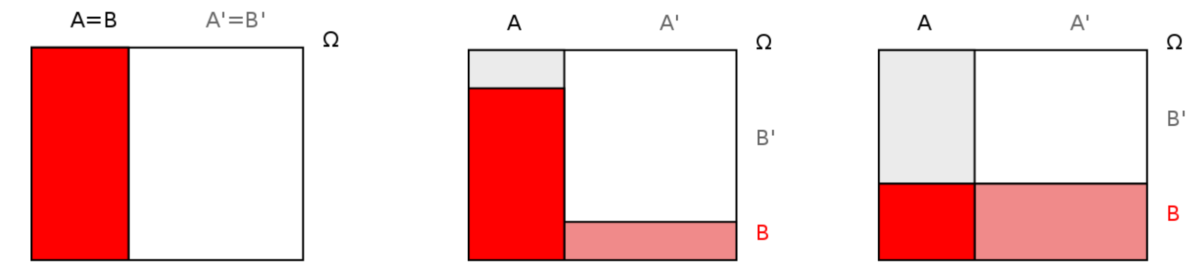
(funkce definovaná na podmnožinách prostoru elementárních jevů)

1.3 ⋆Pravděpodobnostní prostor: $(\Omega, \mathcal{A}, p)$

1.4 Nezávislost náhodných jevů

Příklad: Příprava na zkoušku.
Alice: “Bobe, jak je pravděpodobné, že tu zkoušku oba uděláme?”
Bob: “Řekl bych 70%.”
Alice: ”Ale včera jsi tvrdil, že ji na 90% uděláš a že já mám stejnou šanci.“
Bob: ”No a¿‘ Alice: ”To není možné, a jestli to nevidíš, tak tu zkoušku asi neuděláš.“

Příklad: Házení kostkou: jev “padne liché číslo” vs. jev “padne číslo větší než 3”. Jsou tyto jevy nezávislé?



identické jevy („100%“ závislé) (\u201ečástečně“) závislé nezávislé

Obr. 1: Ilustrace závislosti a nezávislosti dvou jevů.

Příklad: Házení dvěma kostkami. Jev A: na první kostce padne liché číslo, jev B: na druhé kostce padne sudé číslo, jev C: součet čísel na obou kostkách je sudý. Jsou tyto 3 jevy nezávislé? Jsou tyto jevy po dvou nezávislé?

1.5 Podmíněná pravděpodobnost

Ukázat přes geometrickou představu 2 množin A a B s neprázdným průnikem.

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \qquad \text{(za podmínky } p(B) > 0) \tag{1}$$

Příklad: Tenista má první podání úspěšné s pravděpodobností 0,6; druhé s pravděpodobností 0,8. S jakou pravděpodobností se dopustí dvojchyby?

Řešení: jev N_1 - chyba v prvním podání, jev N_2 - chyba ve druhém podání. $p(N_1) = 0,4$, $p(N_2|N_1) = 0,2$ (pozor, toto není $p(N_2)$!). $P(N_1 \cap N_2) = p(N_2|N_1)p(N_1) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

1.6 Úplná pravděpodobnost

aneb celková pravděpodobnost jevu A se dá „spočítat po kouskách a posčítat“

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) \tag{2}$$

Příklad: Spočtěte průměrné zastoupení studentek ve škole, která má 2 posluchárny a 2 šatny a v každé místnosti je jiné zastoupení dívek. (Předpokládáme, že průměrné zastoupení studentek nelze zjistit přímo, např. anketou.)

Řešení: Jev D - náhodně vybraný(á) student(ka) je dívka. Jev M_i - student(ka) se nachází v místnosti i.

$$p(D) = \sum_{i=1}^{4} p(D \cap M_i) = \sum_{i=1}^{4} p(D|M_i)p(M_i)$$

1.7 Bayesův vzorec

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

aneb výpočet posteriorní podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$ z apriorních pravděpodobnost $P(A)$, nebo přepočet podmíněné pravděpodobnosti $P(B|A)$ na podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$.

Označuje-li např. $P(B|A)$ podmíněnou pravděpodobnost určitého výsledku klinického testu (jev B) u zdravého člověka (podmínka A), pak Bayesův vzorec dává na základě výsledku testu (a apriorních pravděpodobností) podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$ toho, že testovaná osoba je zdravá či nemocná.

Příklad: Klinický test, jehož účelem je odhadnout, zda pacient má určitou nemoc, má senzitivitu (pravděpodobnost toho, že u nemocného bude test pozitivní) 90% a specificitu (pravděpodobnost toho, že u zdravého bude test negativní) 95%. Spočítejte pravděpodobnost toho, že pacient s pozitivním testem nemoc skutečně má, a dále pravděpodobnost toho, že pacient s negativním testem nemoc skutečně nemá. Předpokládejme, že nemocí trpí 20% populace.

Řešení: Jev, že pacient je nemocný, označíme jako N, jev opačný jako Z. Pozitivní výsledek testu označíme jako Poz a negativní jako Neg. Víme, že $p(Poz|N) = 0,9$, $p(Neg|Z) = 0,95$ a $p(N) = 0,2$.

Použitím Bayesova vzorce dostáváme:

$$p(N|Poz) = \frac{p(Poz|N)p(N)}{p(Poz)},$$

kde $p(Poz)$ neznáme, ale dokážeme spočítat pomocí věty o úplné pravděpodobnosti:

$$p(Poz) = p(Poz|N)p(N) + p(Poz|Z)p(Z).$$

Z toho

$$p(N|Poz) = \frac{p(Poz|N)p(N)}{p(Poz)} = \frac{p(Poz|N)p(N)}{p(Poz|N)p(N) + p(Poz|Z)p(Z)} = \frac{0,9 \cdot 0,2}{0,9 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,8} \approx 0,818.$$

Pozitivní výsledek testu tedy přítomnost nemoci neindikuje příliš spolehlivě.

Podobně

$$p(Z|Neg) = \frac{p(Neg|Z)p(Z)}{p(Neg)} = \frac{p(Neg|Z)p(Z)}{p(Neg|Z)p(Z) + p(Neg|N)p(N)} = \frac{0,95 \cdot 0,8}{0,95 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2} \approx 0,974,$$

tedy $p(N|Neg) \approx 0,026$ a falešně negativní výsledek lze naštěstí čekat jen u necelých tří procent testovaných osob.

Která chyba vadí víc: falešná pozitivita nebo falešní negativita? Jaká je celková očekávaná chyba a co je její hlavní příčinou? Jak byste test vylepšili?

Příklad: V obléhaném městě, které se skládá ze dvou vzájemně oddělených čtvrtí Mordor (tvoří desetinu města) a Londor (tvoří zbylých 90% města), nepřítel kontaminoval jedem vodovod zásobující Mordor. 90% mordorských obyvatel je otráveno (všichni krom těch, kteří se vody zatím nenapili). V Londoru je otráveno pouze 10% obyvatel (patrně z jiných zdrojů, než z vody). Jednomu obyvateli se z města podaří tajnou chodbou uniknout, avšak záhy umírá – byl otráven. Dá se odhadnout, zda tajná chodba vede do Mondoru, nebo Londoru? (Pro zjednodušení budeme předpokládat, že pravděpodobnost toho, že chodbou z města někdo unikne, je stejná, ať už chodba vede kamkoli.) Jak se tato pravděpodobnost změní, vyjde-li z chodby další otrávený?

Řešení:

Jev, že chodba vede do jedem otrávené části města, označíme jako J a jev, že člověk přicházející chodbou je otrávený a zemře, jako M.

Za apriorní (předem očekávanou) pravděpodobnost toho, že chodba vede do otrávené části města, musíme (bez znalosti dodatečných informací) vzít poměr plochy otrávených částí města vůči celému městu, tedy $p(J) = 0,1$. Dále víme, že pravděpodobnost, že chodbou vedoucí do otráveného Mordoru někdo uteče a zemře, je $p(M|J) = 0,9$, a pravděpodobnost, že chodbou vedoucí do neotráveného Londoru někdo uteče a zemře, je $p(M|\bar{J}) = 0,1$. Poté, co chodbou přijde otrávený člověk, se pravděpodobnost, že chodba vede do otrávené části města, změní z $p(J)$ na $p(J|M)$:

$$p(J|M) \stackrel{Bayes}{=} \frac{p(M|J)p(J)}{p(M)} = \frac{p(M|J)p(J)}{\underbrace{p(M|J)p(J) + p(M|\bar{J})p(\bar{J})}_{\text{úplná pravděpodobnost}}} = \frac{0,9 \cdot 0,1}{0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,9} = \frac{1}{2}$$

Pravděpodobnost se zvýšila z apriorní pravděpodobnosti $0,1$ na posteriorní pravděpodobnost $0,5$. To znamená, že před tím, než z chodby kdokoli vyšel, mysleli jsme si, že chodba vede spíše do otrávené části města. Poté, co z chodby vyšel otrávený člověk, naprosto nevíme, zda chodba vede do trávené nebo neotrávené části města.

Pokud z chodby vystoupí další člověk a také zemře, změní se pravděpodobnost, že chodba vede do otrávené části města, dále na:

$$p(J|M_2, M_1) = \frac{p(M_2|J, M_1)p(J|M_1)}{p(M_2|J, M_1)p(J|M_1) + p(M_2|\bar{J}, M_1)p(\bar{J}|M_1)}.$$

Za předpokladu, že pravděpodobnost výskytu otráveného člověka v otrávené oblasti (resp. mimo otrávenou oblast) se po příchodu prvního otráveného nezmění (tj. pokud je ve městě hodně obyvatel a odchodem jednoho otráveného se pravděpodobnosti prakticky nezmění), platí $p(M_2|J, M_1) = p(M_2|J)$ a $p(M_2|\bar{J}, M_1) = p(M_2|\bar{J})$ a tedy

$$p(J|M_2, M_1) = \frac{p(M_2|J)p(J|M_1)}{p(M_2|J)p(J|M_1) + p(M_2|\bar{J})p(\bar{J}|M_1)} = \frac{0,9 \cdot 0,5}{0,9 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5} = 0,9.$$

Poté, co z chodby vyjde druhý otrávený, budeme tedy spíše přesvědčeni, že chodba vede do otrávené části města. Naši apriorní představu o tom, že chodba vede spíše do neotrávené části města, jsme tedy na základě dat byli nuceni zcela přehodnotit.

Pro srovnání: v případě, že by chodbou přišli (a vzápětí zemřeli) dva lidé nezávisle na sobě a my bychom aposteriorní pravděpodobnost toho, že chodba vede do otrávené části města, počítali nikoli postupně, ale najednou, došli bychom ke stejnému výsledku. Položili bychom

$$p(M_{1+2}|J) = p(M|J) \cdot p(M|J) = p(M|J)^2$$

a

$$p(M_{1+2}|\bar{J}) = p(M|\bar{J}) \cdot p(M|\bar{J}) = p(M|\bar{J})^2$$

a proto

$$
\begin{aligned}
p(J|M_{1+2}) &= \frac{p(M_{1+2}|J)p(J)}{p(M_{1+2}|J)p(J) + p(M_{1+2}|\bar{J})p(\bar{J})} \\
&= \frac{p(M|J)^2 p(J)}{p(M|J)^2 p(J) + p(M|\bar{J})^2 p(\bar{J})} \\
&= \frac{0,9^2 \cdot 0,1}{0,9^2 \cdot 0,1 + 0,1^2 \cdot 0,9} \\
&= \frac{0,9^2}{0,9^2 + 0,1 \cdot 0,9} \\
&= \frac{0,9}{0,9 + 0,1} \\
&= 0,9.
\end{aligned}
$$

1.8 Náhodná veličina

Náhodná veličina je striktně řečeno funkce definovaná na prostoru elementárních jevů:

★ měřitelná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$ splňující $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}$ pro každý interval I, tj. vzorem každého intervalu je měřitelná množina ze σ-algebry $\mathcal{A}$ (systému podmnožin prostoru elementárních jevů Ω.

Pro praktické účely budeme chápat náhodnou veličinu jako číslo, které vhodným způsobem charakterizuje náhodný jev, např. hmotnost nějakého pacienta, počet líců v sérii nezávislých hodů mincí, nebo doba bezchybného provozu nějaké součástky.

1.9 Realizace náhodné veličiny

ilustrace: 3 světy (reálný, zjednodušený reálný (modelový), „statistický“)

Příklad: Hmotnost studentů určitého kurzu – v modelovém a „statistickém“ světě graficky vyznačte jednu konkrétní realizaci náhodné veličiny „hmotnost“ a samotnou náhodnou veličinu „hmotnost“.

Nechat studenty vyznačit na reálné ose jedno pozorování - hmotnost a pak to samé chtít pro náhodnou veličinu, aby byli konfrontováni s tím, že vlastně nějakou hodnotu nakreslit nelze. Chová se náhodně (paralela s kvantovým světem a štěrbinovým experimentem). Jediné, co o ní víme, je jak se chová „typicky“, „průměrně“. Dojít k tomu, že někde je větší pravděpodobnost výskytu, jinde menší.

1.10 Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny

Příklad: Definujte rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny.

Pozor: u spojitého rozdělení $p(X = x) = 0$, proto používáme $p(X \leq x)$.

Příklad: Načtrtněte rozdělení pravděpodobnosti počtu líců při hodu mincí.

Příklad: Načtrtněte rozdělení pravděpodobnosti počtu ok při hodu kostkou.

Příklad: Načtrtněte rozdělení pravděpodobnosti počtu líců při dvou nezávislých hodech mincí.

1.11 Distribuční funkce $F_X(x)$ náhodné veličiny X

$F_X(x) \overset{def.}{=} p(X \leq x), x \in \mathbb{R}$

Vlastnosti distribuční funkce:

- $lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *(protože $lim_{x\to-\infty} p(X \leq x) = 0$)*
- $lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ *(protože $lim_{x\to\infty} p(X \leq x) = 1$)*

1.12 Hustota pravděpodobnosti f_X náhodné veličiny X

V případě jakých rozdělení o ní hovoříme?

Příklad: Načtrtněte distribuční funkci rozdělení pravděpodobnosti počtu líců při hodu mincí.

Příklad: Načtrtněte distribuční funkci rozdělení pravděpodobnosti počtu ok při hodu kostkou.

Příklad: Načtrtněte distribuční funkci rozdělení pravděpodobnosti počtu líců při dvou nezávislých hodech mincí.

Hustotu pravděpodobnosti definujeme u spojitých rozdělení.

U spojitého rozdělení platí, že $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$.

Příklad: Určuje $f_X(x) = sin(x)$ pro $0 \leq x \leq \pi$ hustotu pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny?

Řešení: Ne, $\int_0^\pi sin(t)dt = [-cos(t)]_0^\pi = 1-(-1) = 2$, tedy hustota se neintegruje do 1 a nejedná se o hustotu.

Příklad: Určuje $f_X(x) = 2 - x$ pro $0 \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$ hustotu pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny?

Řešení: Ne, $\int_0^{2+\sqrt{2}} f_X(x)dx = 1$, ale $f_X(2 + \sqrt{2}) < 0$.

Příklad: Načtrtněte hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci rovnoměrného rozdělení na intervalu (a, b).

1.13 Kvantilová funkce F_X^{-1}

Pro spojité ryze rostoucí inverzní funkce k F_X.

Příklad: Je dáno $p(X \leq x) = x$ pro $0 \leq X \leq 1$. Odvoďte a načtrtněte distribuční funkci F_X, hustotu f_X a kvantilovou funkci F_X^{-1}.

Řešení: Distribuční funkce $F_X(x)$ je právě $p(X \leq x) = x$. Hustota $f_X(x)$ je derivací $F_X(x)$, tedy $f_X(x) = 1$. Kvantilová funkce je inverzí k distribuční funkci, tedy $F_X^{-1}(u) = u$ (má smysl samozřejmě jen pro $0 < u < 1$).

Příklad: Je dáno $f_X(x) = 3x$ pro $0 \leq X \leq 1$. Odvoďte a načtrtněte distribuční funkci F_X, $p(X \leq x)$ a kvantilovou funkci F_X^{-1}.

Řešení: Nelze řešit: f_X není hustota, neintegruje se do 1.

Příklad: Je dáno $f_X(x) = 2x$ pro $0 \leq X \leq 1$. Odvoďte a načtrtněte distribuční funkci F_X, $p(X \leq x)$ a kvantilovou funkci F_X^{-1}.

Řešení: Distribuční funkce je integrál hustoty, tedy $F_X(x) = x^2$. $p(X \leq x) = F_X(x)$ z definice. Kvantilová funkce F_X^{-1} je inverzí k F_X, tedy $F_X^{-1}(u) = \sqrt{u}$ (má smysl samozřejmě jen pro $0 < u < 1$).

Příklad: V lese zakresleném na mapě jako rovnostranný trojúhelník o straně 10km se ztratilo dítě. Na záchranu se vypravily tři rojnice, z každé strany lesa jedna, které dokáží prohledávat terén rychlostí 500 m/hodinu. Za jak dlouho dítě najdou? Za jak dlouho bude pravděpodobnost, že dítě našli, stejná, jako že dítě ještě nenašli? Za jak dlouho bude pravděpodobnost, že dítě našli, rovna 75%, resp. 95%?
Nalezněte rozdělení vzdálenosti dítěte od nejbližšího okraje lesa a popište jeho hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci.

Řešení: Uvědomíme si, že stačí uvažovat jen část celého trojúhelníku mezi jednou stranou a těžištěm. Označíme-li $a = 10km$, je vzdálenost těžiště od strany třetinou délky těžnice (a zároveň výšky), tj. $\frac{\sqrt{3}}{2}a \approx 8,660km$, a pro jednoduchost si označíme toto číslo jako b. Potom hustota rozdělení pravděpodobnosti vzdálenosti dítěte od nejkratší strany bude největší v blízkosti strany (zde se totiž může dítě nacházet podél celé strany) a bude klesat směrem k těžišti (kde dítě již nebude mít žádnou volnost - pokud nebylo nalezeno dříve, musí být jedině v těžišti), a lze ji popsat jako

$$f(x) = lb - \frac{lb}{b}x = lb - lx = l(b-x),$$

kde konstantu l vypočteme tak, aby se hustota pravděpodobnosti integrovala do 1, tj. aby plocha pod hustotou byla jednotková:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}lbb &= 1 \\ l &= \frac{2}{b^2} \end{aligned}$$

tedy

$$f(x) = \frac{2}{b^2}(b-x).$$

Hledáme-li pravděpodobnost, že dítě bude nalezeno do určité doby (resp. vzdálenosti), tj. hledáme-li $p(X \leq x)$, hodí se zavést funkci $F(x) = p(X \leq x) = \int_{y=0}^{x} f(y)dy$.

Výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{y=0}^{x} f(y)dy \\ &= \int_{y=0}^{x} \frac{2}{b^2}(b-y)dy \\ &= \frac{2}{b^2}\left[by - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{x} \\ &= \frac{2}{b^2}(bx - \frac{x^2}{2}). \end{aligned}$$

Nyní budeme hledat takovou vzdálenost od kraje lesa, že pravděpodobnost, že dítě našli, bude stejná, jako že dítě ještě nenašli. Budeme tedy hledat takové x, aby $F(x) = 0,5$. Protože se ale budeme dále ptát na další otázky, můžeme rovnou řešit obecně jako $F(x) = c$:

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{2}{b^2}(bx - \frac{x^2}{2}) &= c \\ \frac{2}{b}x - \frac{x^2}{b^2} &= c \\ x^2 - 2bx + b^2c &= 0 \end{aligned}$$

a řešíme kvadratickou rovnici:

$$D = 4b^2 - 4b^2c = 4b^2(1-c) = (2b)^2\sqrt{1-c}$$

a protože $x < b$

$$x = \frac{2b - 2b\sqrt{1-c}}{2} = b(1-\sqrt{1-c}).$$

Tento vztah mezi c a x si můžeme označit jako $F^{-1}(c) = b(1-\sqrt{1-c})$.

Nyní dostáváme, že 50% pravděpodobnost nalezení dítěte nastane v okamžiku, kdy rojnice projdou $F^{-1}(0,5) = b(1-\sqrt{1-0,5}) \approx 2,537km$ lesa, tj. za cca 5 hodin bude již dítě s pravděpodobností $0,5$ zachráněno.

Pravděpodobnost, že bude zachráněno s pravděpodobností 75%, nastane, až bude prohledáno $F^{-1}(0,75) = b(1-\sqrt{1-0,75}) \approx 4,330km$ lesa, tedy cca za 8:40 hodin. Úplná záchrana pak bude zajištěna, až rojnice dojdou do těžiště, tedy až prohledají $F^{-1}(1) = b(1-\sqrt{1-1}) = b \approx 8,660km$ lesa, tedy cca za 17:19 hodin.

Poznamenejme, že funkce $F(x)$ se nazývá *distribuční funkce* a říká, jak pravděpodobné je, že dítě bude nalezeno v určité vzdálenosti od okraje lesa (obecně jak pravděpodobné je, že náhodná veličina nabývá nanejvýš dané hodnoty). Funkce $F^{-1}(c)$ se nazývá *kvantilová funkce* a říká, do jaké vzdálenosti dojde rojnice v okamžiku, kdy bude pravděpodobnost nalezení dítěte $P\%$ (obecně při jaké hodnotě náhodné veličiny bude pravděpodobnost jejího výskytu mezi $-\infty$ a touto hodnotou rovna dané pravděpodobnosti, např. $F^{-1}(0,5)$ určuje hodnotu, vlevo od níž je pravděpodobnost nalezení náhodné veličiny 50%).

1.14 Charakteristiky rozdělení (střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka)

Střední hodnota popisuje typickou[1] hodnotu náhodné veličiny. Počítá se jako vážený průměr všech možných relizací náhodné veličiny. Pro spojitou náhodnou veličinu X to je:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \tag{3}$$

pokud tento integrál existuje.

Pro diskrétní náhodnou veličinu X neprůměrujeme přes všechna reálná čísla, ale jen přes jednotlivé diskrétní realizace:

$$EX = \sum_i x_i p(X = x_i) \tag{4}$$

Pozn.: pomocí distribuční funkce můžeme definici sjednotit pro spojitou i diskrétní náhodnou veličinu na:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) dx \tag{5}$$

Vlastnosti střední hodnoty:

$$E(a + bX) = a + bEX \tag{6}$$
$$E(X + Y) = EX + EY \quad \text{(pokud } EX \text{ a } EY \text{ existují)} \tag{7}$$
$$E(XY) = EXEY \quad \text{(právě když jsou } X, Y \text{ nezávislé a pokud } EX \text{ a } EY \text{ existují)} \tag{8}$$

(a, b nenáhodné konstanty, X, Y náhodné veličiny)

Příklad: Uvedené vztahy odvoďte.

Příklad: Jaký očekáváte průměrný počet ok při hodu kostkou? *Tj. spočtěte střední hodnotu odpovídající náhodné veličiny.*

Řešení: $p(X = i) = \frac{1}{6}$ pro $i = 1, \ldots, 6$. Pak

$$EX = \sum_{i=1}^{6} p(X = i) i = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Příklad: Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny dané jako výsledek hodu falšovanou mincí, u níž panna padá 2x častěji, než orel. (Předpokládejme, že pannu reprezentujeme jako 0 a orla jako 1.)

[1] anglicky *expected*, odtud značení EX

Řešení: Protože $p(X=0) = \frac{2}{3}$ a $p(X=1) = \frac{1}{3}$,

$$EX = \sum_{i=1}^{2} p(X=i)\ i = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Příklad: Spočtěte střední hodnotu náhodné veličiny z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0,1)$.

Řešení: Protože hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0,1)$ je $f(x) = 1$, je

$$EX = \int_0^1 f(x)xdx = \int_0^1 1xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} = 0,5.$$

Pozn.: pro obecný interval (a,b) je $f(x) = \frac{1}{b-a}$, a tedy

$$EX = \int_a^b f(x)xdx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

Pro charakterizaci kolísání náhodné veličiny kolem střední hodnoty se používá rozptyl $varX$ definovaný jako:

$$varX = E(X - EX)^2 \tag{9}$$

Pozn.: Proč se používá čtverec a ne přímo $E(X - EX)$?
(Protože $E(X - EX) = E(X) - E(EX)) = EX - EX = 0$.)

Lze jednoduše ukázat, že $E(X - a)^2$ je minimalizován při volbě $a = EX$. V tomto smyslu je tedy střední hodnota opravdu „středem“ hodnot náhodné veličiny.

Vlastnosti rozptylu:

$$var(a + bX) = b^2 varX \tag{10}$$

$$varX = (EX^2) - (EX)^2 \tag{11}$$

$$var(X + Y) = varX + varY + 2cov(X,Y) \tag{12}$$

$$var(X + Y) = varX + varY \qquad \text{(pokud } X \text{ a } Y \text{ jsou nezávislé)} \tag{13}$$

(a, b nenáhodné konstanty, X, Y náhodné veličiny).
Přitom

$$cov(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY). \tag{14}$$

Příklad: Dokažte tvrzení (10 a 11).

Příklad: Spočtěte rozptyl náhodné veličiny popisující výsledek hodu (nefalšovanou) mincí.

Řešení: Označíme pannu jako 0 a orla jako 1 a můžeme postupovat přímo dosazením do vzorce $varX = E(X - EX)^2$, kde víme, že $EX = 0,5$:

$$var(X) = E(X - EX)^2 = \sum_{i=0}^{1} p(X=i)\ (X - EX)^2 = \frac{1}{2}(0 - 0,5)^2 + \frac{1}{2}(1 - 0,5)^2 = 0,5$$

Příklad: Spočtěte rozptyl náhodné veličiny z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0,1)$.

Řešení: Použijeme výpočetně přívětivější vzorec 11, tedy

$$\begin{aligned}
var(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\
&= \int_0^1 f(x)x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \int_0^1 1x^2 dx - \frac{1}{4} \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1^3}{3} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$