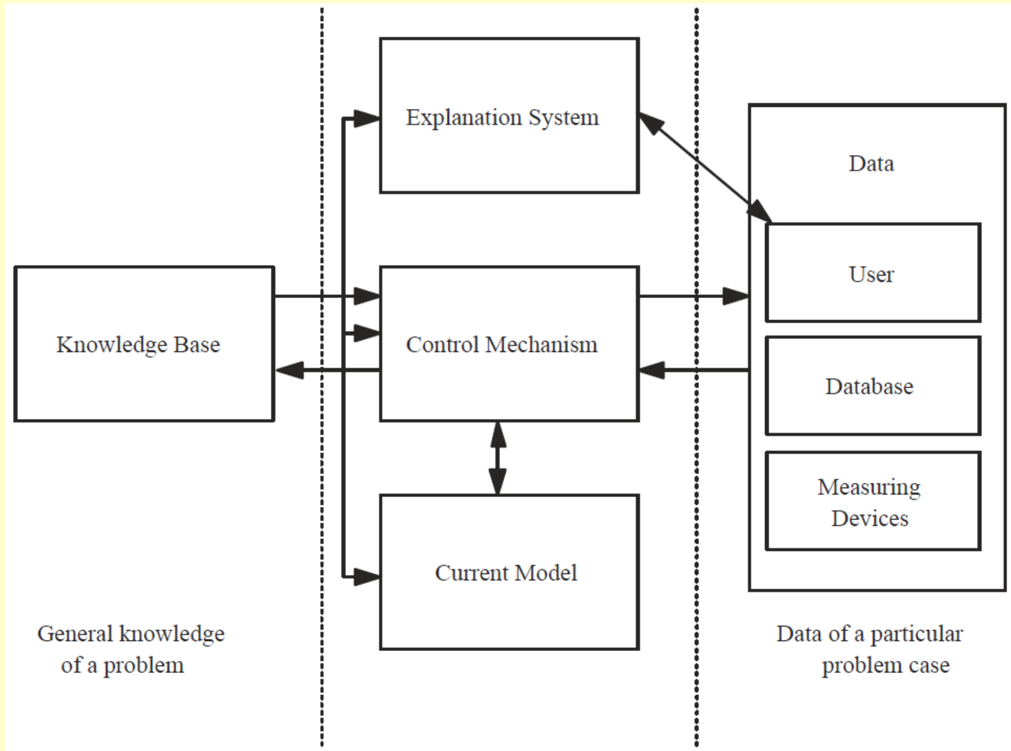
Expertní systémy

„Počítačové programy, simulující rozhodovací činnost experta při řešení složitých úloh a využívající vhodně kvality rozhodování na úrovni experta.“

Feingenbaum a kol., 1988

Typy úloh:

- Klasifikační
- Diagnostické
- Plánovací
- Hybridní
- Prázdné



Expertní systémy

- **Diagnostické**

  Množina hypotéz
  Uspořádání hypotéy podle „pravděpodobnosti“
  (viz Hájkova algebraická teorie)
  Příklady:

  - **Prospector** (SRI International)
    předpověděl ložisko molybdenu v hodnotě desítek miliard USD
  - **MYCIN** Edward H. Shortliffe (Stanford Medical School)
    klasifikace infekčních mozkových onemocnění
    později EMYCIN

- **Plánovací**

  Nalezení plánu = (sub)optimální cesty ve stavovém prostoru
  Příklad:

  - **R1** (později nzýván **XCON**, for e**X**pert **CON**figurer)
    John P. McDermott (Carnegie Mellon University)

Expertní systémy - historie

Počátky 1965 - 1970

DENDRAL: pomáhá identifikovat chemické sloučeniny na základě spektrografických dat - plánovací systém k odvozování struktur chemických látek na základě histogramů rozložení hmotností získaných ze spektrometru

MACSYMA: nástroje pro manipulaci s matematickými výrazy a vzorci, využíván např. nukleárními fyziky, kteří jsou často nuceni řešit soustavy velkého počtu rovnic

Výzkumné prototypy 1970 - 1975

MYCIN: na základě dostupných dat rychle určovat typy bakteriální infekce, kterými by mohl být nově hospitalizovaný postižen a navrhovat vhodnou léčbu antibiotiky tak, aby se stav pacienta stabilizoval do doby, než jsou dokončena delší laboratorní vyšetření

PROSPECTOR: slouží k vyhodnocování geologických dat s cílem rychle rozhodnout, zda v dané lokalitě provádět podstatně dražší hloubkové vrty

HEARSAY II.: první systém, který ukázal, že počítač by mohl v budoucnosti spolehlivě a rychle rozumět přirozené řeči v úzce vymezené oblasti

Experimentální nasazování 1975 - 1981

PUFF: poskytování konzultací ohledně potíží s dýchacími cestami

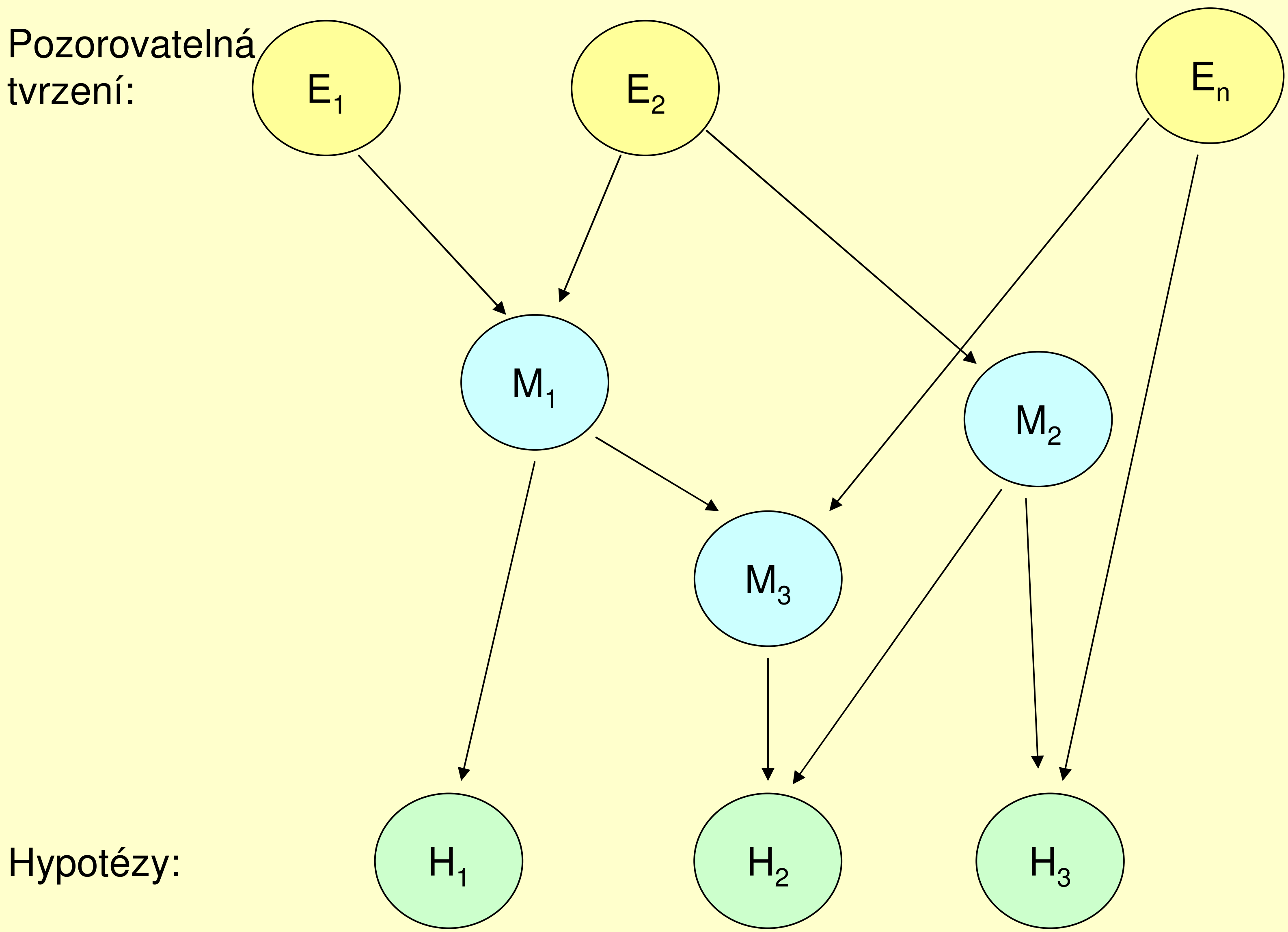
INTERNIST: považován za jeden z nejrozsáhlejších ES v historii, později byl přejmenován na systém CADUCEUS, obsahující údajně 85% veškerých znalostí z interního lékařství

CADUCEUS

Komerčně dostupné systémy od roku 1981

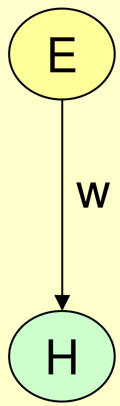
XCON, XSEL: zpracování objednávek zákazníků na počítače řady VAX

Diagnostické expertní systémy



Inferenční (odvozovací) síť, inferenční mechanismus

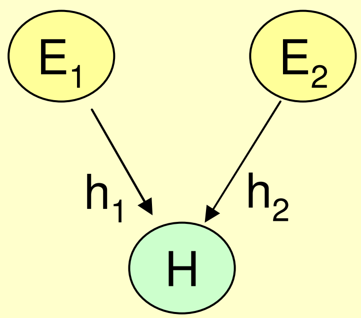
1. Problém velikosti příspěvku pravidla



Pokud E 100% platí, pak aposteriorní váha H je w.

Jaká je aposteriorní váha H, máme-li pouze 70% (ne)důvěru v platnost E ?

2. Problém sdružování příspěvků pravidel



Podle 1. pravidla je apostriorní váha H rovna h_1.
Podle 2. pravidla je apostriorní váha H rovna h_2.

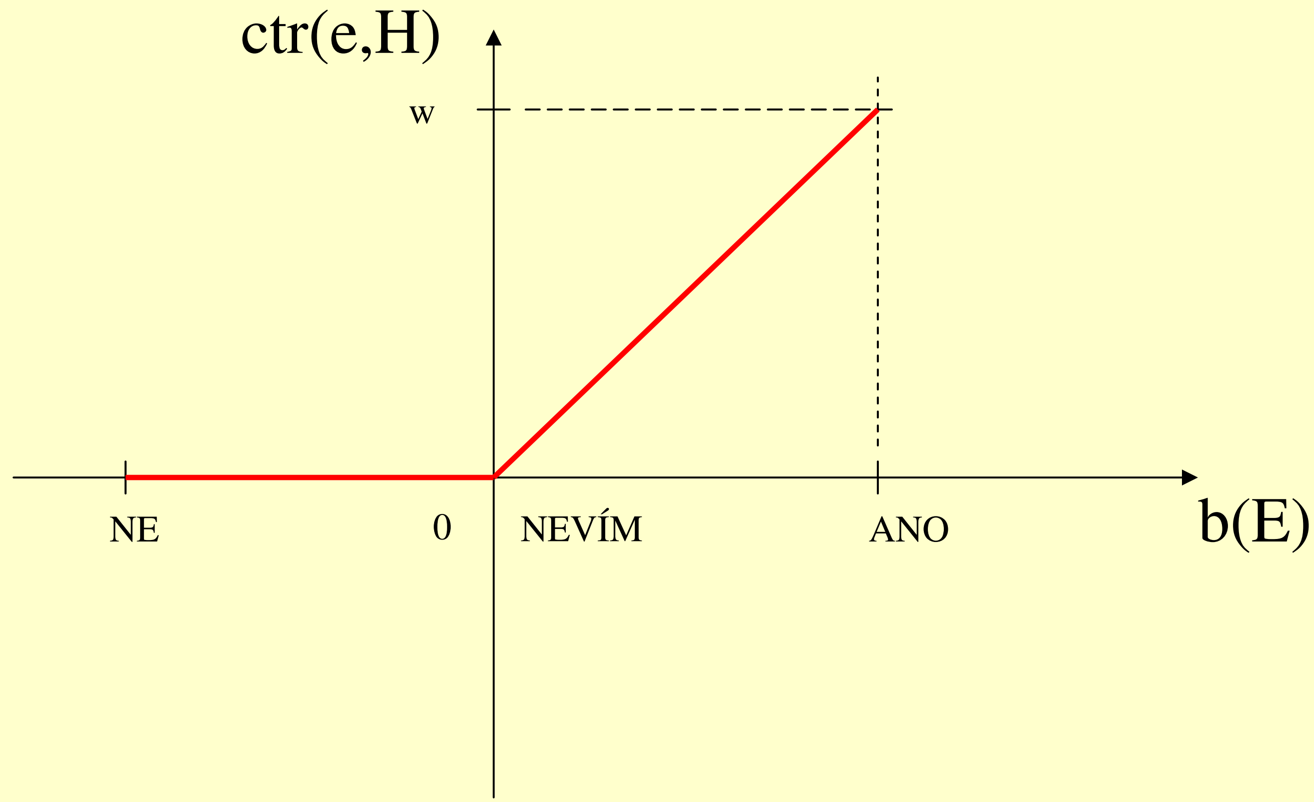
Jaká je výsledná aposteriorní váha H ?

$$h_1 \oplus h_2$$

1. Problém velikosti příspěvku pravidla

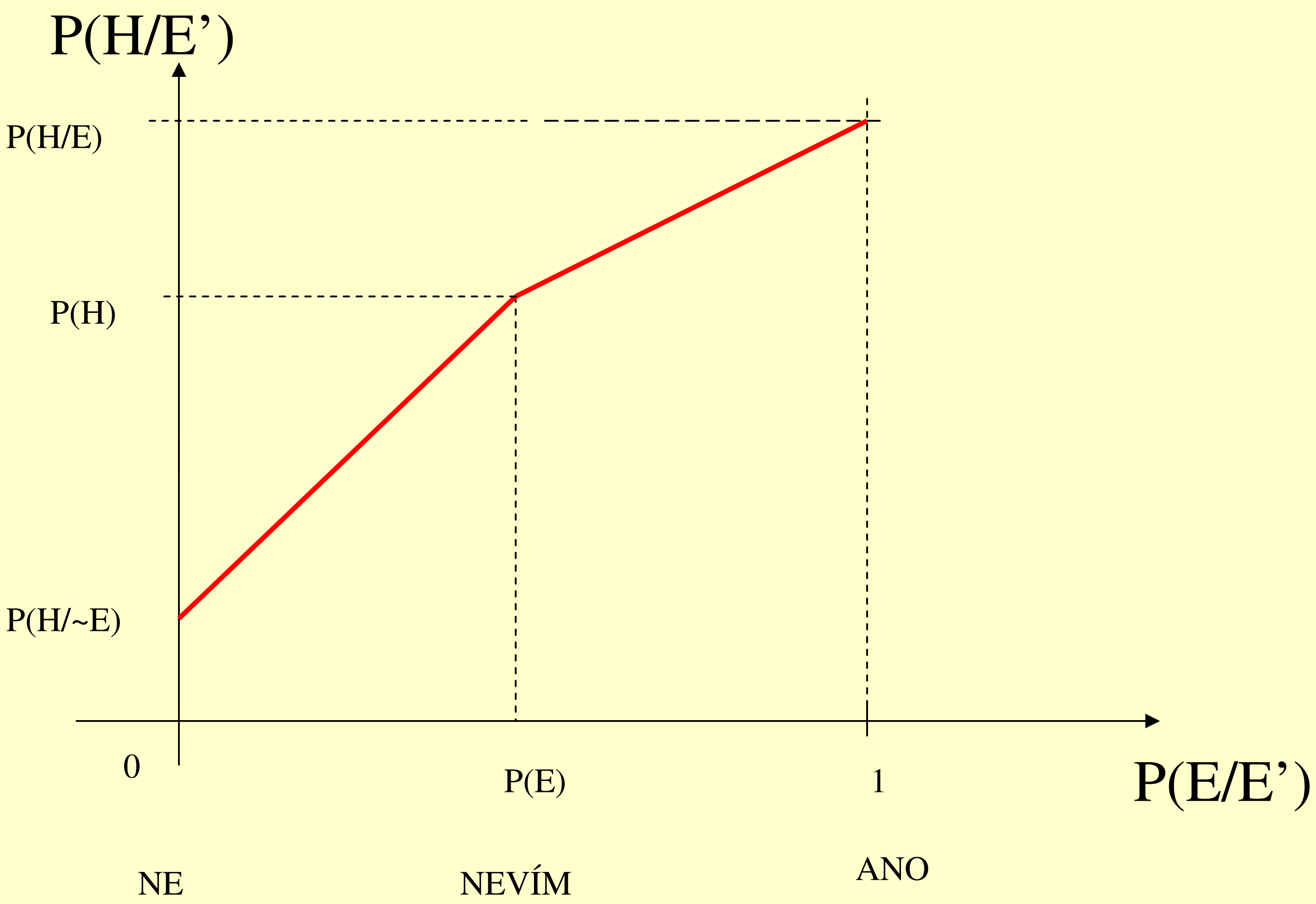
(Petr Hájek - Hájkova algebraická teorie)

E -> H (w)



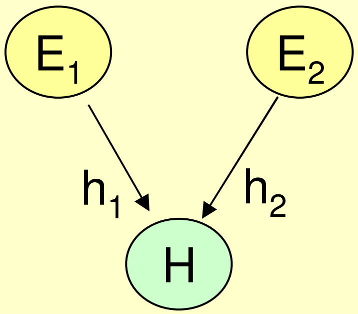
1. Problém velikosti příspěvku pravidla PROSPECTOR

E -> H (P(H/E), P(H/~E))



2. Problém sdružování příspěvků pravidel

(Petr Hájek - Hájkova algebraická teorie)



-1 … určitě ne
0 … nevím
1 … určitě ano

Budiž a, b, c $\in$ (-1, 1) váhy nějakých tvrzení

$$a \oplus 1 = 1$$

$$a \oplus 0 = a$$

$$a \oplus -a = 0 \qquad (1 \oplus -1 \ldots \text{není definováno})$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

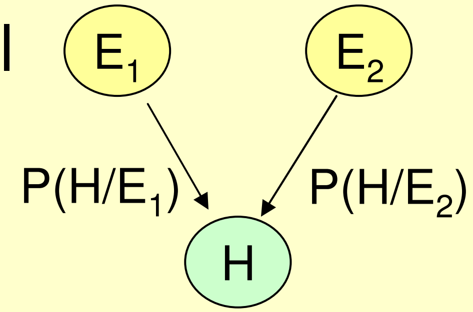
$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

$$(a > b) \mathbin{\&} (c > 0) \Rightarrow a \oplus c > b \oplus c$$

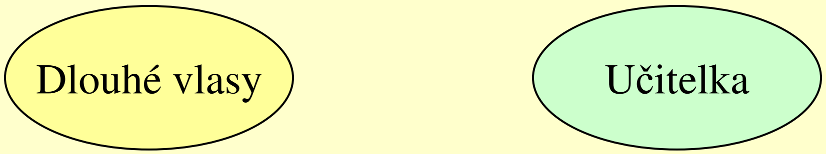
(-1, 1) spolu s $\oplus$ tvoří uspořádanou komutativní grupu (Abelovská grupa).

2. Problém sdružování příspěvků pravidel

PROSPECTOR



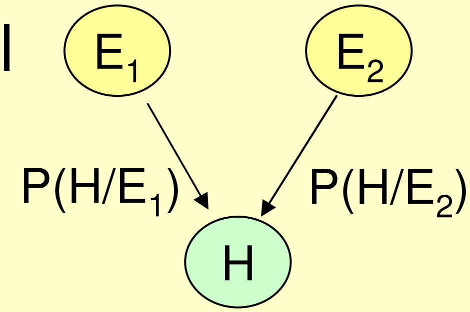
Podmíněná nezávislost



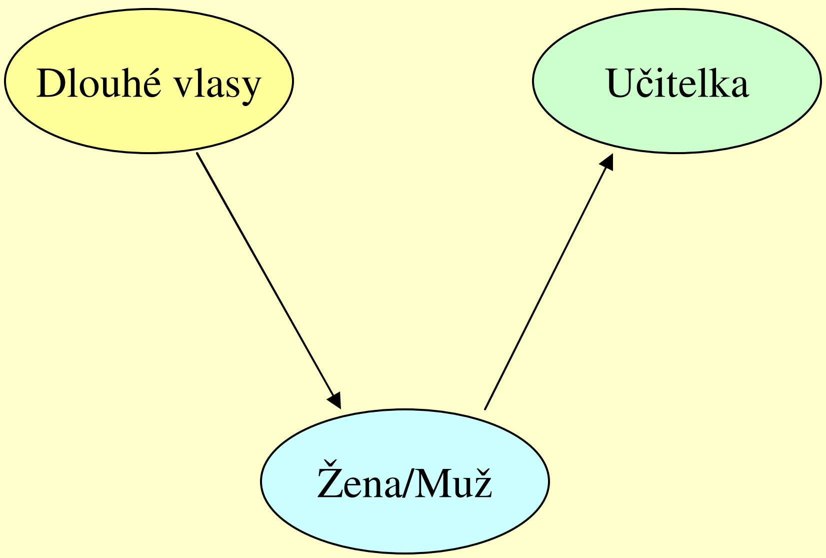
Závislost ?

2. Problém sdružování příspěvků pravidel

PROSPECTOR



Podmíněná nezávislost

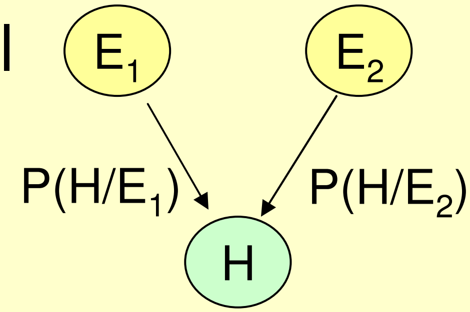


Závislost ?

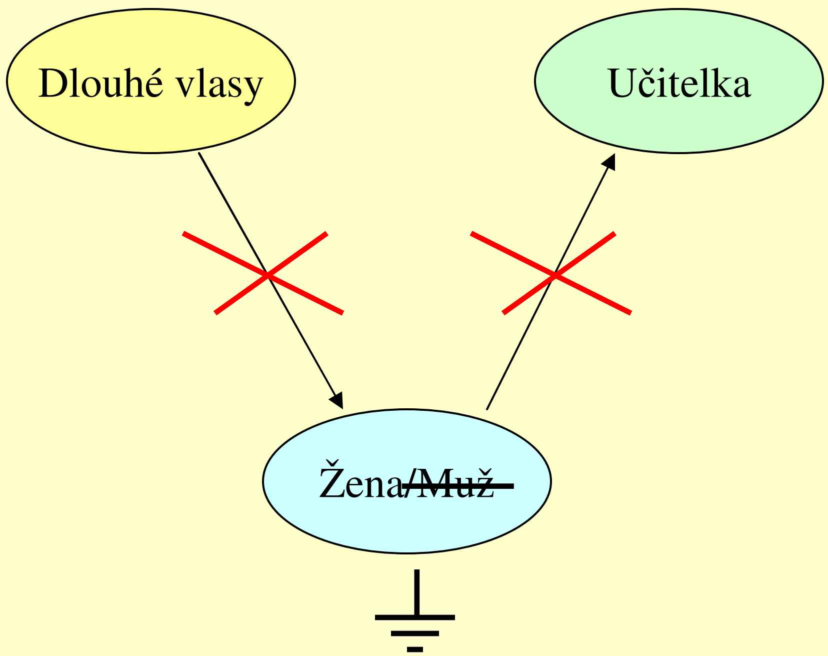
ANO

2. Problém sdružování příspěvků pravidel

PROSPECTOR



Podmíněná nezávislost



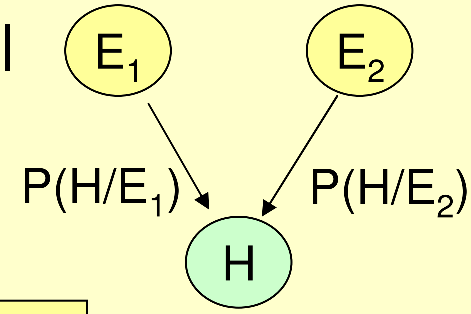
Závislost ?

NE

$$A \perp B / C \ : \ P(A, B / C) = P(A / C) * P(B / C)$$

2. Problém sdružování příspěvků pravidel

PROSPECTOR



Podmíněná nezávislost

$$A \perp B / C \;:\; P(A, B / C) = P(A / C) * P(B / C)$$

$$\frac{P(A, B, C)}{P(C)} = P(A / C) * P(B / C)$$

$$\frac{P(A, B, C)}{P(C)} = \frac{P(A, C)}{P(C)} * \frac{P(B, C)}{P(C)}$$

$$P(A, B, C) = \frac{P(A, C) * P(B, C)}{P(C)}$$

Další možnosti systému FEL-Expert

- Prioritní vazby
  … nepodmíněné „vyšetřování“ uzlů v určeném pořadí

- Kontextové vazby
  … podmíněné vyšetřování uzlů v případě splnění určité podmínky (rozsah pravděpodobnosti tvrzení jiného uzlu)

- Taxonomie
  - zaměřování pozornosti
    … zabrání vyšetřování nerelevantních hypotéz

  - hierarchické závislosti
    … předchází vyšetřování hypotéz, jejichž platnost dokážeme odvodit z jiných tvrzení

Zpracování neurčité informace

Pravděpodobnost a šance (Odds)

$$O(H) = \frac{P(H)}{P(\sim H)} = \frac{P(H)}{1 - P(H)}$$

$$P(H) = \frac{O(H)}{1 + O(H)}$$

Skládání příspěvků pravidel u ES typu Prospector

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \text{ -> } H \; O(H/E_1) \\ E_2 \text{ -> } H \; O(H/E_2) \end{array}\right\} \quad O(H/E_1,E_2) = \frac{O(H/E_1) * O(H/E_2)}{O(H)}$$

Předpoklad:

$$\boxed{E_1 \perp E_2 \; / \; H}$$

Náhodné veličiny E_1 a E_2 jsou podmíněně nezávislé při dané hodnotě H.

Statistická data:

Pacient	A	B	C
P1	1	2	1
P2	2	1	2
P3	1	1	2
P4	1	2	1
P5	1	2	1
P6	2	2	1
P7	2	1	1
P8	1	2	2
P9	1	1	2
P10	2	2	2
P11	1	2	1
P12	1	1	1
P13	2	1	1
P14	2	1	2
P15	2	2	1
P16	1	1	1
P17	2	1	2

Frekvenční (kontigenční) tabulka:

	B=1		B=2		
	C=1	C=2	C=1	C=2	
A=1	2	2	4	1	9
A=2	2	3	2	1	8
	4	5	6	2	17
	9		8		
	10	7			

Sdružené pravděpodobnostní rozložení:

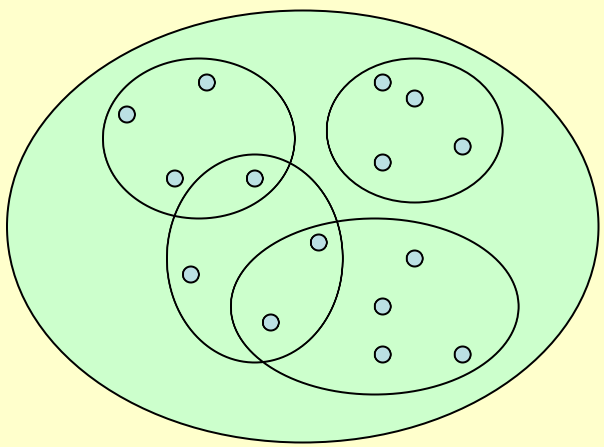
	B=1		B=2		
	C=1	C=2	C=1	C=2	
A=1	0.12	0.12	0.24	0.06	0.53
A=2	0.12	0.18	0.12	0.06	0.47
	0.24	0.29	0.35	0.12	1.00
	0.53		0.47		
	0.59	0.41			

Struktura závislosti na množině náhodných veličin

{ A, B, C } :

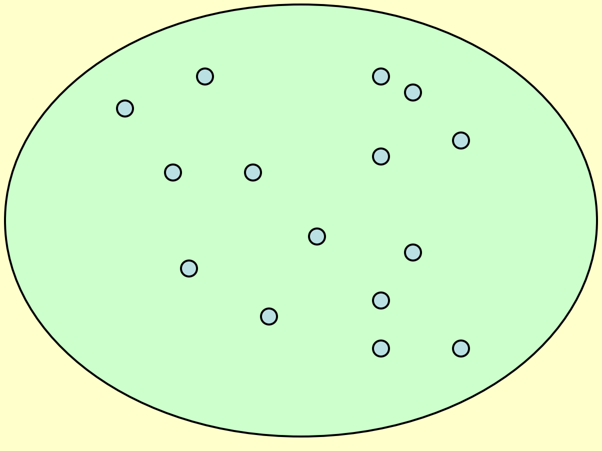
- A, B, C vzájemně nezávislé
- A, B, C po dvojicích nezávislé
- $A \perp B \,/\, C$
- $B \perp C \,/\, A$
- A, B závislé, C na nich nezávislá
- a další

Snížení dimenze pravděpodobnostního rozložení
(rozložení frekvencí).



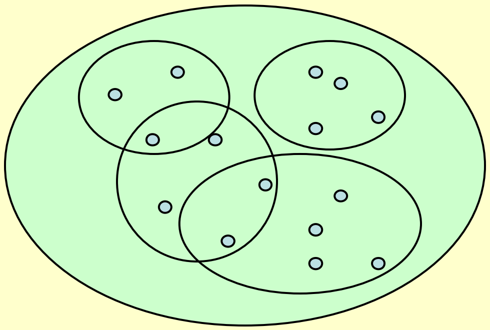
Danou množinu náhodných veličin
potřebujeme rozdělit na podmnožiny
vzájemně (silně) závislých náhodných
veličin ....

… tak, aby z nich bylo možné zrekonstruovat
původní rozložení
(s minimální ztrátou informace).



Dva problémy:

• nalézt co nejmenší množinu co nejjednodušších marginálních rozložení
(množinu minimálních postačujících statistik)



Bishop, Fienberg, Holland:
“Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice”,
The MIT Press Cambridge, 1975

• k dané množině marginálních rozložení nalézt příslušné sdružené rozložení
(množinu minimálních postačujících statistik)

Problém v teorii pravděpodobnosti známý jako „Marginální problém”

Jiroušek R.: “Metody integrace znalostí v pravděpodobnostních
expertních systémech”, sborník Aplikace umělé inteligence
AI’89, Praha, 1989

Marginální problém I

- {A, B, C} je množina (binárních) náhodných veličin
- {p(A), p(B), p(C)} je množina marginálních rozložení frekvencí

$$x^A = < x_1^A = 9,\ \ x_2^A = 8 >$$

$$x^B = < x_1^B = 9,\ \ x_2^B = 8 >$$

$$x^C = < x_1^C = 10,\ x_2^C = 7 >$$

	B=1		B=2		
	C=1	C=2	C=1	C=2	
A=1	2	2	4	1	9
A=2	2	3	2	1	8
	4	5	6	2	17
	9		8		
	10	7			

	B=1		B=2		
	C=1	C=2	C=1	C=2	
A=1	2	1	4	2	9
A=2	3	3	1	1	8
	5	4	5	3	17
	9		8		
	10	7			

K danému sdruženému rozložení frekvencí/pravděpodobností se libovolné marginální rozložení frekvencí/pravděpodobností určí jednoznačně, naopak tomu tak není.

Existuje **nekonečně mnoho** sdružených **pravděpodobnostních** rozložení, které vyhovují danému systému marginálních rozložení.

Marginální problém II

- Které z těch nekonečně mnoha sdružených pravděpodobnostních rozložení je to “správné”?

KRITÉRIUM

- Jak ho nalézt? Nemůžeme testovat toto KRITERIUM na všech kandidátech - je jich nekonečně mnoho.

METODA

Kritérií i metod existuje několik. Často se jako kritérium používá
Princip maxima entropie (princip scházejícího důvodu).
Vezmeme to sdružené pravděpodobnostní rozložení, které má maximum entropie
při využití veškeré dostupné informace.

Princip maxima entropie

$S = \{X_1, \ldots, X_N\}$ Množina všech náhodných veličin, které se účastní našeho problému.

$S_1, \ldots, S_K \subset S$ Daný systém jejích podmnožin

$\{p_{S_1}, \ldots, p_{S_K}\}$ Daná množina marginálních pravděpododbnostních rozložení.

$\prod_S$ Množina všech sdružených pravděpodobnostních rozložení nad množinou S takových, že pro podmnožiny S_1 až S_k je množina všech odpovídajících marginálních rozložení rovna množině $\{p_{S_1}, \ldots, p_{S_K}\}$

$x = < x_i^1, x_j^2, \ldots, x_n^N >$ Vektor nějakých hodnot náhodných veličin X_1 až X_N.

X Množina všech takových vektorů.

Informační (shannonovská) entropie: $H(p) = -\sum_{x \in X} P(x) \cdot \ln(p(x))$

Princip maxima entropie: $H(p^*) = \max_{P^* \in \prod_S} (H(p))$

Princip maxima entropie II

Silviu Guiasu, Abe Shenitzer: *The Principle of Maximum Entropy*,
The Mathematical Intelligencer, Vol. 7, No. 1, pp. 42-48

Silviu Guiasu, Abe Shenitzer: *Princip maxima entropie,*
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 31 (1986), č. 4

Metoda Lagrangeových multiplikátorů *(Cheeseman 1983)*

Řešení marginálního problému jako hledání vázaného extrému

$$P(A) = p_A$$

$$P(B \mid A) = p_{B|A} \quad \cdots \quad \frac{\sum_{<x_1 \cdots x_N> \in B \cap A} p(x_1, \cdots, x_N)}{\sum_{<x_1 \cdots x_N> \in A} p(x_1, \cdots, x_N)} = p_{B|A}$$

$$\sum_{<x_1 \cdots x_N> \in A} p(x_1, \cdots, x_N) - p_A = 0$$

$$\sum_{<x_1 \cdots x_N> \in B \cap A} p(x_1, \cdots, x_N) - p_{B|A} \sum_{<x_1 \cdots x_N> \in A} p(x_1, \cdots, x_N) = 0$$

$$\sum_{<x_1 \cdots x_N>} p(x_1, \cdots, x_N) - 1 = 0$$

omezení

kritérium

$$H(p) = -\sum_{<x_1 \cdots x_N>} p(x_1, \cdots, x_N) \ln p(x_1, \cdots, x_N)$$

$$H' = -\sum_{(x_1 \cdots x_N)} p(x_1, \cdots, x_N) \ln p(x_1, \cdots, x_N) +$$

$$+ \lambda_0 \left(1 - \sum_{<x_1 \cdots x_N>} p(x_1, \cdots, x_N) \ln p(x_1 \cdots x_N) \right) + \lambda_1 (\cdots) + \lambda_2 (\cdots) + \cdots$$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů II (Cheeseman 1983)

$$\frac{\partial H'}{\partial p(x_1,\cdots,x_N)} = -\ln p(x_1,\cdots .x_N) - 1 - \lambda_0 - \cdots$$

$$\frac{\partial H'}{\partial p(x_1,\cdots,x_N)} = 0$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \cdots$$

$$p(x_1,\cdots,x_N) = e^{-(\lambda_0 + \cdots)}$$

Iterační metoda (IPFP - Iterative Proportional Fitting Procedure)
(Deming & Stephan, 1940)

$S = \{X_1, ..., X_N\}$ Množiny všech náhodných veličin, které se účastní našeho problému.

$S_1, ..., S_K \subset S$ Daný systém jejích podmnožin

$\{p_{S_1}, ..., p_{S_K}\}$ Daná množina marginálních pravděpododobnostních rozložení.

$$p_0(x_1, \cdots, x_N) = \frac{1}{|X_1| \cdots |X_N|}$$ (východisko: rovnoměrná distribuce na *S*)

$$p_i = p^{S_j} \frac{p_{i-1}}{p_{i-1}^{S_j}}$$ pro $j = ((i-1) \bmod K) + 1$

Pro objasnění - nechť $S_j = \{X_1, ..., X_M\}$

$$p_i(x_1, ..., x_N) = p^{S_j}(x_1, ..., x_M) \cdot p_{i-1}(x_{M+1}, ..., x_N / x_1, ..., x_M)$$

IPFP II

Deming & Stephan 1940

Teprve 1975 (Cziszár) důkaz konvergence:

Je-li systém marginálních distribucí konsistentní, t.j. $\prod_S$ je neprázdná,
IPFP konverguje a pro limitní distribuci

$$p^* = \lim_{k \to \infty} p_k$$

platí

$$H(p^*) = \max_{P^* \in \prod_S} (H(p))$$

IPFP - příklad

$$S_1 = \{X_1\} \qquad S_2 = \{X_2\}$$

$$p_i = p^{S_j} \frac{p_{i-1}}{p_{i-1}^{S_j}} \qquad \text{pro} \quad j = ((i-1) \bmod K) + 1$$

	X2=1	X2=2	
X1=1	0.06	0.14	0.2
x1=2	0.24	0.56	0.8
	0.3	0.7	

p_0

	X2=1	X2=2	
X1=1	0.25	0.25	0.5
x1=2	0.25	0.25	0.5
	0.5	0.5	

p_1

	X2=1	X2=2	
X1=1	0.100	0.100	0.200
x1=2	0.400	0.400	0.800
	0.500	0.500	

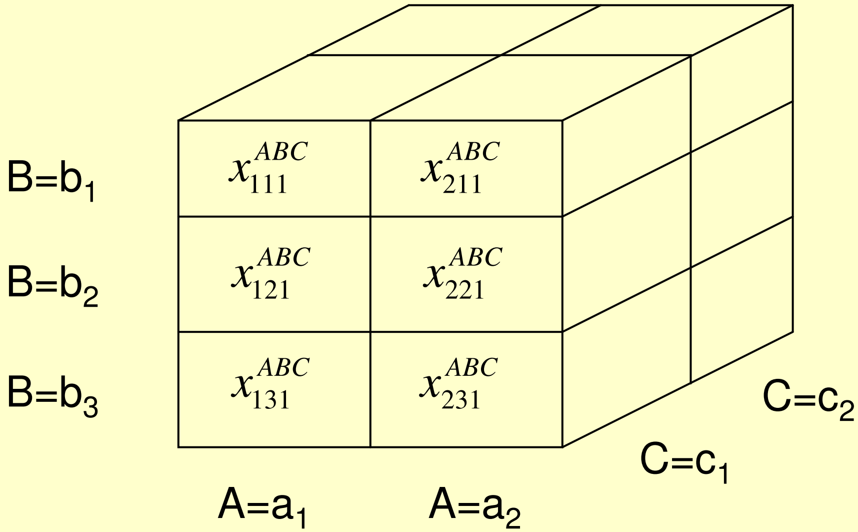
	X2=1	X2=2	
X1=1	=0.2*0.25/0.5	=0.2*0.25/0.5	
x1=2	=0.8*0.25/0.5	=0.8*0.25/0.5	

p_2

	X2=1	X2=2	
X1=1	0.060	0.140	0.200
x1=2	0.240	0.560	0.800
	0.300	0.700	

	X2=1	X2=2	
X1=1	=0.3*0.1/0.5	=0.7*0.1/0.5	
x1=2	=0.3*0.4/0.5	=0.7*0.4/0.5	

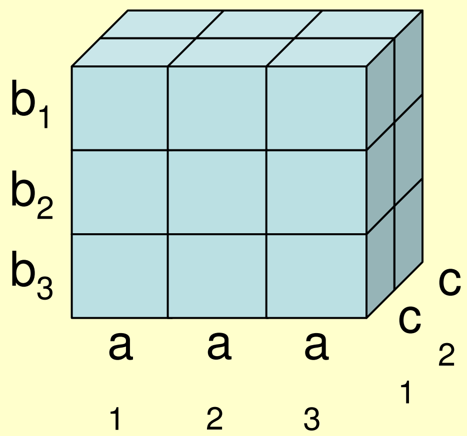
Základy datové analýzy I



Logaritmicko-lineární model:

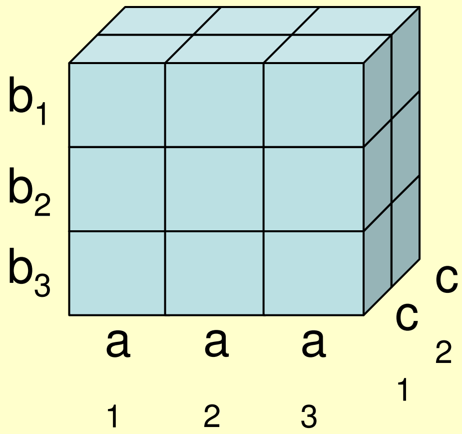
$$\log p_{ijk}^{ABC} = u_0 + u_i^A + u_j^B + u_k^C + u_{ij}^{AB} + u_{ik}^{AC} + u_{jk}^{BC} + u_{ijk}^{ABC}$$

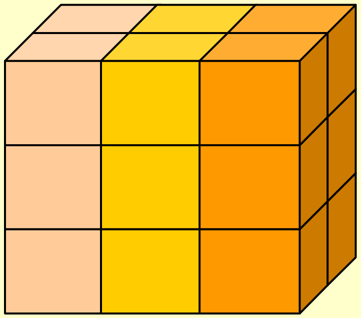
Efekt nultého řádu:



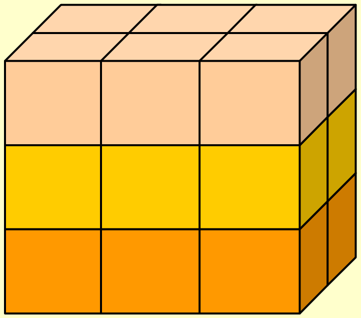
$$u^0 = \frac{1}{I} \cdot \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{J} \cdot \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} \log p_{ijk}^{ABC} = \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC}$$

Hlavní efekty (efekty prvního řádu):

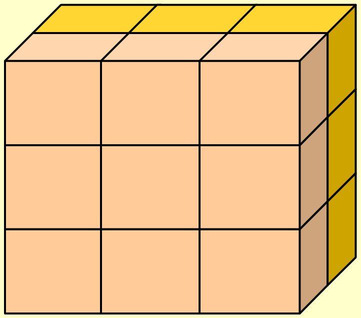




$$u^{A}=\frac{1}{J\cdot K}\sum_{B,C}\log p^{ABC}-\frac{1}{I\cdot J\cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}=\frac{1}{J\cdot K}\sum_{B,C}\log p^{ABC}-u^{0}$$



$$u^{B}=\frac{1}{I\cdot K}\sum_{A,C}\log p^{ABC}-\frac{1}{I\cdot J\cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}=\frac{1}{I\cdot K}\sum_{A,C}\log p^{ABC}-u^{0}$$



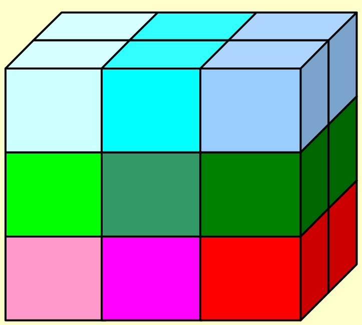
$$u^{C}=\frac{1}{I\cdot J}\sum_{A,B}\log p^{ABC}-\frac{1}{I\cdot J\cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}=\frac{1}{I\cdot J}\sum_{A,B}\log p^{ABC}-u^{0}$$

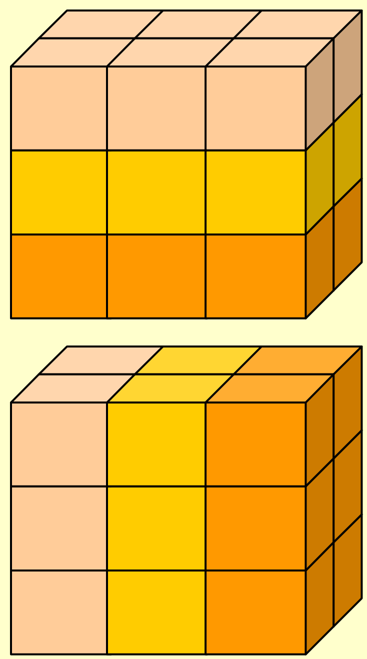
Interakce prvního řádu (efekty druhého řádu):

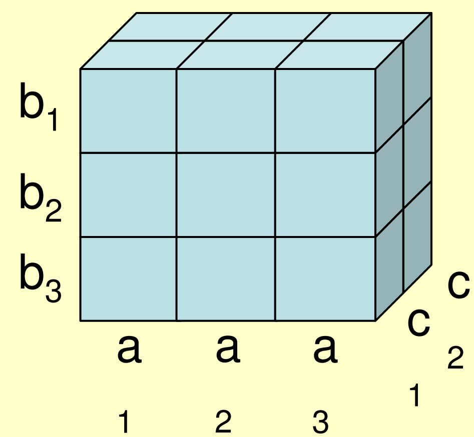
$$u^{AB} = \frac{1}{K}\sum_{C}\log p^{ABC} - \left(\frac{1}{I\cdot K}\sum_{A,C}\log p^{ABC} - \frac{1}{I\cdot J\cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{J\cdot K}\sum_{B,C}\log p^{ABC} - \frac{1}{I\cdot J\cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}\right) - \frac{1}{I\cdot J\cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC} =$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{C}\log p^{ABC} - \frac{1}{I\cdot K}\sum_{A,C}\log p^{ABC} - \frac{1}{J\cdot K}\sum_{B,C}\log p^{ABC} + \frac{1}{I\cdot J\cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}$$







Interakce prvního řádu (efekty druhého řádu):

$$u^{AB} = \frac{1}{K}\sum_{C}\log p^{ABC} - \left(\frac{1}{I \cdot K}\sum_{A,C}\log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{J \cdot K}\sum_{B,C}\log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}\right) - \frac{1}{I \cdot J \cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC} =$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{C}\log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot K}\sum_{A,C}\log p^{ABC} - \frac{1}{J \cdot K}\sum_{B,C}\log p^{ABC} + \frac{1}{I \cdot J \cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC}$$

$$u^{AB} = \frac{1}{K}\sum_{C}\log p^{ABC} - \left(u^{A} + u^{0}\right) - \left(u^{B} + u^{0}\right) + u^{0} = \frac{1}{K}\sum_{C}\log p^{ABC} - u^{A} - u^{B} - u^{0}$$

$$u^{BC} = \frac{1}{I}\sum_{A}\log p^{ABC} - u^{B} - u^{C} - u^{0}$$

$$u^{AC} = \frac{1}{J}\sum_{B}\log p^{ABC} - u^{A} - u^{C} - u^{0}$$

$$u^{ABC} = \log p^{ABC} - \left(\frac{1}{I} \sum_{A} \log p^{ABC} - \left(\frac{1}{I \cdot K} \sum_{A,C} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{I \cdot J} \sum_{A,B} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{J} \sum_{B} \log p^{ABC} - \left(\frac{1}{I \cdot J} \sum_{A,B} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{J \cdot K} \sum_{B,C} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{K} \sum_{C} \log p^{ABC} - \left(\frac{1}{I \cdot K} \sum_{A,C} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{J \cdot K} \sum_{B,C} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{I \cdot J} \sum_{A,B} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{J \cdot K} \sum_{B,C} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{I \cdot K} \sum_{A,C} \log p^{ABC} - \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} \right) -$$

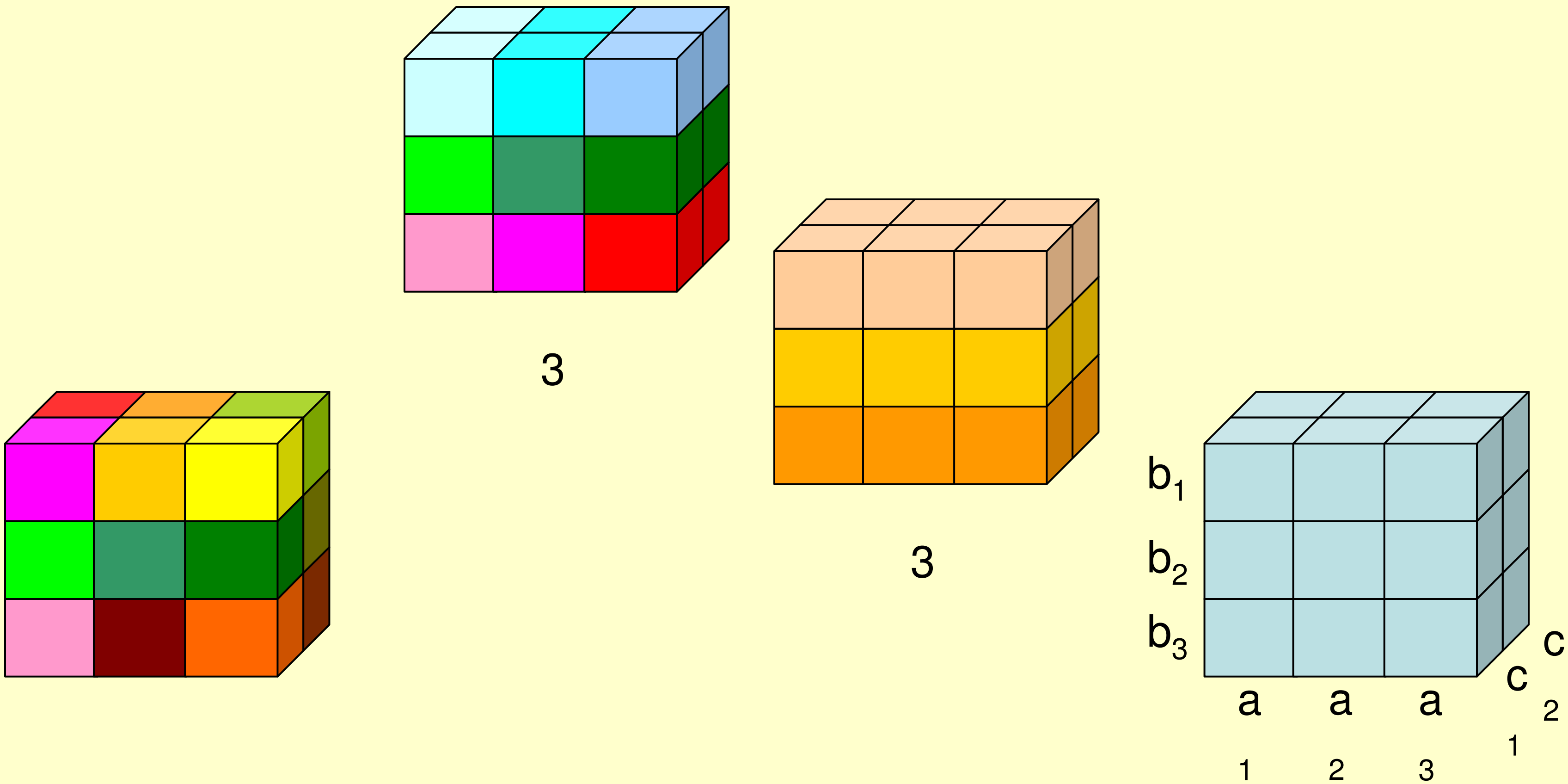
$$- \frac{1}{I \cdot J \cdot K} \sum_{A,B,C} \log p^{ABC} =$$

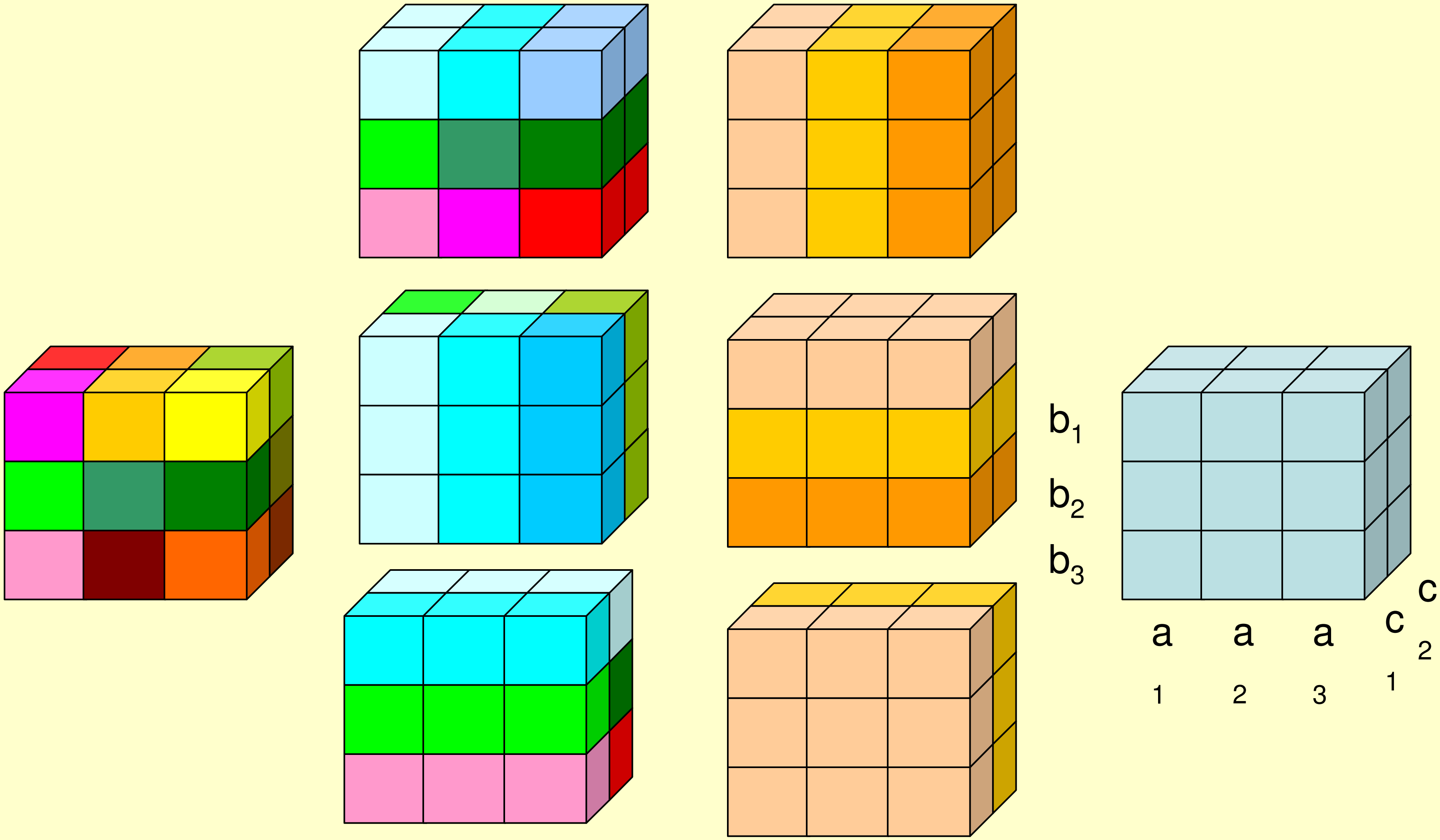
Efekt třetího řádu:

$$u^{ABC} = \log p^{ABC} - \frac{1}{I}\sum_{A}\log p^{ABC} - \frac{1}{J}\sum_{B}\log p^{ABC} - \frac{1}{K}\sum_{C}\log p^{ABC} +$$

$$+\frac{1}{I\cdot J}\sum_{A,B}\log p^{ABC} + \frac{1}{I\cdot K}\sum_{A,C}\log p^{ABC} + \frac{1}{J\cdot K}\sum_{B,C}\log p^{ABC} - \frac{1}{I\cdot J\cdot K}\sum_{A,B,C}\log p^{ABC} =$$

$$= \log p^{ABC} - u^{AB} - u^{BC} - u^{AC} - u^{A} - u^{B} - u^{C} - u^{0}$$





b1
b2
b3
c2
c1
a1
a2
a3

A, B, C jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny právě, když platí:

$$\log p^{ABC} = u_0 + u^A + u^B + u^C$$

$$p^{ABC} = e^{u_0 + u^A + u^B + u^C}$$

Určíme marginální rozložení:

$$p^A = \sum_{B,C} p^{ABC} = e^{u_0} \cdot e^{u^A} \cdot \sum_B e^{u^B} \cdot \sum_C e^{u^C}$$

$$p^B = \sum_{A,C} p^{ABC} = e^{u_0} \cdot e^{u^B} \cdot \sum_A e^{u^A} \cdot \sum_C e^{u^C}$$

$$p^C = \sum_{A,B} p^{ABC} = e^{u_0} \cdot e^{u^C} \cdot \sum_A e^{u^A} \cdot \sum_B e^{u^B}$$

$$\sum_{A,B,C} p^{ABC} = \sum_{A,B,C} e^{u^0 + u^A + u^B + u^C} = 1$$

$$e^{u^0} \cdot \sum_A e^{u^A} \cdot \sum_B e^{u^B} \cdot \sum_C e^{u^C} = 1$$

a tedy rovněž

$$(e^{u^0} \cdot \sum_A e^{u^A} \cdot \sum_B e^{u^B} \cdot \sum_C e^{u^C})^2 = 1$$

tímto vztahem vydělíme pravou stranu rovnice

$$p^A \cdot p^B \cdot p^C = e^{3u^0} \cdot e^{u^A} \cdot e^{u^B} \cdot e^{u^C} \cdot (\sum_A e^{u^A})^2 \cdot (\sum_B e^{u^B})^2 \cdot (\sum_C e^{u^C})^2$$

a dostaneme

$$p^A \cdot p^B \cdot p^C = e^{u^0} \cdot e^{u^A} \cdot e^{u^B} \cdot e^{u^C}$$

neboli

$$\log p^{ABC} = u_0 + u^A + u^B + u^C$$