

**Jméno:** **Celkový počet bodů:**

**Příklad 1** **2+2 body**

$[K_1(p \vee r), \neg K_1 p, \neg K_1 r]$

a) Zjistěte, zda ve všech stavech této Kripkeho struktury platí  $K_1(p \vee r) \rightarrow (K_1 p \vee K_1 r)$ . **NE**, např. v  $s$  neplatí, ale v  $u$  platí!

b) Jak by se situace změnila, pokud by byla doplněna hrana od stavu  $t$  k  $u$  a zpět? **NEZMĚNÍ** se nijak zásadně, neboť v  $s$  stále neplatí! Teď dokonce uvažovaná formule neplatí v žádném stavu!

**Příklad 2** **2 body**

Vyberte formule, které v tomto systému platí ve všech bžích, které začínají ve stavu **Welcome**:

a)  $\Box \text{Amount} \rightarrow \Diamond \text{ThankYou}$  **NE**

b)  $\Diamond \Box (\text{Amount} \vee \text{ThankYou}) \vee \Box \Diamond \text{TryAgain}$  **ANO**

**Příklad 3**

1+3 body

*Dokažte, že nutným důsledkem platnosti výrokových axiomů a axiomů*

- a*
- A3**      $K_i \varphi \rightarrow \varphi$
- A5**      $\neg K_i \varphi \rightarrow K_i \neg K_i \varphi$

*je platnost tvrzení*  $(\varphi \rightarrow K_i \neg K_i \neg \varphi)$ .

Doporučení:

- a) Ověřte nejdřív, že platí  $\neg (K_i \neg (K_i \psi)) \rightarrow K_i \psi$

Důkaz:

1.  $\neg K_i \psi \rightarrow K_i \neg K_i \psi$  [A5]
2.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$  [tautologie výrokové logiky]
3.  $(\neg K_i \psi \rightarrow K_i \neg K_i \psi) \rightarrow (\neg (K_i \neg (K_i \psi)) \rightarrow \neg \neg K_i \psi)$  [speciální případ 2.]
4.  $\neg (K_i \neg (K_i \psi)) \rightarrow \neg \neg K_i \psi$  [modus ponens pro 3. a 1.]
5.  $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$  [tautologie výrokové logiky]
6.  $\neg \neg K_i \psi \rightarrow K_i \psi$  [speciální případ 5.]
7.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$  [tautologie výrokové logiky]
8.  $(\neg (K_i \neg (K_i \psi)) \rightarrow \neg \neg K_i \psi) \rightarrow ((\neg \neg K_i \psi \rightarrow K_i \psi) \rightarrow (\neg (K_i \neg (K_i \psi)) \rightarrow K_i \psi))$  [speciální případ 7.]
9.  $\neg (K_i \neg (K_i \psi)) \rightarrow K_i \psi$  [modus ponens pro 8., 4. a pak ještě 6.]

**Příklad 3**

1+3 body

*Dokažte, že nutným důsledkem platnosti výrokových axiomů a axiomů*

- a*
- A3**      $K_i \varphi \rightarrow \varphi$
- A5**      $\neg K_i \varphi \rightarrow K_i \neg K_i \varphi$

*je platnost tvrzení*  $(\varphi \rightarrow K_i \neg K_i \neg \varphi)$ .

Doporučení:

- b) Použijte platnost a)  $\neg (K_i \neg (K_i \psi)) \rightarrow K_i \psi$  pro důkaz požadovaného tvrzení.

Důkaz:

1.  $\neg (K_i \neg (K_i \psi)) \rightarrow K_i \psi$  [toto je dokazatelné pro libovolné  $\psi$ ]
2.  $\neg (K_i \neg (K_i \neg \varphi)) \rightarrow K_i \neg \varphi$  [speciální případ 1. pro  $\psi = \neg \varphi$ ]
3.  $K_i \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi$  [speciální případ A3]
4.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$  [tautologie výrokové logiky]
5.  $\neg (K_i \neg (K_i \neg \varphi)) \rightarrow \neg \varphi$  [2x modus ponens pro 4. s využitím 2. a 3.]
6.  $(\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$  [tautologie výrokové logiky]
7.  $(\varphi \rightarrow K_i \neg K_i \neg \varphi)$  [modus ponens pro 6. s využitím 5.]