Jaké vlastnosti mají znalosti

(v sémantice možných světů)

Věta.

Pro všechny struktury M pro n agentů s relacemi K_i, které jsou ekvivalencemi, a pro libovolné formule A, B platí

$(i)\ \ M \models (K_i A \wedge K_i (A \to B)) \to K_i B$

$(ii)\ \ je-li\ \ M \models A\ \ potom\ \ M \models K_i A$

$(iii)\ \ M \models K_i A \to A$

$(iv)\ \ M \models K_i A \to K_i K_i A$

$(v)\ \ M \models \neg K_i A \to K_i \neg K_i A$

V Kripkeho strukturách jsme ověřili, že validní jsou

2. **Distribuční axiom** (označovaný někdy jako **K**) $(K_i A \wedge K_i (A \to B)) \to K_i B$
   Pravidlo generalizace znalostí
3. **Axiom znalostí (Axiom pravdy)** (ozn. jako **T**) $K_i A \to A$
4. **Axiom pozitivní introspekce** (ozn. jako **4**) $K_i A \to K_i K_i A$
5. **Axiom negativní introspekce** (ozn.jako **5**) $\neg K_i A \to K_i \neg K_i A$
6. **Axiom konzistence** (ozn.jako **D**) $\neg K_i\ false$

- Distribuční axiom **K** a **pravidlo generalizace znalostí** jsme ověřili bez jakýchkoli předpokladů o relacích K_i,
- validnost axiomu znalostí **T** plyne z reflexivity,
- validnost axiomu pozitivní introspekce **4** plyne z tranzitivity,
- a validnost axiomu negativní introspekce **5** plyne ze symetrie a tranzitivity relací K_i.

Výroková logika: formální systém a některé její tautologie (dokazatelné formule)

Prop-Ax1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Prop-Ax2: $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$

Prop-Ax3: $(\neg \psi \to \neg \varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Modus ponens:

$$\frac{\varphi,\ (\varphi \to \psi)}{\psi}$$

Prop-T1: $(\varphi \to (\psi \to \tau)) \to (\psi \to (\varphi \to \tau))$

Formální (axiomatický) systém K_n

Axiomy: **A1.** Všechny tautologie výrokové logiky

A2. $(K_i \alpha \wedge K_i (\alpha \to \beta)) \to K_i(\beta)$

Odvozovací pravidla:

R1. Z α formulí $\alpha \to \beta$ odvoďte β (modus ponens)

R2. Z formule α odvoď $K_i \alpha$ (pravidlo zobecnění znalostí)

V $\mathbf{K}_n$ lze dokázat například tvrzení $K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha$ (viz dále).

Značení **pro dokazatelnost:** $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i \alpha$

Věta:

Systém K_n představuje korektní a úplný syntaktický popis všech formulí validních v množině $\mathcal{M}_n(\Phi)$ Kripkeho struktur.

Platí: $\mathbf{K}_n$, $(\varphi \to \psi) \vdash K_i \varphi \to K_i \psi$

1. $(\varphi \to \psi)$ [výchozí formule]
2. $K_i(\varphi \to \psi)$ [R2]
3. $K_i\varphi \to (K_i(\varphi \to \psi) \to K_i\psi)$ [K2]
4. $(K_i\varphi \to (K_i(\varphi \to \psi) \to K_i\psi)) \to (K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi))$
   [Prop-T1: $(\varphi \to (\psi \to \tau)) \to (\psi \to (\varphi \to \tau))$]
5. $K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$ [MP 4 a 3]
6. $(K_i\varphi \to K_i\psi)$ [MP 5 a 2]

Důsledek: Jsou-li dvě výrokové φ, ψ formule ekvivalentní (tj. $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ je tautologie, značeno $\varphi \equiv \psi$), pak $\mathbf{K}_n \vdash K_i \varphi \equiv K_i \psi$

Následující vztahy lze dokázat (viz cvičení):

a) $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\alpha \wedge K_i\beta$

b) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A6}) \vdash \neg(K_i\alpha \wedge K_i\neg\alpha)$

c) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3}) \vdash \mathrm{A6}$

d) $\mathbf{K}_n \vdash K_i\neg(p \to K_i p) \equiv K_i(p \wedge \neg K_i p) \equiv (K_i p \wedge K_i(\neg K_i p))$

e) V $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ nemůže být dokazatelné $K_i\neg(p \to K_i p)$

$\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\alpha \wedge K_i\beta$

1. $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\alpha$ [viz přednáška]
2. $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta$ [obdobně, viz přednáška]
3. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\alpha) \to ((K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta)))$
   [$(\rho \to \varphi) \to ((\rho \to \psi) \to (\rho \to (\varphi \wedge \psi)))$ výroková tautologie]
4. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta))$ [MP: 3,1]
5. $K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta)$ [MP: 4,2]

$\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\alpha \wedge K_i\beta$

1. $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\alpha$ [viz přednáška]
2. $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta$ [obdobně, viz přednáška]
3. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\alpha) \to ((K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta)))$
4. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta))$ [MP: 3,1]
5. $K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\alpha \wedge K_i\beta)$ [MP: 4,2]
6. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ [výroková tautologie]
7. $K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [R2:6]
8. $K_i\alpha \to (K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [A2]
9. $K_i(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 8]
10. $(K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 9,7]
11. $(K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to (K_i\beta \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))))$ [Výr.Ax1]
12. $K_i\beta \to (K_i\alpha \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 11,10]
13. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ [výroková úprava 12]
14. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 13]
15. $K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)$ [A2]
16. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta))$
    $\to (((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [Výr. Ax3]
17. $(K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)) \to ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [V.Ax1]
18. $((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to (K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 17,15]
19. $(((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i\beta \wedge K_i(\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \to ((K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 16,18]
20. $(K_i\alpha \wedge K_i\beta) \to K_i(\alpha \wedge \beta)$ [MP: 19,14]

Následující vztahy lze dokázat (viz cvičení):

b) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A6}) \vdash \neg(K_i\alpha \wedge K_i\neg\alpha)$.

Z předchozího tvrzení víme, že

1. $(K_i\alpha \wedge K_i\neg\alpha) \equiv K_i(\alpha \wedge \neg\alpha)$
2. $\neg K_i(\mathit{false})$ (A6)
3. $\mathit{false} \equiv (\alpha \wedge \neg\alpha)$ (tautologie: A1)
4. $\neg K_i(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (dosazením ekv.3 do 2)
5. $\neg(K_i\alpha \wedge K_i\neg\alpha) \equiv \neg K_i(\alpha \wedge \neg\alpha)$
6. $\neg(K_i\alpha \wedge K_i\neg\alpha)$ (Modus ponens a 5)

Následující vztahy lze dokázat (viz cvičení):

c1) K2, T(A3) $\vdash \neg K_i\,\mathit{false}$

1. $K_i\,\mathit{false} \to \mathit{false}$ [A3]
2. $\neg\mathit{false} \to (\neg K_i\,\mathit{false})$ [ekv. úprava 1]
3. $\neg K_i\,\mathit{false}$ [použití výrokové tautologie na 2]

c2) K2, T $\vdash \neg K_i\alpha \vee \neg K_i\neg K_i\alpha$

c3) K2, T $\vdash \neg K_i(\alpha \wedge \neg K_i\alpha)$

1. $K_i\neg K_i\alpha \to \neg K_i\alpha$ (A3, axiom pravdy)
2. $\neg K_i\neg K_i\alpha \vee \neg K_i\alpha$ (výrok. Tautologie – přepis 1), *viz* a1
3. $\neg(K_i\neg K_i\alpha \wedge K_i\alpha)$ (výrok. Tautologie – přepis 2)
4. $\neg K_i(\neg K_i\alpha \wedge \alpha)$ (tvrzení o ekvivalenci a) pro formuli 3), *viz* a2

Cvičení. Dokažte, že následující formule jsou validní:

(i) $(C_G A \wedge C_G(A \to B)) \to C_G B$

(ii) $C_G A \to A$

(iii) $C_G A \to C_G C_G A$

(iv) $\neg C_G A \to C_G \neg C_G A$

Předpoklady o relacích K_i jsou stejné, jako při odvození odpovídajících axiomů.

Axiom o pevném bodu.

Nechť p je výrok „alespoň jeden z vás má zablácené čelo“.

Připomeňme, že ve hře zablácených dětí, se z p stala všeobecná znalost v okamžiku, kdy otec řekl p a všechny děti věděly dvě věci: že platí p a že jsou v takové situaci.

Axiom.

$$\models C_G A \leftrightarrow E_G(A \wedge C_G A)$$

{ $C_G A$ je pevným bodem funkce $f(x) = E_G(A \wedge x)$ }

VZ 2009