Reprezentace znalostí pomocí fuzzy množin

Mirko Navara
http://cmp.felk.cvut.cz/˜navara
13. prosince 2009

1 Pojem fuzzy množiny

1.1 Minimum o klasických množinách

Abychom se vyhnuli problémům, omezíme se na podmnožiny nějaké **univerzální množiny** (**univerza**) X

$\mathcal{P}(X)$ značí množinu všech podmnožin množiny X

Množinu $A \in \mathcal{P}(X)$ jednoznačně určuje její **charakteristická funkce** $\mu_A : X \to \{0, 1\}$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

$$A = \{x \in X : \ \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\}.$$

Pomocí značení

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \ \mu_A(x) \in M\}$$

lze psát

$$A = \mu_A^{-1}\big(\{1\}\big) = \mu_A^{-1}\big((0, 1\rangle\big).$$

Místo $\mu_A^{-1}\big(\{1\}\big)$ píšeme $\mu_A^{-1}(1)$ apod.

Speciálně $\mu_\emptyset = 0$, $\mu_X = 1$.

1.2 Zavedení fuzzy množin

Fuzzy podmnožina univerza X (stručně **fuzzy množina**) je objekt A, který popisuje (zobecněná) **charakteristická funkce** (**funkce příslušnosti**) $\mu_A : X \to \langle 0, 1\rangle$

Alternativní značení: $A(x)$

„Klasické“ množiny nazýváme v tomto kontextu **ostré** (angl. **crisp, sharp**).

$\mathcal{F}(X)$ značí množinu všech fuzzy podmnožin univerza X

Obor pravdivostních hodnot (angl. **range, level set**): $\mathrm{Range}(A) = \big\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ (\exists x \in X : \ \mu_A(x) = \alpha)\big\} = \mu_A(X)$

Výška: $h(A) = \sup \mathrm{Range}(A)$

Nosič (angl. **support**): $\mathrm{Supp}(A) = \big\{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\big\} = \mu_A^{-1}\big((0, 1\rangle\big)$

Jádro (angl. **core**): $\mathrm{core}(A) = \big\{x \in X : \ \mu_A(x) = 1\big\} = \mu_A^{-1}(1)$

Příklady fuzzy množin

$A, B \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 2 - x & \text{pro } x \in (1, 2\rangle, \\ 0 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3, \\ 1 & \text{pro } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 5, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Konečné fuzzy množiny zapisujeme stručněji např. $\mu_B = \{(3, \frac{1}{2}), (4, 1), (5, \frac{1}{4})\}$.

Alternativní značení: $\mu_B = \{\frac{1}{2}/3, 1/4, \frac{1}{4}/5\}$, $\mu_B = \frac{1}{2}/3 + 1/4 + \frac{1}{4}/5$.

1.3 Fuzzy inkluze

Klasická definice $A \subseteq B \iff \forall x \in A : \ \ x \in B$ se nehodí, neboť pro fuzzy množiny nemůžeme psát $x \in A, x \in B$

Nicméně $A \subseteq B \iff \forall x \in X : \ \mu_A(x) \le \mu_B(x) \iff \mu_A \le \mu_B$

Tuto definici používáme i pro **fuzzy množiny** A, $B \in \mathcal{F}(X)$

2 Operace s fuzzy množinami

2.1 Operace s ostrými množinami

množinové operace	výrokové operace	vztah
$\overline{} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$	$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$	$\overline{A} = \{x \in X : \neg(x \in A)\}$
$\cap : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	$\wedge : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
$\cup : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	$\vee : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Pomocí charakteristických funkcí:

$\mu_{\overline{A}}(x) = \neg \mu_A(x)$
$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$
$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

2.2 Zákony Booleovy algebry

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\neg\neg\alpha & = & \alpha, & & & \\
\alpha \vee \beta & = & \beta \vee \alpha, & \alpha \wedge \beta & = & \beta \wedge \alpha, \\
(\alpha \vee \beta) \vee \gamma & = & \alpha \vee (\beta \vee \gamma), & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & = & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & = & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), & \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & = & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), \\
\alpha \vee \alpha & = & \alpha, & \alpha \wedge \alpha & = & \alpha, \\
\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) & = & \alpha, & \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) & = & \alpha, \\
\alpha \vee 1 & = & 1, & \alpha \wedge 0 & = & 0, \\
\alpha \vee 0 & = & \alpha, & \alpha \wedge 1 & = & \alpha, \\
\alpha \wedge \neg\alpha & = & 0, & \alpha \vee \neg\alpha & = & 1, \\
\neg(\alpha \wedge \beta) & = & \neg\alpha \vee \neg\beta, & \neg(\alpha \vee \beta) & = & \neg\alpha \wedge \neg\beta.
\end{array}
$$

2.3 Fuzzy negace

je unární operace $\underset{\cdot}{\neg} : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ taková, že

$$\alpha \le \beta \Rightarrow \underset{\cdot}{\neg}\beta \le \underset{\cdot}{\neg}\alpha, \tag{N1}$$

$$\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \alpha. \tag{N2}$$

Příklad: **Standardní negace**: $\underset{\mathrm{s}}{\neg}\alpha = 1 - \alpha$.

Vlastnosti fuzzy negací

Věta: Každá fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$ je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky

$$\underset{\cdot}{\neg}1 = 0, \qquad \underset{\cdot}{\neg}0 = 1. \tag{N0}$$

Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. $\underset{\cdot}{\neg}^{-1} = \underset{\cdot}{\neg}$

Důkaz:

- Prostá: Je-li $\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\beta$, pak $\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\beta = \beta$.
- Surjektivní („na“): Pro každé $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ existuje $\beta \in \langle 0,1 \rangle$ takové, že $\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\beta$, totiž $\beta = \underset{\cdot}{\neg}\alpha$.
- $\Rightarrow$ spojitost a okrajové podmínky.
- Symetrie grafu je ekvivalentní s involutivitou (N2) .

Věta o reprezentaci fuzzy negací

Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce $\underset{\cdot}{\neg} : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ byla fuzzy negace, je existence rostoucí bijekce $i : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ (**generátor fuzzy negace** $\underset{\cdot}{\neg}$) takové, že

$$\underset{\cdot}{\neg} = i \circ \underset{\mathrm{s}}{\neg} \circ i^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \underset{\cdot}{\neg}\alpha = i^{-1}\big(\underset{\mathrm{s}}{\neg}\, i(\alpha)\big).$$

Důkaz: (Dle [Nguyen-Walker].)

- Postačující:

(N1): Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle$, $\alpha \leq \beta$.
i, i^{-1} uspořádání zachovávají, $\underset{\mathrm{S}}{\neg}$ obrací:

$$\begin{aligned} i(\alpha) &\leq i(\beta) \\ \underset{\mathrm{S}}{\neg} i(\alpha) &\geq \underset{\mathrm{S}}{\neg} i(\beta) \\ i^{-1}\big(\underset{\mathrm{S}}{\neg} i(\alpha)\big) &\geq i^{-1}\big(\underset{\mathrm{S}}{\neg} i(\beta)\big) \\ \underset{\cdot}{\neg} \alpha &\geq \underset{\cdot}{\neg} \beta \end{aligned}$$

(N2): $\underset{\cdot}{\neg} \circ \underset{\cdot}{\neg} = i \circ \underset{\mathrm{S}}{\neg} \circ i^{-1} \circ i \circ \underset{\mathrm{S}}{\neg} \circ i^{-1} = i \circ \underset{\mathrm{S}}{\neg} \circ \underset{\mathrm{S}}{\neg} \circ i^{-1} = i \circ i^{-1} = \mathrm{id}$,
kde id je identita na $\langle 0, 1\rangle$.

Možná konstrukce generátoru fuzzy negace

- Nutná: Dokážeme, že

$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \underset{\mathrm{S}}{\neg} \underset{\cdot}{\neg} \alpha}{2}$$

je generátorem fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$.
i je rostoucí, spojitá, $i(0) = 0$, $i(1) = 1$, tedy i je bijekce na $\langle 0, 1\rangle$.

$$\begin{aligned} \underset{\mathrm{S}}{\neg} i(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha + \underset{\mathrm{S}}{\neg} \underset{\cdot}{\neg} \alpha}{2} = \frac{1 - \alpha + 1 - \underset{\mathrm{S}}{\neg} \underset{\cdot}{\neg} \alpha}{2} = \frac{\underset{\mathrm{S}}{\neg} \alpha + \underset{\mathrm{S}}{\neg} \underset{\mathrm{S}}{\neg} \underset{\cdot}{\neg} \alpha}{2} = \\ &= \frac{\underset{\mathrm{S}}{\neg} \alpha + \underset{\cdot}{\neg} \alpha}{2} = \frac{\underset{\mathrm{S}}{\neg} \underset{\cdot}{\neg} \underset{\cdot}{\neg} \alpha + \underset{\cdot}{\neg} \alpha}{2} = i(\underset{\cdot}{\neg} \alpha). \\ i \circ \underset{\mathrm{S}}{\neg} &= \underset{\cdot}{\neg} \circ i, \text{ neboli } i \circ \underset{\mathrm{S}}{\neg} \circ i^{-1} = \underset{\cdot}{\neg} \end{aligned}$$

Generátor fuzzy negace není jednoznačně určen.

2.4 Fuzzy doplněk

$$\mu_{\overline{A}^{\cdot}}(x) = \underset{\cdot}{\neg} \mu_A(x).$$

Rozlišujeme stejnými indexy jako u fuzzy negací, například $\overline{A}^{S}$ je standardní doplněk.

2.5 Fuzzy konjunkce (trojúhelníková norma, t-norma)

(angl. **triangular norm**) je binární operace $\underset{\cdot}{\wedge} : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ splňující následující axiomy pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \beta \underset{\cdot}{\wedge} \alpha \qquad \text{(komutativita) (T1)}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma) = (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \qquad \text{(asociativita) (T2)}$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \qquad \text{(monotonie) (T3)}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha \qquad \text{(okrajová podmínka) (T4)}$$

Věta: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 = 0$.

Důkaz: Podle (T3) a (T4) platí: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 \overset{\text{(T3)}}{\leq} 1 \underset{\cdot}{\wedge} 0 \overset{\text{(T4)}}{=} 0$.

Příklady fuzzy konjunkcí

- **Standardní** (**min**, **Gödelova**, **Zadehova** …):

$$\alpha \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \beta = \min(\alpha, \beta).$$

- **Součinová** (**produktová**, **pravděpodobnostní**, **Goguenova**, angl. **algebraic product** …):

$$\alpha \underset{\mathrm{P}}{\wedge} \beta = \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova** (**Gilesova**, angl. též **bold** …):

$$\alpha \underset{\mathrm{L}}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická** (**slabá**, angl. **weak** …):

$$\alpha \underset{\mathrm{D}}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vlastnosti fuzzy konjunkcí

Věta:

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle : \quad \alpha \underset{\mathrm{D}}{\wedge} \beta \le \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \le \alpha \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \beta.$$

Důkaz: Je-li $\alpha = 1$ nebo $\beta = 1$, pak podmínka (T4) dává stejný výsledek pro všechny fuzzy konjunkce. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti) $\alpha \le \beta < 1$. Pak

$$\alpha \underset{\mathrm{D}}{\wedge} \beta = 0 \le \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \le \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha = \alpha \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \beta.$$

Věta: Standardní konjunkce je jediná, která je **idempotentní**, tj. $\forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle : \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha = \alpha$

Důkaz: Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle$, $\alpha \le \beta$.

$$\alpha = \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha \overset{(\mathrm{T3})}{\le} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \overset{(\mathrm{T3})}{\le} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 \overset{(\mathrm{T4})}{=} \alpha,$$

tedy $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \alpha = \alpha \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \beta$.
Totéž pro $\alpha > \beta$.

Reprezentace fuzzy konjunkcí (obecně)

Věta: Nechť $\underset{1}{\wedge}$ je fuzzy konjunkce a $i : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ rostoucí bijekce. Pak operace $\underset{2}{\wedge} : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ definovaná vzorcem

$$\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)\big)$$

je fuzzy konjunkce. Je-li $\underset{1}{\wedge}$ spojitá, je $\underset{2}{\wedge}$ též spojitá.

Důkaz:

- Komutativita (asociativita se dokáže obdobně):

$$\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)) = i^{-1}(i(\beta) \underset{1}{\wedge} i(\alpha)) = \beta \underset{2}{\wedge} \alpha$$

- Monotonie: Předpokládejme $\beta \le \gamma$.

$$\begin{aligned} i(\beta) &\le i(\gamma), \\ i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta) &\le i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\gamma), \\ \alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)) &\le i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\gamma)) = \alpha \underset{2}{\wedge} \gamma. \end{aligned}$$

- Okrajová podmínka:

$$\alpha \underset{2}{\wedge} 1 = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(1)) = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} 1) = i^{-1}(i(\alpha)) = \alpha.$$

Klasifikace fuzzy konjunkcí

Spojitá fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$ je

- **archimédovská**, jestliže
$$\forall \alpha \in (0,1): \quad \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha < \alpha \tag{TA}$$
- **striktní**, jestliže
$$\forall \alpha \in (0,1\rangle\ \forall \beta, \gamma \in \langle 0,1\rangle: \quad \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta < \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \tag{T3+}$$
- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

Příklad: Součinová konjunkce je striktní, Łukasiewiczova je nilpotentní, standardní a drastická nejsou archimédovské (standardní nesplňuje (TA), drastická není spojitá).

Věta o reprezentaci striktních fuzzy konjunkcí

Operace $\underset{\cdot}{\wedge}: \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je striktní fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i: \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**multiplikativní generátor**) taková, že

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{P}{\wedge} i(\beta)\big) = i^{-1}\big(i(\alpha) \cdot i(\beta)\big).$$

Že je podmínka postačující, jsme již dokázali (kromě striktnosti, což je snadné). Důkaz nutnosti je mnohem obtížnější.

Multiplikativní generátor striktní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.

Věta o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí

Operace $\underset{\cdot}{\wedge}: \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je **nilpotentní** fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i: \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**Łukasiewiczův generátor**) taková, že

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{L}{\wedge} i(\beta)\big).$$

Łukasiewiczův generátor nilpotentní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.

Věta: Nechť $\underset{\cdot}{\wedge}$ je **nilpotentní** fuzzy konjunkce. Pak

$$\forall \alpha \in (0,1)\ \exists n \in \mathbf{N}: \underset{\cdot}{\bigwedge}\nolimits_{k=1}^{n} \alpha = 0$$

Důkaz: Podle reprezentační věty stačí (bez újmy na obecnosti) dokázat větu pro Łukasiewiczovu konjunkci. Pro dostatečně velké n dostáváme

$$\alpha + \sum_{i=2}^{n} (\alpha - 1) \leq 0, \qquad \underset{L}{\bigwedge}\nolimits_{k=1}^{n} \alpha = 0.$$

2.6 Fuzzy průnik

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy konjunkce:

$$\mu_{A \underset{\cdot}{\cap} B}(x) = \mu_A(x) \underset{\cdot}{\wedge} \mu_B(x)$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy konjunkcí)

2.7 Fuzzy disjunkce (trojúhelníková konorma, t-konorma)

je binární operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ splňující

$$\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = \beta \mathbin{\dot\vee} \alpha \qquad \text{(komutativita) (S1)}$$

$$\alpha \mathbin{\dot\vee} (\beta \mathbin{\dot\vee} \gamma) = (\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \mathbin{\dot\vee} \gamma \qquad \text{(asociativita) (S2)}$$

$$\beta \le \gamma \Rightarrow \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta \le \alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma \qquad \text{(monotonie) (S3)}$$

$$\alpha \mathbin{\dot\vee} 0 = \alpha \qquad \text{(okrajová podmínka) (S4)}$$

Věta: $\alpha \mathbin{\dot\vee} 1 = 1.$

Důkaz: $\alpha \mathbin{\dot\vee} 1 \overset{(S3)}{\ge} 0 \mathbin{\dot\vee} 1 \overset{(S4)}{=} 1.$

Příklady fuzzy disjunkcí

- **Standardní** (**max**, **Gödelova**, **Zadehova** ...):

$$\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$$

- **Součinová** (**produktová**, **pravděpodobnostní** ...):

$$\alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova** (**Gilesova**, angl. též **bold**, **bounded sum** ...):

$$\alpha \overset{L}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická** (**slabá**, angl. **weak** ...):

$$\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Einsteinova**

$$\alpha \overset{E}{\vee} \beta = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

Vlastnosti fuzzy disjunkcí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle : \;\; \alpha \overset{S}{\vee} \beta \le \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta \le \alpha \overset{D}{\vee} \beta.$$

Standardní disjunkce je jediná, která je idempotentní, tj. $\alpha \mathbin{\dot\vee} \alpha = \alpha$ pro všechna $\alpha \in \langle 0,1\rangle$.

Dualita

Nechť $\underset{\cdot}{\neg}$ je fuzzy negace.

A. Je-li $\underset{\cdot}{\wedge}$ fuzzy konjunkce, pak $\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\, \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \underset{\cdot}{\neg}\, \beta)$ je fuzzy disjunkce (**duální** k $\underset{\cdot}{\wedge}$ vzhledem k $\underset{\cdot}{\neg}$).

B. Je-li $\dot\vee$ fuzzy disjunkce, pak $\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\, \alpha \mathbin{\dot\vee} \underset{\cdot}{\neg}\, \beta)$ je fuzzy konjunkce (**duální** k $\dot\vee$ vzhledem k $\underset{\cdot}{\neg}$).

Věta:

- **Łukasiewiczovy** operace $\underset{L}{\wedge}, \overset{L}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Součinové** operace $\underset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Standardní** operace $\underset{S}{\wedge}, \overset{S}{\vee}$ jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.
- **Drastické** operace $\underset{D}{\wedge}, \overset{D}{\vee}$ jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.

Klasifikace fuzzy disjunkcí

Spojitá fuzzy disjunkce $\dot\vee$ je

- **archimédovská**, jestliže
$$\forall \alpha \in (0,1): \ \ \alpha \mathbin{\dot\vee} \alpha > \alpha \tag{SA}$$
- **striktní**, jestliže
$$\forall \alpha \in \langle 0,1) \ \forall \beta,\gamma \in \langle 0,1\rangle: \ \ \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta < \alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma \tag{S3+}$$
- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

Věty o reprezentaci fuzzy disjunkcí

Věta: Operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je **striktní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ taková, že
$$\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \overset{\mathrm{P}}{\vee} i(\beta)\big).$$

Věta: Operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je **nilpotentní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**aditivní generátor**) taková, že
$$\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \overset{\mathrm{L}}{\vee} i(\beta)\big) = \begin{cases} i^{-1}\big(i(\alpha)+i(\beta)\big) & \text{pro } i(\alpha)+i(\beta) \le 1 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2.8 Fuzzy sjednocení

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy disjunkce:
$$\mu_{A \dot\cup B}(x) = \mu_A(x) \mathbin{\dot\vee} \mu_B(x).$$
(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy disjunkcí)

2.9 Fuzzy výrokové algebry

černě vyznačené platí vždy
červeně vyznačené platí pro standardní fuzzy operace, ale ne pro některé jiné
modře vyznačené platí jen pro některé volby fuzzy operací (ne pro standardní)

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\dot\neg\dot\neg\alpha &=& \alpha, && & \\
\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta &=& \beta \mathbin{\dot\vee} \alpha, & \alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta &=& \beta \mathbin{\dot\wedge} \alpha, \\
(\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \mathbin{\dot\vee} \gamma &=& \alpha \mathbin{\dot\vee} (\beta \mathbin{\dot\vee} \gamma), & (\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta) \mathbin{\dot\wedge} \gamma &=& \alpha \mathbin{\dot\wedge} (\beta \mathbin{\dot\wedge} \gamma), \\
\alpha \mathbin{\dot\wedge} (\beta \mathbin{\dot\vee} \gamma) &=& (\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta) \mathbin{\dot\vee} (\alpha \mathbin{\dot\wedge} \gamma), & \alpha \mathbin{\dot\vee} (\beta \mathbin{\dot\wedge} \gamma) &=& (\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \mathbin{\dot\wedge} (\alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma), \\
\alpha \mathbin{\dot\vee} \alpha &=& \alpha, & \alpha \mathbin{\dot\wedge} \alpha &=& \alpha, \\
\alpha \mathbin{\dot\vee} (\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta) &=& \alpha, & \alpha \mathbin{\dot\wedge} (\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) &=& \alpha, \\
\alpha \mathbin{\dot\vee} 1 &=& 1, & \alpha \mathbin{\dot\wedge} 0 &=& 0, \\
\alpha \mathbin{\dot\vee} 0 &=& \alpha, & \alpha \mathbin{\dot\wedge} 1 &=& \alpha, \\
\alpha \mathbin{\dot\wedge} \dot\neg\alpha &=& \mathbf{0}, & \alpha \mathbin{\dot\vee} \dot\neg\alpha &=& \mathbf{1}, \\
\dot\neg(\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta) &=& \dot\neg\alpha \mathbin{\dot\vee} \dot\neg\beta, & \dot\neg(\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) &=& \dot\neg\alpha \mathbin{\dot\wedge} \dot\neg\beta.
\end{array}$$

Literatura

[1] Navara, M., Olšák, P.: *Základy fuzzy množin.* Skriptum ČVUT, 2. (přepracované) vydání, Praha, 2007.

[2] Kolesárová, A., Kováčová, M.: *Fuzzy množiny a ich aplikácie.* STU, Bratislava, 2004.

[3] Turunen, E.: *Mathematics Behind Fuzzy Logic.* Physica-Verlag, 1999.

[4] Jura, P.: Základy fuzzy logiky pro řízení a modelování. VUT Brno, 2003.

[5] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank: *An Introduction to Fuzzy Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.

[6] Kruse, R., Gebhardt, J., Klawon, F.: *Foundations of Fuzzy Systems.* J. Wiley, 1994.

[7] Novák, V.: *Základy fuzzy modelování.* BEN – technická literatura, Praha, 2000.

[8] Novák, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* Mat. seminář SNTL, Praha, 1990.

[9] Vysoký, P.: *Fuzzy řízení.* Skriptum ČVUT, Praha, 1996.

[10] Klir, G.J., Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications.* Prentice-Hall, 1995.

[11] Nguyen, H.T., Walker, E.A.: *A First Course in Fuzzy Logic.* 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton/London/New York/Washington, 2000.

[12] Ross, T.J.: Fuzzy Logic with Engineering Applications. 2nd ed., John Wiley & Sons, 2004.

Doplňková:

[13] Hájek, P.: *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer, Dordrecht, 1998.

[14] Butnariu, D., Klement, E.P.: *Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions.* Kluwer, Dordrecht, 1993.

[15] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E.: *Triangular Norms.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[16] Gottwald, S.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Teknea, SA, Toulouse, 1993.

[17] Gottwald, S.: *Einführung in Fuzzy-Methoden.* 4th ed. Akademie Verlag, Berlin, 1993.

[18] Cignoli R., D'Ottaviano I.M.L., Mundici D.: *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning.* Trends in Logic, Volume 7. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[19] Mareš, M.: *Computation over Fuzzy Quantities.* CRC Press, Boca Raton, 1994.