1.
Najděte v textu *T* všechny výskyty řetězců, které mají od vzorku *P* Hammingovu vzdálenost rovnou nejvýše *k*. Použijte metodu dynamického programování ([TSA] str. 199 – 202).

a) *T* = ccacbaabccaccbcabccc
P = abcba
k = 2

		c	c	a	c	b	a	a	b	c	c	a	c	c	b	c	a	b	c	c	c
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	3	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
b	3	4	2	2	1	1	2	1	0	2	2	2	1	2	1	2	2	0	2	2	2
c	3	3	4	3	2	2	2	3	2	0	2	3	2	1	3	1	3	3	0	2	2
b	3	4	4	5	4	2	3	3	3	3	1	3	4	3	1	4	2	3	4	1	3
a	3	4	5	4	6	5	2	3	4	4	4	1	4	5	4	2	4	3	4	5	2
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Hledané výskyty končí na pozicích 6, 11, 15, 20.

b) *T* = 000111011000101010111110
P = 110010
k = 3

		0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	4	5	2	2	1	0	0	1	1	0	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	4	4	5	2	3	2	1	0	2	2	0	1	2	3	1	2	1	2	1	2	2	1	1	1	0
0	4	4	4	5	3	4	3	1	1	3	2	0	1	3	3	2	2	2	2	2	3	3	2	2	1
1	4	5	5	5	5	3	4	4	1	1	4	3	1	1	4	3	3	2	3	2	2	3	3	2	3
0	4	4	5	5	6	6	4	4	5	2	1	4	3	2	1	5	3	4	2	4	3	3	4	4	2
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Hledané výskyty končí na pozicích 9,10, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 24

2.
Ukažte, že Levenshteinova vzdálenost splňuje axiomy metriky.

Uvažujme dvě libovolná slova *u, v, w* nad abecedou A {a_1, a_2, ..., a_n}. Levenshteinovu vzdálenost slov u, v, označme d(*u,v*). Axiomy metriky jsou:
1. d(*u,v*) = d(*v,u*),
2. d(*u,v*) $\geq$ 0,
3. d(*u,v*) = 0 $\Leftrightarrow$ *u* = *v,*
4. d(*u,w*) $\leq$ d(*u,v*) + d(*v,w*).

1. Sporem. Nechť BÚNO d_1 = d(*u,v*) < d(*v,u*). Nechť dále *v* vzniká z *u* pomocí *k* operací vypuštění symbolu, *l* operací substituce symbolu a *m* operací vložení symbolu, $k + l + m = d_1$. Potom je též možné vytvořit *u* z *v* pomocí odpovídajících *m* operací vypuštění příslušných symbolů, *l* operací substituce symbolu a *k* operací vložení symbolu. (Každá operace má svůj odpovídající protějšek – vložení symbolu a_i do *u* má protějšek vypuštění symbolu a_i z *v* a

obráceně, substituce symbolu a_i symbolem a_j v u má protějšek substituci symbolu a_j symbolem a_i ve v.) To znamená, že u lze vytvořit z v rovněž pomocí d_1 operací. Vzdálenost $d(v,u)$ je ale rovna minimálnímu počtu operací nezbztných pro tuto akci, tedy $d(v,u) \leq d_1$. To je spor s předpokladem $d_1 < d(v,u)$.

2. Zřejmé záporný počet operací vypuštění, vložení nebo substituce symbolu ve slově není definován.

3. Pokud $d(u,v) = 0$, nebyla použita žádná operace transformující u ve v, tedy $u = v$.
Pokud $u = v$, je minimální počet operací potřebný na změnu u ve v roven 0.

4. Změníme u ve v pomocí $d(u,v)$ operací, a dále změníme v ve w pomocí $d(v,w)$ operací. Tím jsme změnili u ve w pomocí $d(u,v) + d(v,w)$ operací. Protože vzdálenost $d(u,w)$ je rovna minimálnímu počtu operací nutných ke změně u ve w, musí platit $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$. (Dokonce, položíme-li $u = w \neq v$, vidíme pomocí 3., že $0 = d(u,w)$, $d(u,v) > 0$, $d(v,w) > 0$, tedy v tomto případě platí $d(u,w) < d(u,v) + d(v,w)$, takže někdy nastává i ostrá nerovnost v 4. To bychom podotkli, jen abychom ukázali netrivialitu takto definované vzdálenosti.)

3.
Napište všechna slova, která mají od vzorku aba nad abecedou {a, b, c} Levenshteinovu vzdálenost rovnu
a) 1
b) 2

a) Vložením: aaba, abaa; substitucí: aaa, bba, abb, cba, aca, abc; smazáním: ba, aa, ab.
b) Délka 1 (dvě smazání: a, b).
Délka 2 (jedno smazání a jedna substituce): ac, bb, bc, ca, cb.
Délka 3 (dvě substituce): aab, aac, aca, acb, acc, baa, bbb, bbc, bca, caa, cbb, cbc, cca.
(jedno smazání i vložení, jen výsledky různé od předchozích): bab, bac, cab.
Délka 4 (jedno vložení a jedna substituce): aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aaca, abbb, abbc, abca, abcb, abcc, acaa, acab, acac, acba, acbb, acbc, acca, baaa, babb, babc; baca, bbaa, bbab, bbac, bbba, bbca, bcba, caaa, cabb, cabc, caca, cbaa, cbab, cbac, cbba, cbca, ccba.
Délka 5 (dvě vložení): aaaba, aaaba, aabaa, aabab, aabac, aabba, aabca, aacba, abaab, abaac, ababa, ababa, ababa, ababa, ababb, ababb, ababc, abaca, abaca, abacb, abacc, abbaa, abbac, abbba, abbca, abcaa, abcab, abcac, abcba, abcba, abcca, acaba, acaba, acbaa, acbab, acbac, acbba, acbca, accba, baaba, babaa, babab, babac, babba, babca, bacba, bbaba, bcaba, caaba, cabaa, cabab, cabac, cabba, cabca, cacba, cbaba, ccaba.

4.
Abeceda A obsahuje n symbolů, slovo w má délku m. Odhadněte shora počet slov nad abecedou A, která mají od w Hammingovu vzdálenost rovnu k ($0 \leq k \leq m$).

Můžeme provést nejvýše $C(m, k) \times n^k$ substitucí, kde $C(m, k)$ je kombinační číslo „m nad k“.

5.
Abeceda A obsahuje n symbolů, slovo w má délku m. Odhadněte shora počet slov nad abecedou A, která mají od w Levenshteinovu vzdálenost rovnu k ($0 \leq k \leq m$).

Nejvíce nových slov vygenerujeme jednou operací vložení, tak může vzniknout ze slova délky m až $n \times (m+1)$ nových slov. protože se slova vkládáním budou prodlužovat, vytvoříme nejvýše $(n \times (m+k))^k$ nových slov. Pokuste se o přesnější odhad.

6.
Najděte v textu *T* všechny výskyty řetězců, které mají od vzorku *P* Levenshteinovu vzdálenost rovnou nejvýše *k*. Použijte metodu dynamického programování ([TSA] str. 202 – 205).

a) *T* = aacacacbaabbbcbbcacc
P = abbcba
k = 2

		a	a	c	a	c	a	c	b	a	a	b	b	b	c	b	b	c	a	c	c
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	3	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
b	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2	1	1	2	1	1	2
b	3	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	0	1	2	2	1	2	2	2	2
b	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	2	1	0	1	2	2	2	3	3	3
a	3	3	3	4	3	4	3	4	3	2	2	3	2	1	1	2	3	3	2	4	4
i		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Hledané výskyty končí na pozicích 9 (acba),10 (acbaa) , 12 (abb, aabb) , 13 (bbb, abbb), 14 (bbbc, abbbc), 15 (abbbcb), 18(bbca, cbbca).

b) *T* = 0100111010000101010111100
P = 11100
k = 1

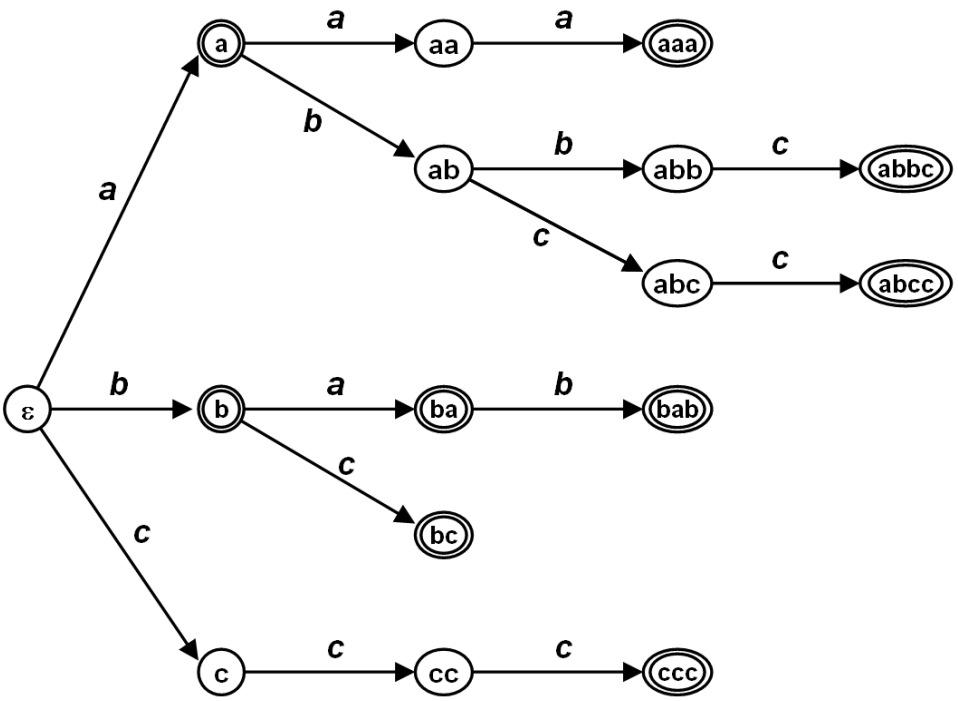
		0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	2	2	1	1	2	1	0	0	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	2
1	2	3	2	2	2	2	1	0	1	1	2	2	3	3	2	2	1	2	1	2	1	1	0	1	2
0	2	2	3	2	2	3	2	1	0	1	1	2	2	3	3	2	2	1	2	1	2	2	1	0	1
0	2	2	3	3	2	3	3	2	1	1	1	1	2	2	4	3	3	2	2	2	2	3	2	1	0
i		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Hledané výskyty končí na pozicích 8 (1110), 9 (11101), 10 (111010), 11 (10100, 110100), 23 (1110), 24 (1100, 11100).

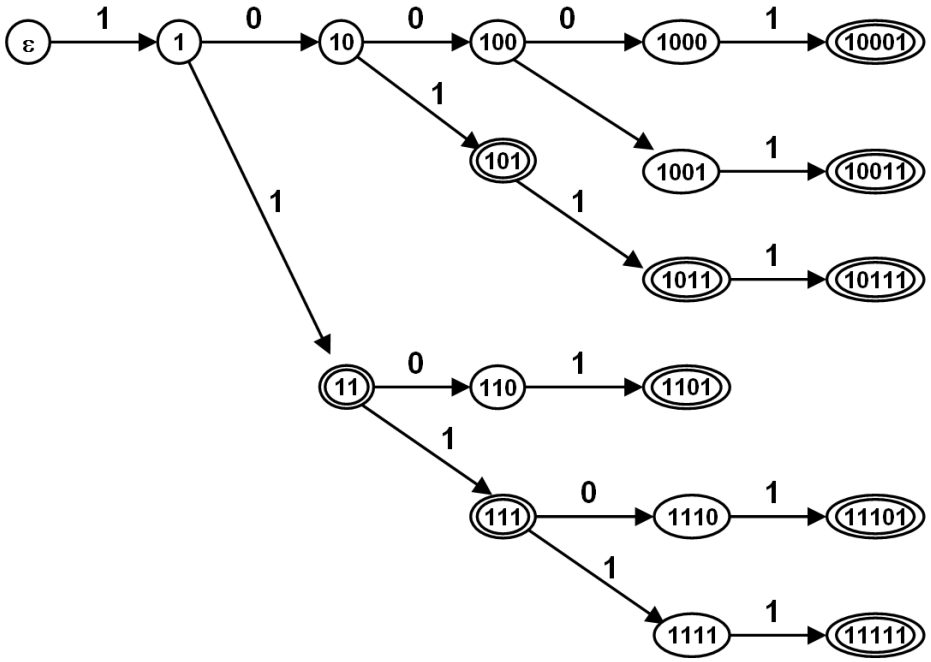
7.
Sestrojte deterministický automat nad abecedou A, který přijímá právě množinu M slov nad touto abecedou.

a) A = {a, b, c}, M = {a, b, ba, bc, aaa, bab, ccc, abbc, abcc } .
b) A = {0, 1}, M = {10, 11, 101, 111, 1011, 1101, 10001, 10011, 10111, 11101, 11111 }.

a)



b)



8.
Sestrojte deterministický automat, který v textu nad abecedou A vyhledá právě každé slovo množiny M z předchozí úlohy.
(Řešení explicitně neuvádím, přidá se smyčka ohodnocená celou abecedou do prvního stavu ε a provede se standardní determinizace.)

9.
Sestavte automat, který v textu nad abecedou A vyhledává všechna slova popsaná regulárním výrazem R.

a) A = {a,b,c}, R = c*(ac + bb)*
b) A = {0, 1}, R = 0*(101 + 11)*0

Návod: Zopakujte si postup vytvoření NKA přijímajícího jazyk popsaný daným regulárním výrazem (je i v [TSA], Algoritmus 1.47., str. 21), . Tento NKA opatříme v počátečním stavu smyčkou pro všechny znaky abecedy a provedeme standardní algoritmus pro převod NKA na DKA.

10.
Demonstrujte fakt, že paměťová složitost deterministického automatu pro vyhledávání slov odpovídajících regulárnímu výrazu může růst exponenciálně s počtem přijímaných slov. Použijte regulární výraz R = $a(a+b)^{m-1}$ ($m \geq 1$).

Návod: Vytvořte přechodovou tabulku příslušného automatu pro $m \geq 5$ a sledujte, jak v tomto případě postupuje algoritmus pro převod NKA na DKA.

11.
Sestavte tabulky pro simulaci činnosti vyhledávacího automatu metodou bitového paralelizmu pro daný text *t*, vzorek *p* a Hammingovu vzdálenost *k*,

a) *t* = abcbcaaccbbaa
p = bbac
k = 2

R0

	a	b	c	b	c	a	a	c	c	b	b	a	a
b	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
b	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
c	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

R1

	a	b	c	b	c	a	a	c	c	b	b	a	a
b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
a	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

R2

	a	b	c	b	c	a	a	c	c	b	b	a	a
b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
c	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Stínované pozice odpovídají konci nalezeného řetězce, jehož Hammingova vzdálenost od vzoru je rovna *k.*

b) t = accbbaaabcba
p = acbb
k = 2

R0

	a	c	c	b	b	a	a	a	b	c	b	a
a	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
c	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

R1

	a	c	c	b	b	a	a	a	b	c	b	a
a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
b	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
b	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

R2

	a	c	c	b	b	a	a	a	b	c	b	a
a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
b	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Stínované pozice odpovídají konci nalezeného řetězce, jehož Hammingova vzdálenost od vzoru je rovna *k.*