Matematická morfologie

Václav Hlaváč

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická, katedra kybernetiky
Centrum strojového vnímání
`http://cmp.felk.cvut.cz/~hlavac, hlavac@fel.cvut.cz`

Osnova přednášky:

- Bodové množiny. Morfologická transformace.
- Eroze, dilatace, vlastnosti.
- Otevření, uzavření, tref či miň.
- Kostra oblasti.
- Ztenčování, sekvenční ztenčování.
- Vzdálenostní transformace.

Morfologie

V biologii: studium velikosti, tvaru a vnitřní struktury zvířat, rostlin a mikroorganismů a hledání souvislostí mezi jejich vnitřními částmi.

V jazykovědě: studium vnitřní stavby slovních druhů.

V nauce o materiálech: studium tvarů, velikostí, textury, termodynamicky odlišitelné fáze fyzikálních objektů.

V teorii signálů / zpracování obrazu: matematická morfologie – teoretický model opírající o teorii svazů a používaný pro předzpracování a segmentaci obrazů.

Matematická morfologie, úvod

Matematická morfologie (MM)

- je teorií k analýze plošných a prostorových struktur;
- je vhodná pro analyzování tvaru objektů objects;
- je založena na teorii množin, integrální algebře a algebře svazů (angl. lattice);
- je úspěšná pro jednoduchý matematický formalismus, který otevírá cestu k mocným nástrojům pro analýzu obrazu.

Přístup matematické morfologie . . .

Hlavní myšlenkou morfologické analýzy je získávání znalostí z relace obrazu a jednoduché, malé sondy (nazývané strukturní element), která je předdefinovaným tvarem. V každém pixelu se ověřuje, jak sonda odpovídá nebo neodpovídá lokálním tvarům v obraze.

Otcové zakladatelé matematické morfologie

Georges Matheron ($*$ 1930, † 2000)

Jean Serra ($*$ 1940)

- Matheron, G. Elements pour une Theorie del Milieux Poreux Masson, Paris, 1967.
- Serra, J. Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London 1982.

Další čtení

- Jean Serra a jeho kuz matematické morfologie: http://cmm.ensmp.fr/serra/cours/
- Jean Serra, Image analysis and mathematical morphology. Volume 2: theoretical advances, Academic Press, London, 1988
- Pierre Soille, Morphological Image Analysis: Principles and Applications, Second edition, Springer-Verlag Berlin, 2004
- Laurent Najman and Hugues Talbot (editors), Mathematical Morphology, John Wiley & Sons, Inc., London, 2010

Spojení s jinými teoriemi a přístupy

Matematická morfologie nesoupeří s jinými teoriemi, spíše je doplňuje.

- Diskrétní geometrie (např. vzdálenost, kostra oblasti).
- Teorie grafů, např. minimální kostra grafu (O. Borůvka 1926), rozvodí, výpočetní geometrie.
- Statistika: náhodné modely, teorie míry, stereologie, atd.
- Lineární teorie signálů: nahradí se operace $+$ supremem $\wedge$.
- Prostor měřítek: nahradí se gaussovské vyhlazování otevřením a uzavřeními $\Rightarrow$ granulometrie.
- Level sets: dilatace s parciálními diferenciálními rovnicemi, FMM (Fast Marching Method) je vlastně vzdálenostní funkce.
- *Poznámka: pro matematickou morfologii nejsou podobné nástroje jako Fourierova a vlnková transformace.*

Různost matematických struktur

Zpracování signálů ve vektorovém prostoru

Vektorový prostor tvoří množina vektorů V a množina skalárů K takových, že

- K je pole.
- V je komutativní grupa.
- Vektory lze sčítat a násobit skalárem.

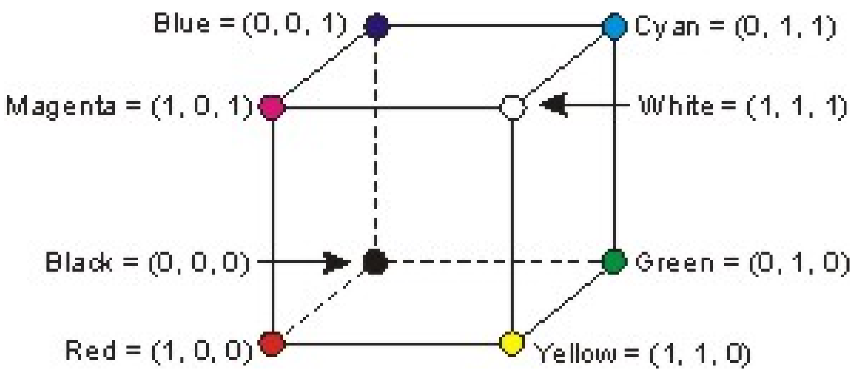
Matematická morfologie

Úplný svaz $(E, \leq)$ je množina E s relací $\leq$ takovou, že

- $\forall x, y, z \in E$ platí (částečné uspořádání)
  $x \leq x$,
  $x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$,
  $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow z \leq z$.
- Pro všechna $P \subseteq E$ existuje v E (úplnost)
  - Největší dolní odhad $\wedge P$, nazývaný infimum.
  - Nejmenší horní odhad $\vee P$, navýzaný supremum.

Příklady svazů

- Svaz barev v aditivním barevném modelu (RGB).



- Svaz reálných čísel $\mathbb{R}$.
- Svaz reálných čísel rozšířených o nekonečno $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Svaz celých čísel $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Kartézský součin přirozených čísel uspořádaný relací $\leq$ tak, aby $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow (a \leq c)$ & $(b \leq d)$.

Příklady uspořádaných svazů užitečných v analýze obrazů

- Booleovský svaz množin upořádaných inkluzí ⇒ binární matematická morfologie, kde nás např. zajímá obsazenost pixelu.
- Svaz horních polospojitých funkcí ⇒ šedotónová matematická morfologie nebo binární morfologie ve 3D binárních obrazech, kde nás zajímá obsazenost určitého voxelu.

  Poznámka: Zobecnění do vyšších dimenzí je také možné, např. pro n*-rozměrné obrazy nebo pro více hodnotové funkce, např. časové řady při analýze pohybu.*
- Svaz vícehodnotových funkcí ⇒ matematická morfologie barevných obrazů.

Srovnání základních operací

Lineární zpracování signálů

- Lineární teorie signálů se opírá o “princip superpozice”. Základními operacemi jsou sčítání, násobení a skalární součin.
- Základní operace zachovávají sčítání, násobení a jsou vzhledem k nim komutativní.
$$\Psi\left(\sum_i \lambda_i f_i\right) = \sum_i \lambda_i \Psi(f_i)\,.$$
- Důležitou operací je konvoluce dovolující hledat relaci mezi dvěma funkcemi.

Matematická morfologie

- Svaz je založen na uspořádání, existenci suprema $\vee$ a infima $\wedge$. Základní operace supremum a infimum zachovávají.
- Je zachováno uspořádání $\{x \leq y \Rightarrow \Psi(x) \leq \Psi(y)\} \Leftrightarrow$ Ψ je rostoucí.
- Komutování vzhledem k supremu $\Psi(\vee x_i) = \vee \Psi(x_i) \Leftrightarrow$ dilatace.
- Komutování vzhledem k invimu $\Psi(\wedge x_i) = \wedge \Psi(x_i) \Leftrightarrow$ eroze.

Symetrie suprema a infima

- Supremum a infimum mají ve svazu symetrickou roli.
  - Zamění se, když se změní uspořádání $x \leq y \leftrightarrow x \geq y$.
  - To přivádí k pojmu dualita.
- Příklad: ve svazu všech podmožin množiny $E(2^E; \leq)$,

se o dvou operacích Ψ a Ψ^* se říká, že jsou duální, právě když

$$\Psi(X^C) = [\Psi^*(X)]^C ,$$

kde $X^C = E \setminus X$ označuje doplněk množiny X vzhledem k množině E.

Svazy a uspořádání; extenzivní a antiextenzivní transformace

- Operace Ψ je extenzivní na svazu $(E, \leq)$, právě když je transformovaný prvek pro všechny prvky z množiny E větší nebo rovný původnímu elementu, tj.

$$\Psi \text{ je extenzivní } \Leftrightarrow \forall\, x \in E, \quad x \leq \Psi(x)\ .$$

- Operace Ψ je antiextenzivní na svazu $(E, \leq)$, právě když je transformovaný prvek pro všechny prvky z množiny E menší nebo rovný původnímu elementu, tj.

$$\Psi \text{ je antiextenzivní } \Leftrightarrow \forall\, x \in E, \quad \Psi(x) \leq x\ .$$

Proč tak abstraktně?

- Můžeme tak zavést operátory, které jsou obecné.
- Operace lze studovat, aniž by byl dán definiční obor.
- Operátory mohou být použity např. pro následující aplikační oblasti či definiční obory, např. diskrétní obrazy, spojité obrazy, spojité obrazy, grafy, sítě bodů.
- Q: Jak lze použít formalizmu svazů pro obrazy?

  A: Obrazy lze považovat za funkci $f: E \to T$, kde E množina obrazových bodů a T je obor hodnot, tj. pro obrazy za množinu přípusntých hodnot pixelů.

Svazy funkcí

- E libovolná množina a T je uzavřená podmnožina $\overline{\mathbb{R}}$ or $\overline{\mathbb{Z}}$.
- Funkce $f\colon E \to T$ generují nový svaz označený T^E (nazvaný product ordering),

  $$f \le g\,,\ \text{právě když } f(x) \le g(x) \text{ pro } \forall x \in E\,,$$

  jejichž supremum a infimum se odvozují přímo ze suprema a infima množiny T,

  $$(\vee f_i)(x) = \vee f_i(x) \quad (\wedge f_i)(x) = \wedge f_i(x)\,.$$
- Přístup lze zobecnit pro funkce více proměnných, např. v analýze obrazu pro barevné obrazy nebo pohyb (videosekvence).

Jednoduchý případ, zavedení svazu pro binární obrázky

- There are several ways how to define a lattice and induced morphological operation.
- Let us start from a simple, intuitive and practically useful case of binary images

$$f \colon E \to \{0, 1\} \,,$$
$$F = \{x \in E \mid f(x) = 1\} \ .$$

- The lattice structure $(E, \leq)$ for binary images can be introduced as:

$$(2^E, \subseteq) \ ,$$

where $X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$, $\wedge \leftrightarrow \cap$, $\vee \leftrightarrow \cup$.

Bodové množiny

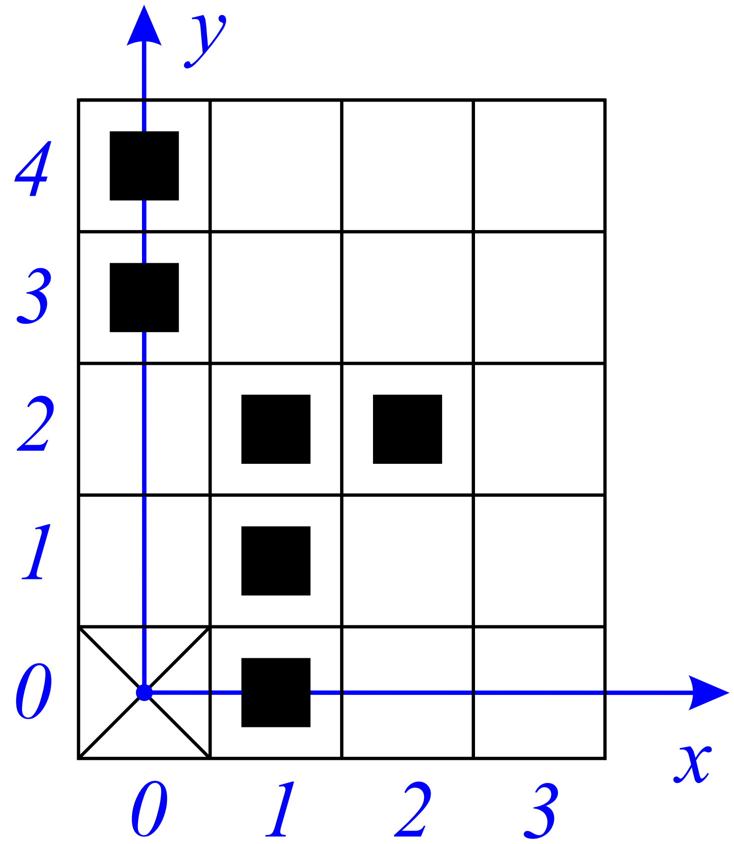
- Obrázky lze modelovat pomocí bodových množin libovolné dimenze, např. v N-rozměrném euklidovském prostoru.
- 2D euklidovský prostor $\mathbb{E}^2$ a systém jeho podmnožin je přirozeným spojitým definičním oborem pro popis rovinných útvarů.
- Digitální protějšek euklidovského prostoru se reprezentuje celými čísly $\mathbb{Z}$.
- Binární matematická morfologie ve 2D – bodová množina vyjádřená dvojicemi celých čísel ($(x, y) \in \mathbb{Z}^2$). Výskyt bodu informuje o obsazenosti příslušného pixelu (místa v mřížce).
- Binární matematická morfologie ve 3D – bodová množina vyjádřená trojicemi celých čísel $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^2$, kde (x, y, z) jsou prostorové souřadnice informující o obsazenosti příslušného voxelu.
- Šedotónová matematická morfologie ve 2D – bodová množina vyjádřená trojicemi celých čísel $(x, y, g) \in \mathbb{Z}^3$, kde x, y jsou souřadnice v rovině a g je hodnota šedi příslušného pixelu.

Čtyři principy matematické morfologie

1. Kompatibilita vůči translaci – morfologický operátor Ψ má být nezávislý na translaci.
2. Kompatibilita vůči změně měřítka – morfologický operátor Ψ má být nezávislý na změně měřítka.
   Poznámka: V případě digitálních obrazů je tento princip (mírně) porušen.
3. Lokální znalost – morfologický operátor Ψ je lokálním operátorem (viz strukturní elementy na příští průsvitce).
4. Semi-spojitost – morfologický operátor by neměl vykazovat náhlé změny svého chování.

Začneme binární matematickou morfologií, bodová množina

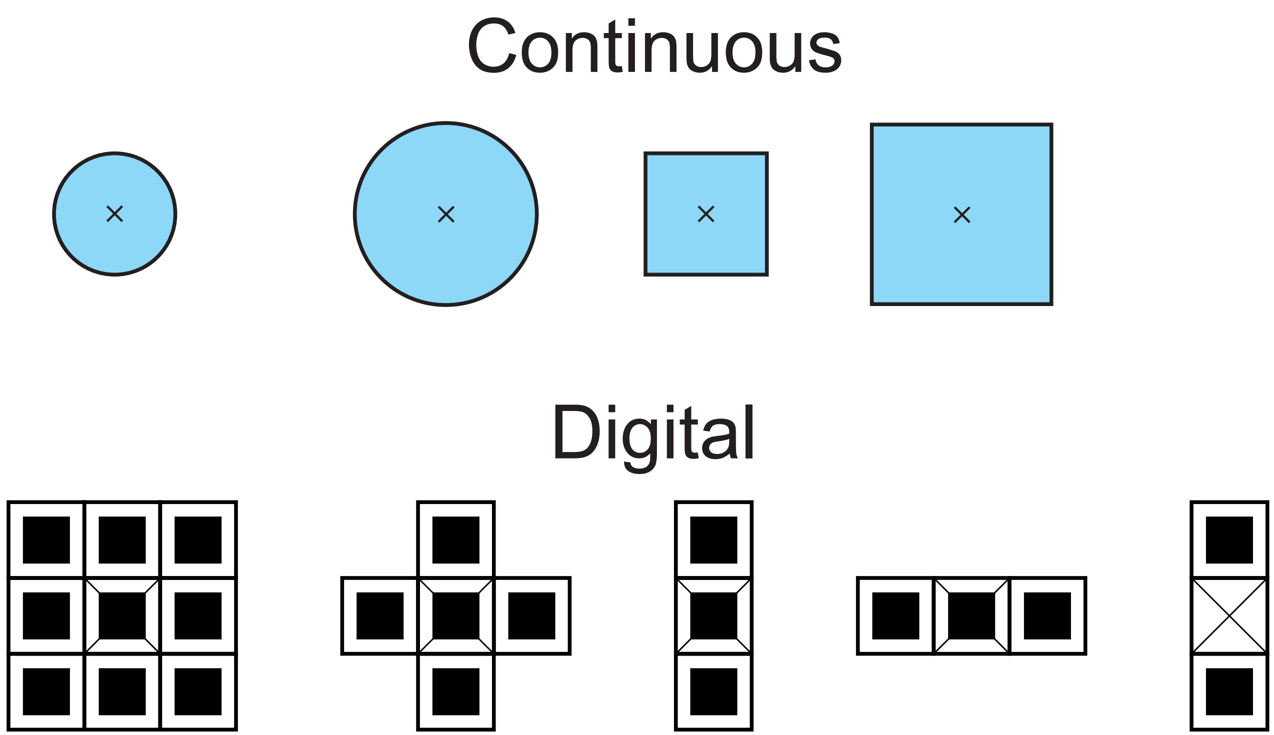
- Zpočátku se omezíma na binární matematickoku morfologii.
- Příklad bodové množiny ve $\mathbb{Z}^2$,



$$X = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4)\}$$

Strukturní element

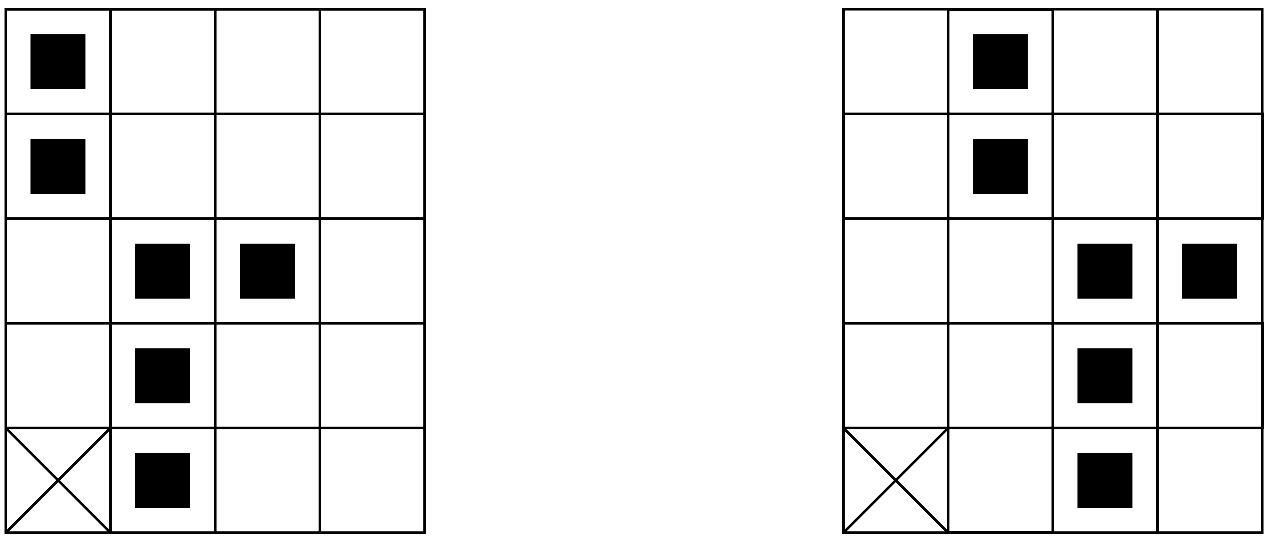
- A structuring element serves as a local probe in morphological operators.
- Strukturní element B je vztažen k "lokálnímu" počátku v bodě $\mathcal{O}$ (označený symbolem $\times$ v následujících obrázcích).
- Příklady:



Translace množiny o radiusvektor

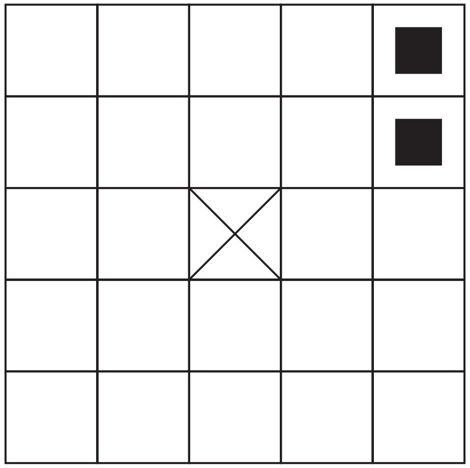
Translace X_h bodové množiny X o radiusvektor h

$$X_h = \left\{p \in \mathbb{E}^2,\ p = x + h \text{ pro některá } x \in X\right\} \ .$$

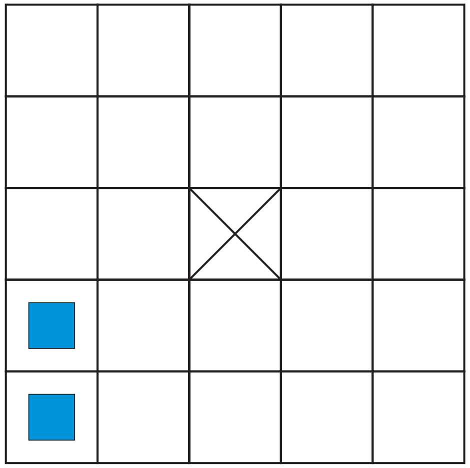


Symetrická bodová množina

- Středová symetrie se vyjadřuje vůči reprezentativnímu bodu $\mathcal{O}$.
- Někdy se také nazývá transponovaná bodová množina.
- Definice: $\breve{B} = \{-b : b \in B\}$.
- Příklad: $B = \{(2,1),(2,2)\}$, $\breve{B} = \{(-2,-1)(-2,-2)\}$.



Originál



Po transpozici

Binární matematická morfologie

- Pracuje s binárními obrázky. Definiční obor $\mathbb{Z}^2$. Obor hodnot $\{0, 1\}$.
- 2 základní operace: dilatace a eroze. Nejsou invertovatelné.
- 2 používané formalismy pro součet a rozdíl
  - Ve školské aritmetice obvyklé sčítání a odečítání.
  - Minkowského součet, rozdíl (do morfologie zavedli G. Matheron (kniha 1967), J. Serra (kniha 1982)).
  - Rozdílnost obou přístupů hraje roli u eroze.

Minkowského součet, rozdíl

Minkowského součet (Hermann Minkowski 1864-1909, geometrie čísel 1889)

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b \, .$$

Minkowského rozdíl (pojem zavedl až H. Hadwiger 1957)

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \, .$$

Binární dilatace $\oplus$

- Dilatace je Minkowského součet, tj. sjednocení posunutých bodových množin

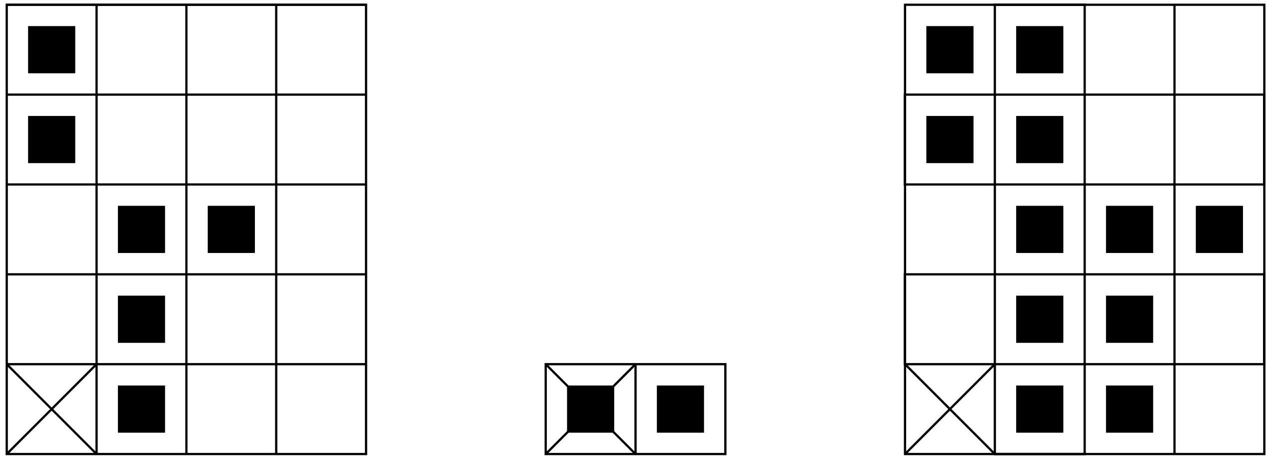
$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b \,.$$

- Dilataci lze ekvivalentně vyjádřit jako

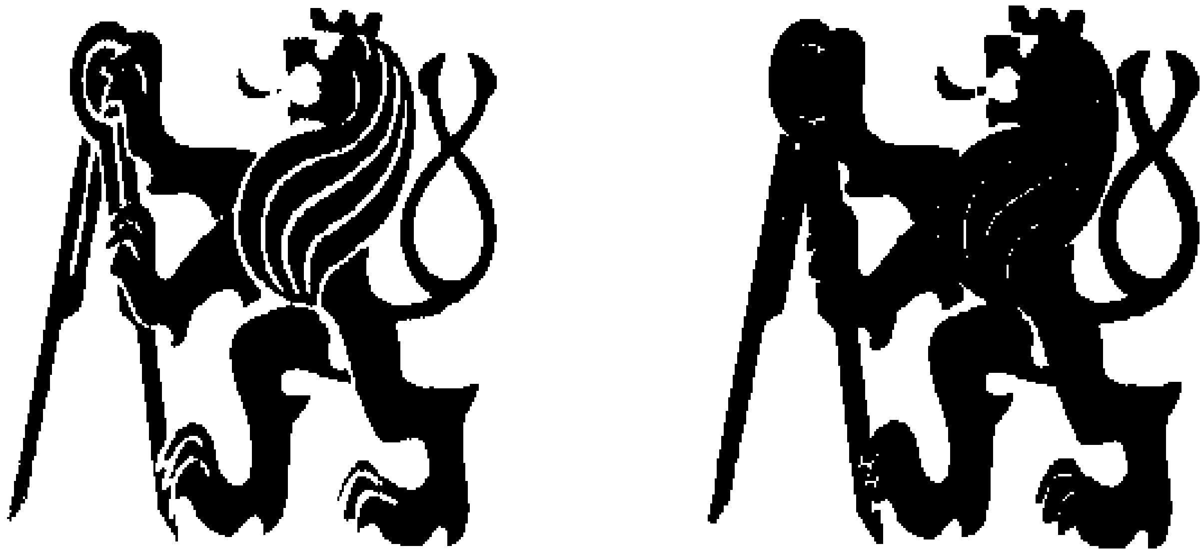
$$X \oplus B = \left\{ p \in \mathbb{E}^2 : \; p = x + b, \;\; x \in X \text{ and } b \in B \right\} \,.$$

Binární dilatace $\oplus$, příklad

$$
\begin{aligned}
X &= \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4)\} \\
B &= \{(0,0),(1,0)\} \\
X \oplus B &= \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4), \\
&\quad (2,0),(2,1),(2,2),(3,2),(1,3),(1,4)\}
\end{aligned}
$$



Binární dilatace isotropickým strukturním elementem 3×3



vlevo – originál, vpravo – dilatace.

Dilatace se používá k zaplnění malých děr a úzkých zálivů v objektech. Zvětší původní velikost objektu. Má-li být velikost zachována, potom se dilatace kombinuje s erozí, viz dále.

Vlastnosti dilatace

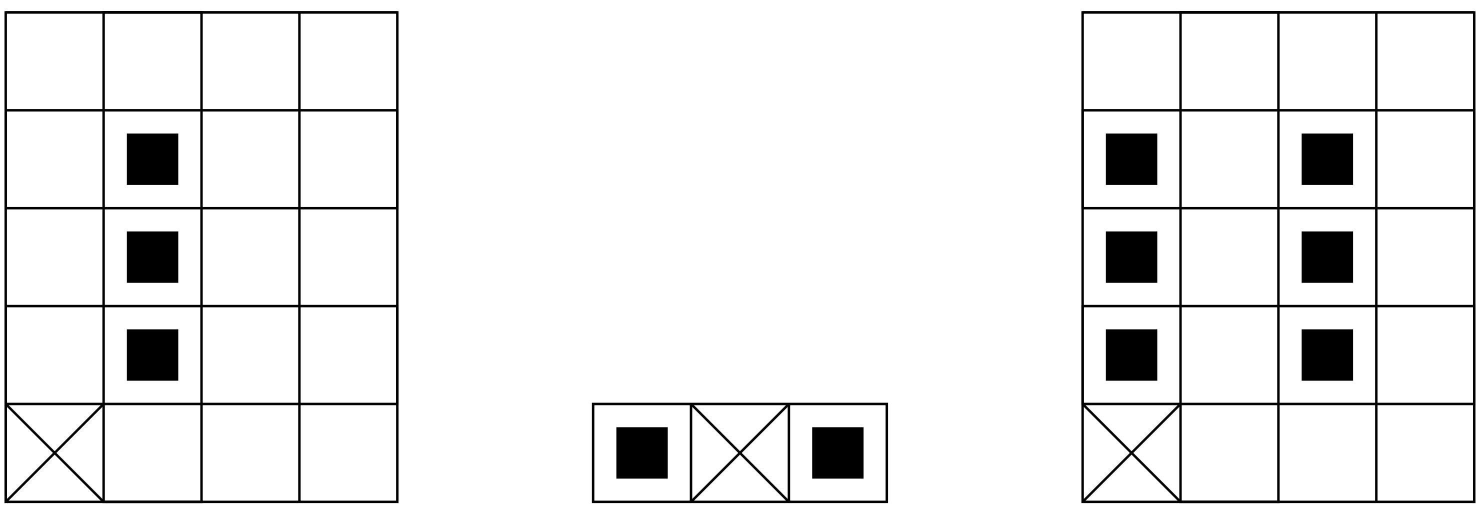
Komutativní: $X \oplus B = B \oplus X$.

Asociativní: $X \oplus (B \oplus D) = (X \oplus B) \oplus D$.

Invariantní vůči posunu: $X_h \oplus B = (X \oplus B)_h$.

Rostoucí transformace: Je-li $X \subseteq Y$ a $(0,0) \in B$, potom $X \oplus B \subseteq Y \oplus B$.

Protipříklad při prázdném počátku $(0,0) \notin B$



Binární eroze $\ominus$

- Eroze je Minkowského rozdíl, tj. průnik všech posunů obrazu X o vektory $-b \in B$,

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \, .$$

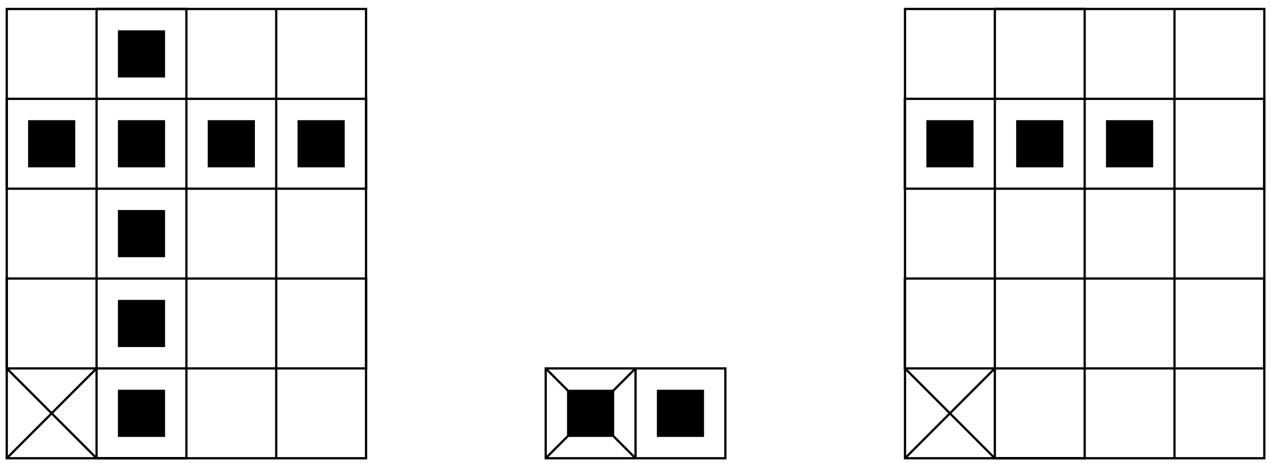
- Ekvivalentně se pro každý bod obrazu p se ověřuje, zda pro všechna možná $x + b$ leží výsledek v X. Pokud ano, je výsledek 1, jinak 0.

$$X \ominus B = \{p \in \mathbb{E}^2 : \; p = x + b \in X \text{ for all } b \in B\} \, .$$

- Dilatace a eroze jsou duální morfologické operace.

Binární eroze $\ominus$, příklad

$$
\begin{aligned}
X &= \{(1,0),(1,1),(1,2),(0,3),(1,3),\\
&\quad (2,3),(3,3),(1,4)\}\\
B &= \{(0,0),(1,0)\}\\
X \ominus B &= \{(0,3),(1,3),(2,3)\}
\end{aligned}
$$



Binární eroze isotropickým strukturním elementem 3× 3

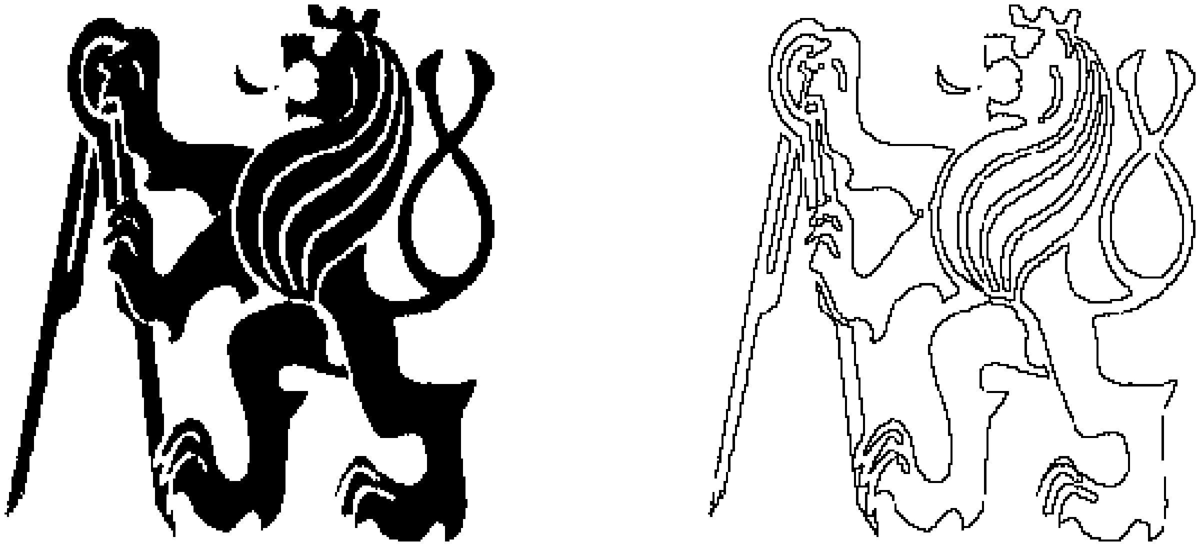

vlevo – originál, vpravo – eroze.

- Objekty menší než strukturní element vymizí (např. čáry tloušťky 1).
- Eroze se používá ke zjednodušení struktury (rozložení objektu na jednodušší části).

Obrys pomocí binární eroze

Obrys (matematicky okraj, v našem významu hranice oblasti v binárním obraze) ∂X (hranice oblasti X, přirozeně tloušťky 1).

$$\partial X = X \setminus (X \ominus B)\,.$$



vlevo – originál X, vpravo obrys ∂X.

Vlastnosti eroze

Antiextenzivní: Je-li $(0,0) \in B$, potom $X \ominus B \subseteq X$.

Invariantní vůči posunu: $X_h \ominus B = (X \ominus B)_h$, $X \ominus B_h = (X \ominus B)_{-h}$.

Zachovává inkluzi: Je-li $X \subseteq Y$, potom $X \ominus B \subseteq Y \ominus B$.

Dualita eroze a dilatace: $(X \ominus Y)^C = X^C \oplus \breve{Y}$.

Kombinace eroze a průniku: $(X \cap Y) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Y \ominus B)$,
$B \ominus (X \cap Y) \supseteq (B \ominus X) \cup (B \ominus Y)$.

Vlastnosti dilatace a eroze (2)

Lze zaměnit pořadí dilatace a průniku:

$(X \cap Y) \oplus B = B \oplus (X \cap Y) \subseteq (X \oplus B) \cap (Y \oplus B)$.

Dilatace průniku dvou obrazů je obsažena v průniku jejich dilatací.

Možná záměna pořadí eroze a množinového sjednocení (umožňuje rozložit složitější strukturní elementy na sjednocení jednodušších):

$$
\begin{aligned}
B \oplus (X \cup Y) = (X \cup Y) \oplus B &= (X \oplus B) \cup (Y \oplus B)\,, \\
(X \cup Y) \ominus B &\supseteq (X \ominus B) \cup (Y \ominus B)\,, \\
B \ominus (X \cup Y) &= (X \ominus B) \cap (Y \ominus B)\,.
\end{aligned}
$$

Vlastnosti dilatace a eroze (3)

Postupná dilatace (resp. eroze) obrazu X nejdříve strukturním elementem B a potom strukturním elementem D je totožná jako dilatace (resp. eroze) obrazu X pomocí $B \oplus D$

$$
\begin{aligned}
(X \oplus B) \oplus D &= X \oplus (B \oplus D)\,, \\
(X \ominus B) \ominus D &= X \ominus (B \oplus D)\,.
\end{aligned}
$$

Transformace tref či miň $\otimes$

- Anglicky Hit or Miss.
- Používá složený strukturní element $B = (B_1, B_2)$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

$$X \otimes B = \{x : \; B_1 \subset X \text{ a } B_2 \subset X^c\} \, .$$

- Indikuje shodu složeného strukturního elementu a části obrazu. B_1 testuje objekty, B_2 pozadí.
- Transformaci $\otimes$ lze vyjádřit pomocí erozí a dilatací

$$X \otimes B = (X \ominus B_1) \cap (X^c \ominus B_2) = (X \ominus B_1) \setminus (X \oplus \breve{B}_2) \, .$$

Příklad: detekce konvexních rohů

	1	
0	1	1
0	0	

	1	
1	1	0
	0	0

	0	0
1	1	0
	1	

0	0	
0	1	1
	1	

Masky detekující 4 možné konfigurace konvexních rohů pomocí tref či miň.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\longrightarrow$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Výsledek detekce rohů.

Morfologická filtrace

- V ‘klasickém’ zpracování signálů/obrazů označuje pojem filtr jakoukoliv výpočetní proceduru, kerá má signál/obrázek na vstupu i výstupu.
- V metematické morfologii má pojem filtr přesný význam, např.

  Operace Ψ je morpfologickým filtrem $\Leftrightarrow$ Ψ je nerostoucí a idempotntní.

- Slovy: morfologické filtry zachovávají uspořádání a konvergují během jedné iterace.
- Nejdůležitějšími operacemi jsou otevření a closings v tomto kontextu.
- Otevření jsou anti-extenzivní morfologické filtry.
- Uzavření jsou extenzivní morflogické filtry.

Binární otevření $\circ$

Eroze následovaná dilatací.

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$$

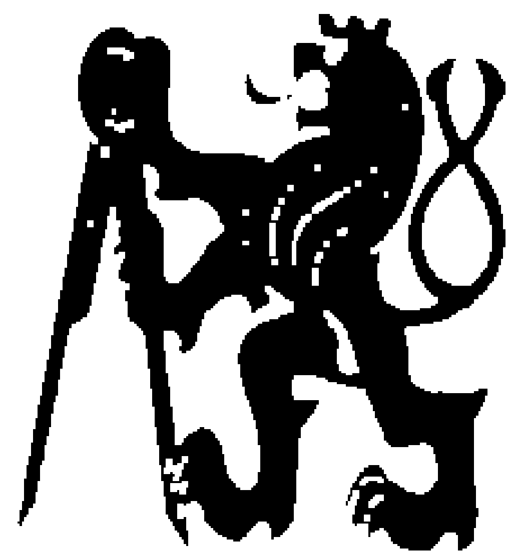
Pokud se obraz X nezmění po otevření strukturním elementem B, říkáme, že je otevřený vzhledem k B.

Binární uzavření •

Dilatace následovaná erozí.

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$$

Pokud se obraz X nezmění po uzavření strukturním elementem B, říkáme, že je uzavřený vzhledem k B.



Vlastnosti otevření, uzavření

Otevření a uzavření jsou duální morfologické transformace

$$(X \bullet B)^C = X^C \circ \breve{B}$$

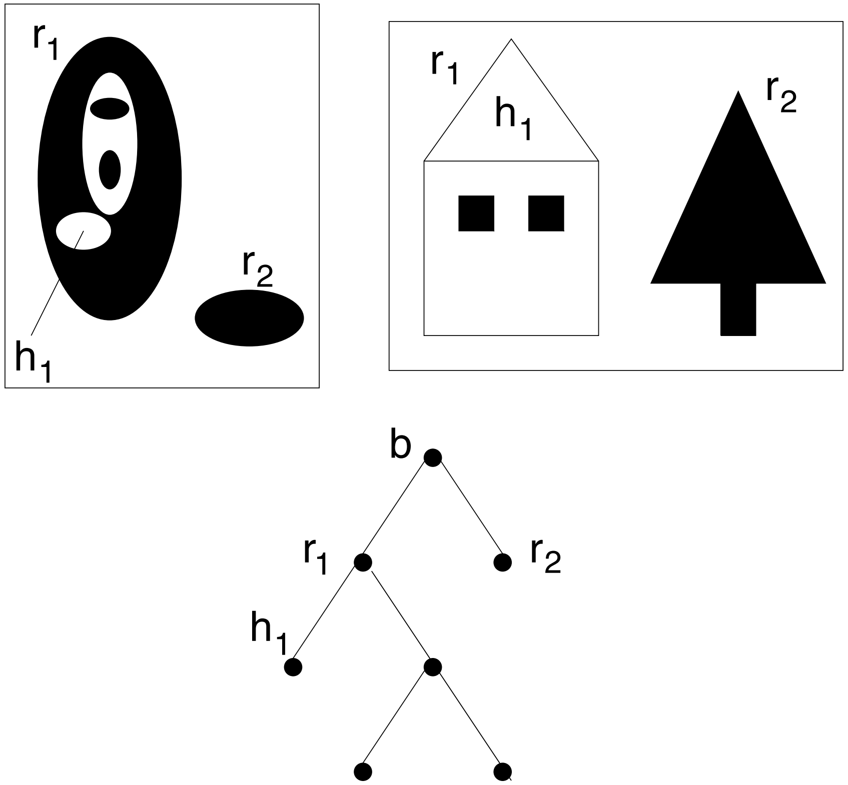
Idempotence - důležitá vlastnost v matematice. Zde: po jednom otevření, resp. uzavření, je množina již otevřena, resp. uzavřena. Další použití těchto transformací již nic nezmění.

$$X \circ B = (X \circ B) \circ B$$

$$X \bullet B = (X \bullet B) \bullet B$$

Homotopické transformace

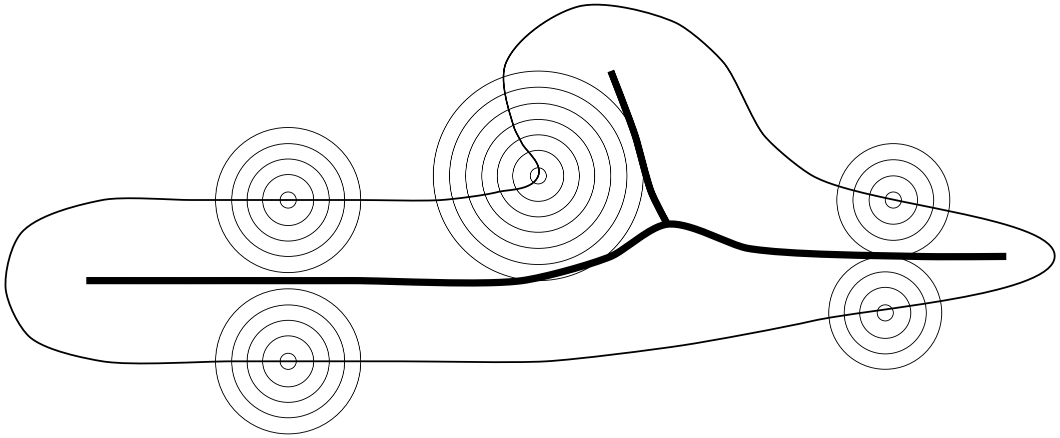
- Opírají se o relaci souvislosti mezi body, oblastmi. Vztahy souvislosti se vyjadřují homotopickým stromem.
- Homotopické transformace nemění homotopický strom.



Příklad: dvěma různým obrázkům odpovídá stejný homotopický strom.

Kostra (skelet)

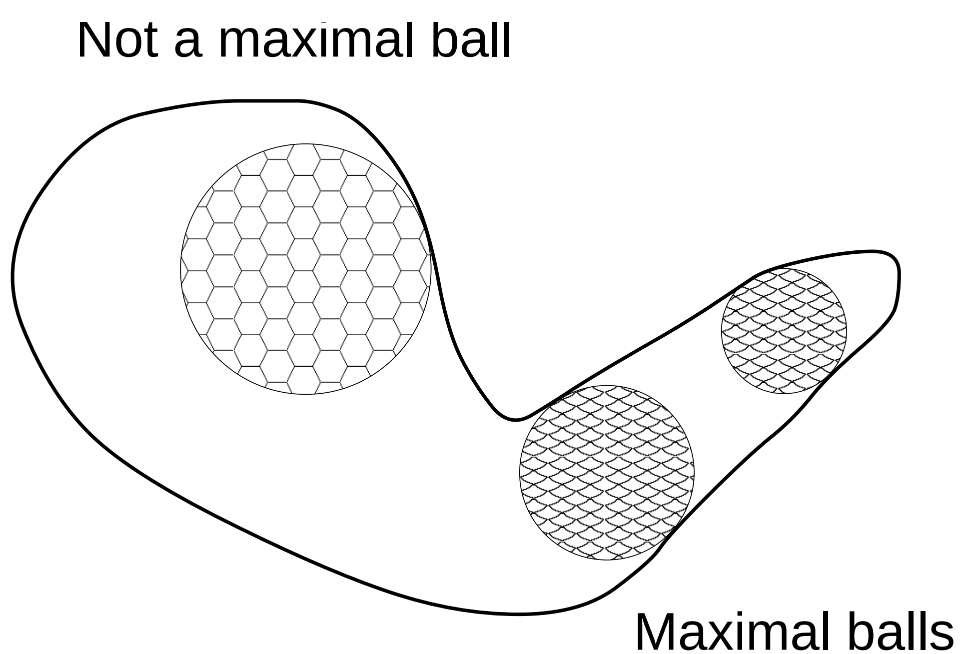
- Podlouhlé objekty má smysl reprezentovat kostrou (viz animace člověka v počítačové grafice zachycující kinematiku).
- Blum v roce 1967 navrhl “Medial axis transformation” (analogie, vypalování trávy).



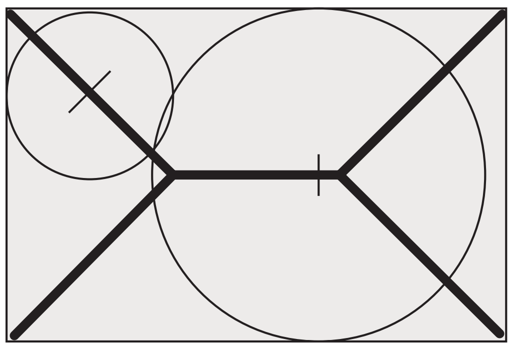
- Formální definice kostry se opírá o pojem maximálního kruhu (koule ve 3D).

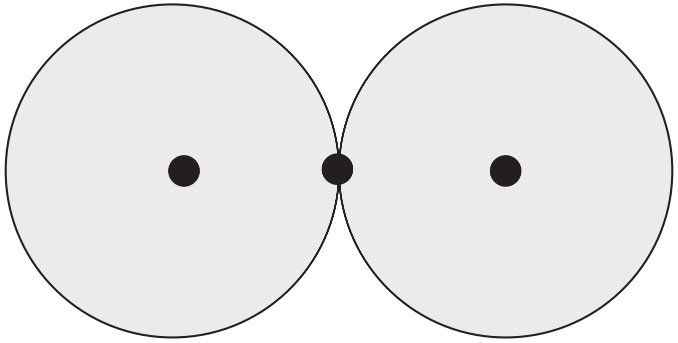
Kostra pomocí maximálních kruhů

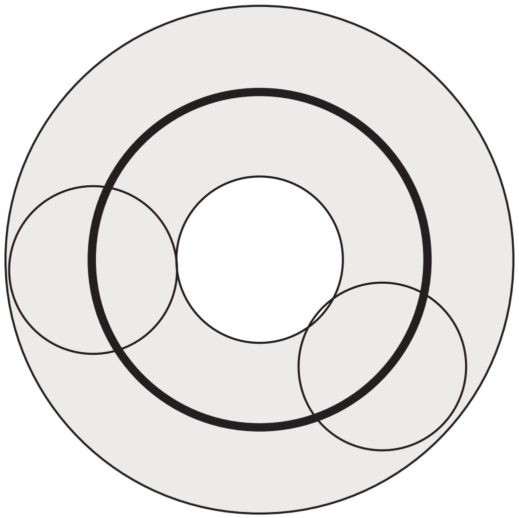
- Kruh $B(p, r)$ se středem p a poloměrem r, $r \geq 0$ je množina bodů, pro něž je vzdálenost $d \leq r$.
- Maximální kruh B vepsaný do množiny X se dotýká hranice ∂X ve dvou a více bodech.
- Kostra je sjednocením středů maximálních kruhů.

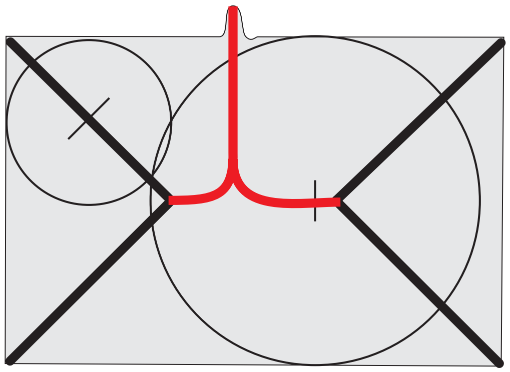


Příklad koster, spojitý případ







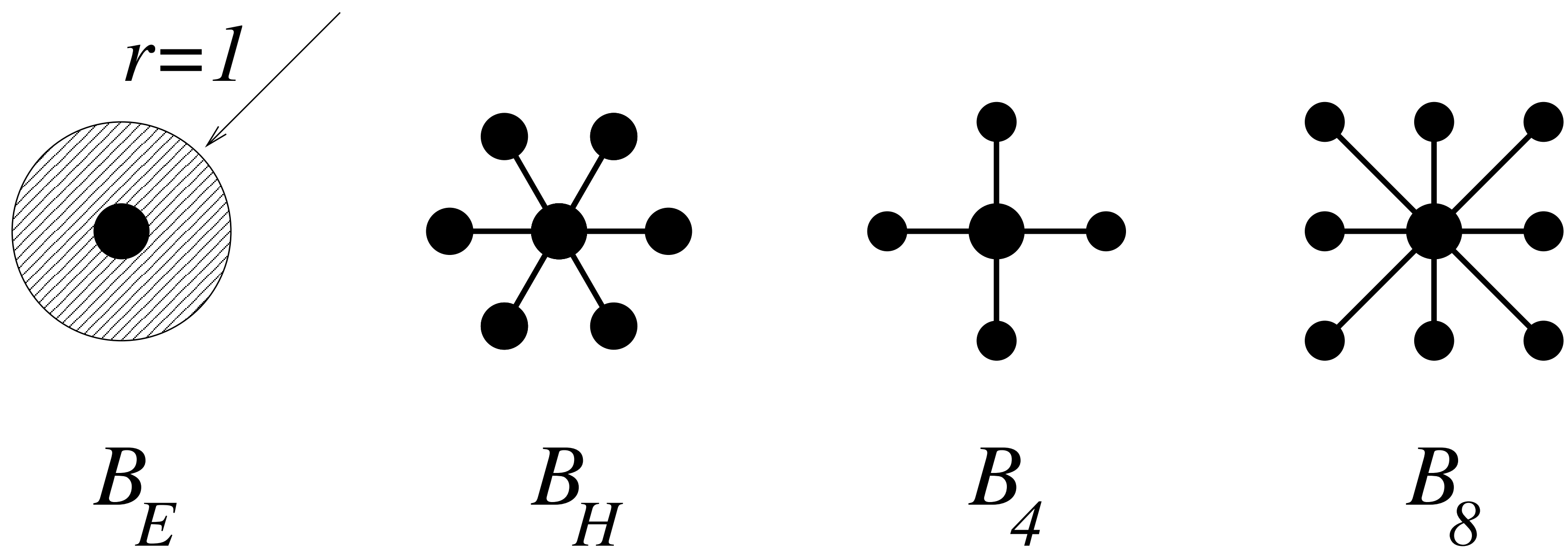


Problémy se šumem.

Diskrétní kruhy o poloměru 1

V diskrétním rastru mohou kruhy vypadat různě, a to díky několika možným způsobům zavedení vzdálenosti.

Příklady:



Třídění algoritmů binární skeletonizace oblastí

Vpisování kruhů podle definice se prakticky nepoužívá. Příliš ná výpočetní složitost. Porušuje se souvislost. Skelet tloušťky > 1.

Sekvenční ztenčování. Oblast se eroduje vhodným strukturním elementem, který zaručí, aby nebyla porušena souvislost. Obvykle homotopické ztenčování, s využitím strukturních elementů z Golayovy abecedy.

Přes vzdálenostní transformaci. Rychlý výpočet. Nejčastěji používané.

V koutkové reprezentaci. Napřed se oblasti bezeztrátově komprimují (koutky). Skelet se počítá vpisováním maximálních obdélníků přímo v komprimovaných datech (Schlesinger M.I., 1986).

Ztenčování a ztlušťování

- Nechť X je obraz a $B = (B_1, B_2)$ je složený strukturní element zavedený v transformaci tref či miň.
- Ztenčování $X \oslash B = X \setminus (X \otimes B)$.

  Část ztenčované oblasti určená strukturním elementem B množinově odečítá od objektu samého.
- Ztlušťování $X \odot B = X \cup (X^c \otimes B)$.

  Oblast se sjednocuje s částí pozadí danou strukturním elementem B.
- Ztenčování a ztlušťování jsou duální transformace
  $(X \odot B)^c = X^c \oslash B \,, \quad B = (B_2, B_1)$.

Sekvenční ztenčování a ztlušťování

- Nechť $\{B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(3)}, \ldots, B_{(n)}\}$ je posloupnost složených strukturních elementů $B_{(i)} = (B_{i_1}, B_{i_2})$.
- Sekvenční ztenčování může být pro čtvercový rastr vyjádřeno pomocí posloupnosti strukturních elementů (např. 8 elementů 3×3, jak uvidíme v Golayově abecedě).

$$X \oslash \{B_{(i)}\} = (((X \oslash B_{(1)}) \oslash B_{(2)}) \ldots \oslash B_{(n)}) \, .$$

- Sekvenční ztlušťování (analogicky)

$$X \odot \{B_{(i)}\} = (((X \odot B_{(1)}) \odot B_{(2)}) \ldots \odot B_{(n)}) \, .$$

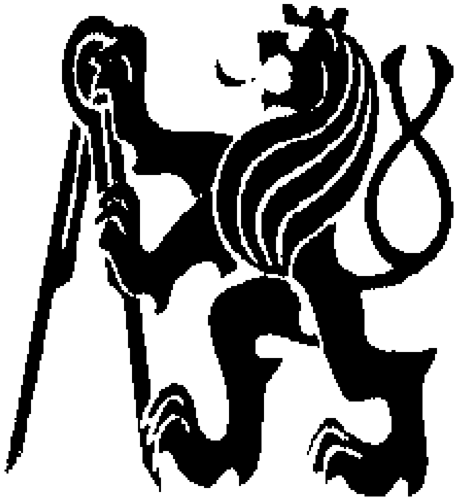
Užitečné sekvence z Golayovy abecedy

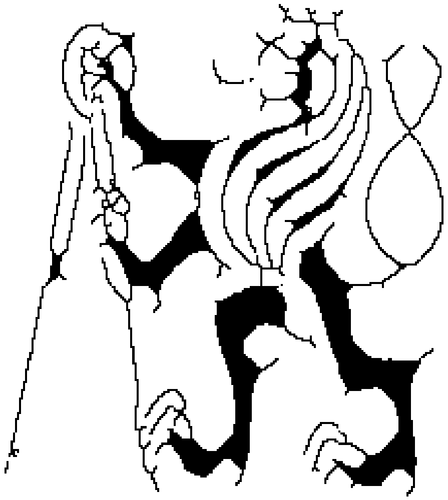
- Existuje několik posloupností strukturních elementů $\{B_{(i)}\}$, které jsou z praktického pohledu užitečné.
- Ukažme jen dvě z nich z Golayovy abecedy (1969) pro oktagonální rastr. Strukturní elementy rozměru 3×3 uvedeme ve dvou základních polohách, ostatní si domyslete pootočením.
- Stručný zápis složeného strukturního elementu: 1 ověřuje příslušnost k objektu, 0 ověřuje příslušnost k pozadí a konečně hodnota $*$ znamená, že prvek nehraje roli.
- Ztenčování a ztlušťování prvky Golayovy abecedy je idempotentní.

Ztenčování elementem L, homotopická náhrada skeletu tl. 1

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ * & 1 & * \end{bmatrix} \ldots$$

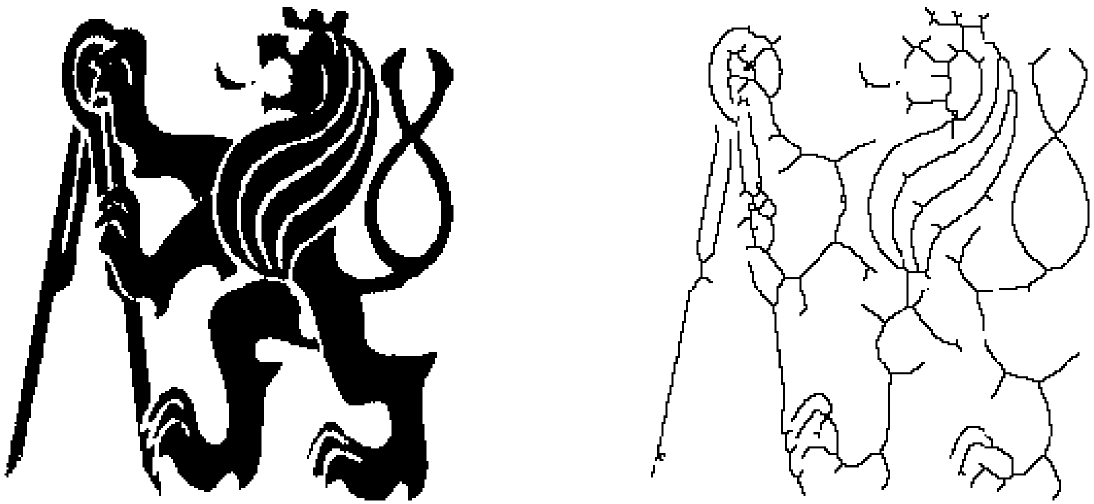
5 iterací





Ztenčování elementem L (2)

Ztenčování až do dosažení idempotence.

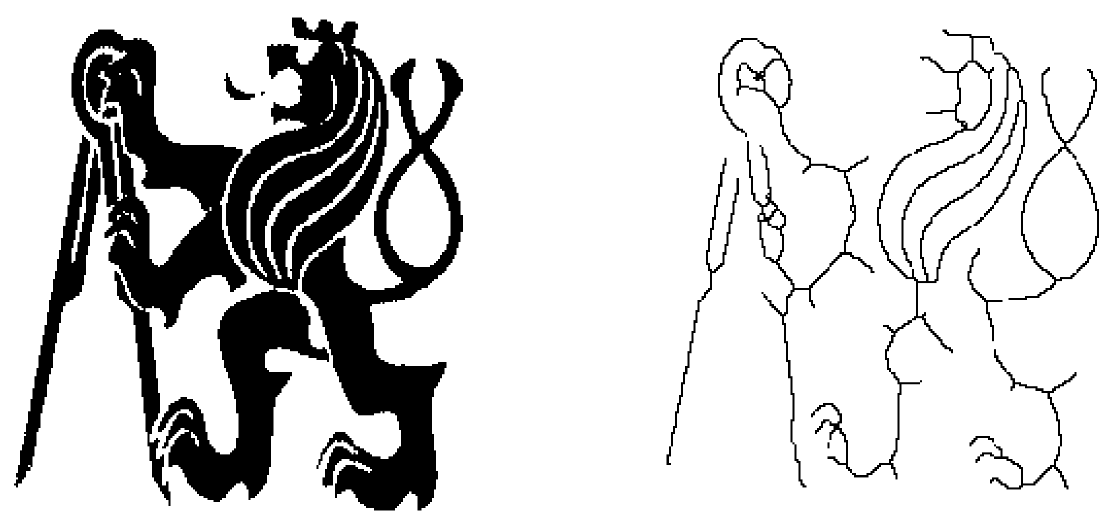


Ořezání volných konců elementem E

$$E_1 = \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots$$

Pokud by se ztenčování nechalo běžet až do dosažení idempotence, zůstaly by v obraze pouze uzavřené linie.

5 iterací

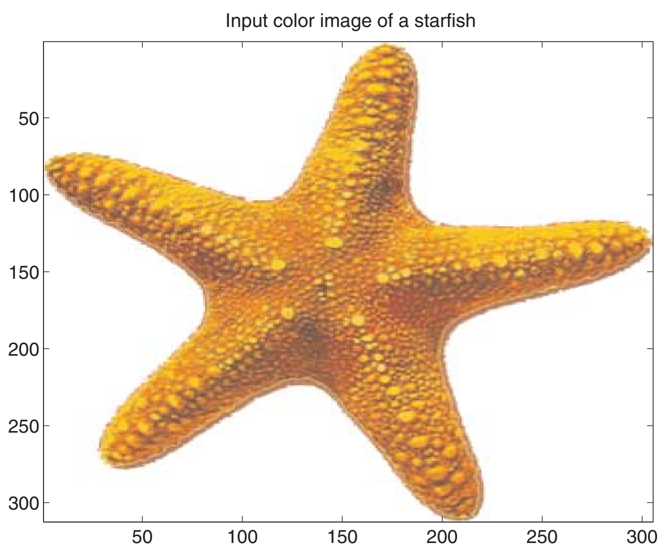


Motivace pro sekvenční morfologii
Vzdálenostní transformace

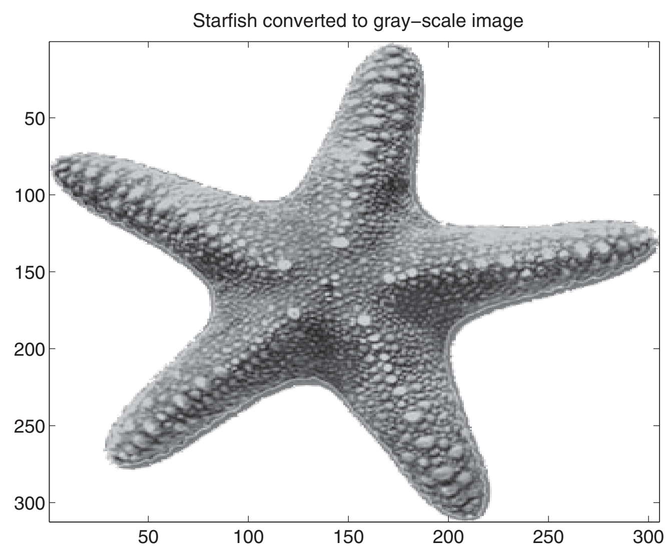
- Dosud nezáleželo na pořadí míst, v jakých byl morfologický operátor použit v obrazu. Operátor mohl být použit v náhodném pořadí, po řádcích, paralelně . . .
- Speciálnější přístup, kdy je vhodně předepsáno pořadí míst použití operátoru v obraze, může přinést podstatné zrychlení výpočtu. Výsledek operátoru totiž bude záviset nejen na vstupním obraze a transformaci, ale na výsledcích v předchozích polohách operátoru.
- Tím se může při výpočtu akumulovat potřebná globální informace, operátor může předchozí výsledky využít, a tak lze algoritmy výpočetně zjednodušit a zrychlit.
- Morfologické operátory opírající se o efektivní algoritmus výpočtu vzdálenostní transformace (probrána dříve) jsou důležitým příkladem tohoto přístupu, např při hledání skeletu v binární matematické morfologii.

Vzdáleností transformace příklad hvězdice, vstupní obrázek

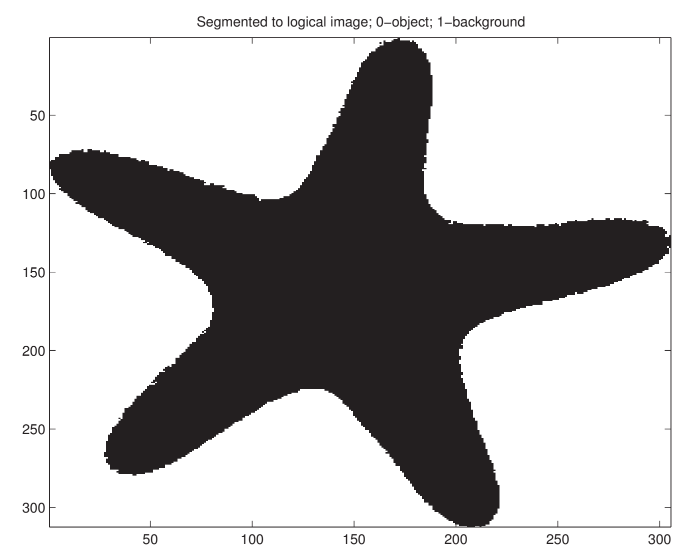
Vzdálenostní transformaci jsme probrali v přednášce Digitální obraz, základní pojmy.



barevný

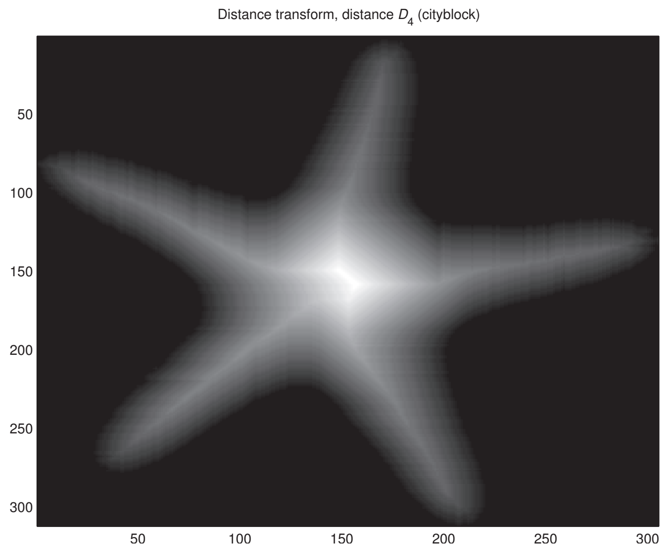


šedotónový

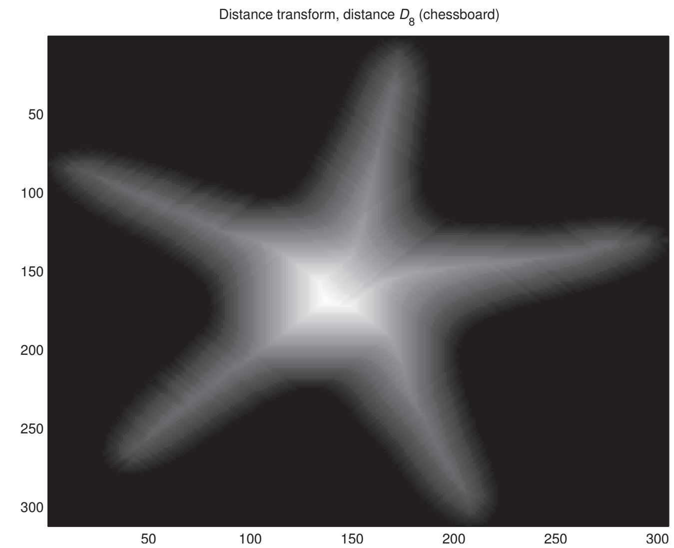


binární

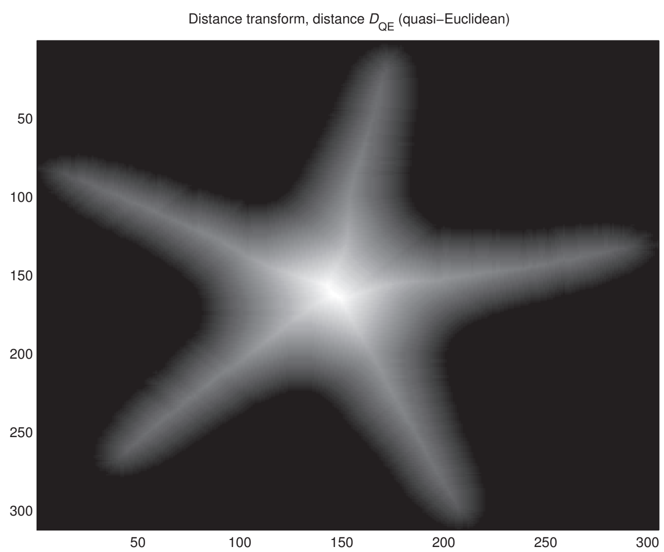
DT příklad hvězdice, výsledky



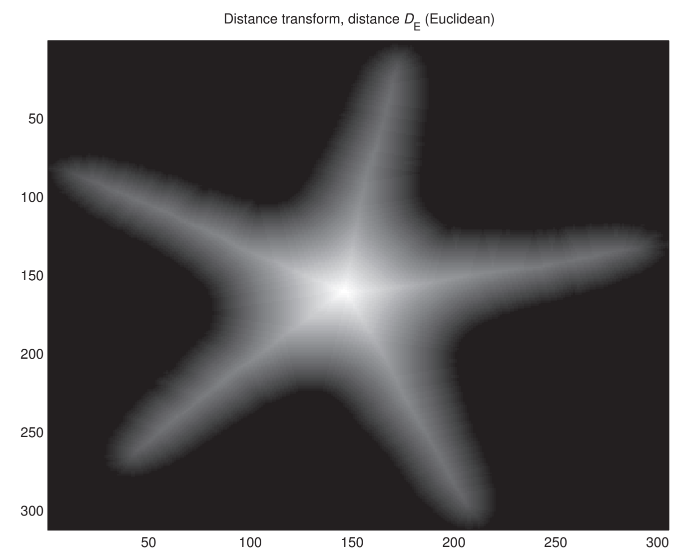
D4



D8



kvazieuklidovská



euklidovská