Filtrace ve fourierovském spektru

Václav Hlaváč

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická, katedra kybernetiky
Centrum strojového vnímání
http://cmp.felk.cvut.cz/~hlavac, hlavac@fel.cvut.cz

Osnova přednášky:

- Filtrace jako konvoluce, příklad – Butterworthův filtr.
- Homomorfický filtr.
- Systematické způsoby návrhu filtru.

Filtrace ve frekvenčním oboru

1. $F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\}$
2. $G(u,v) = H(u,v) \;.*\; F(u,v)$,

   kde $.*$ znamená násobení sobě odpovídajících prvků v maticích.
3. $g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(u,v)\}$

Připomínka pro cvičení:
Obvykle zobrazujeme $\ln \|F(u,v)\|$. Při filtrace se ale musí pracovat s $F(u,v)$.

Konvoluce jako součin fourirovských obrazů

Poznámka: rychlost je dána využitím rychlé FFT.

Mějme matici a rozměru $M \times N$ a matici b rozměru $P \times Q$.

Konvoluci $c = a * b$ lze spočítat postupem:

1. Doplň matice a, b nulami, aby měly rozměr alespoň $M + P - 1$, $N + Q - 1$ (obvykle až do velikosti mocniny dvou kvůli FFT).
2. Vypočítej 2D FFT matic a, b (v MATLABu pomocí `fft2`). Výsledkem jsou matice A, B.
3. Vynásob komplexní Fourierova spektra $C = A \,.*\, B$, součin prvek po prvku.
4. Výsledek konvoluce c získej inverzní Fourierovou transformací (v MATLABu pomocí `ifft2`).

Příklad 2D konvoluce v MATLABu

```
A = magic(3);

B = ones(3);

A(8,8) = 0;

B(8,8) = 0;

C = ifft2(fft2(A).*fft2(B));

C = C(1:5,1:5);

C = real(C)
```

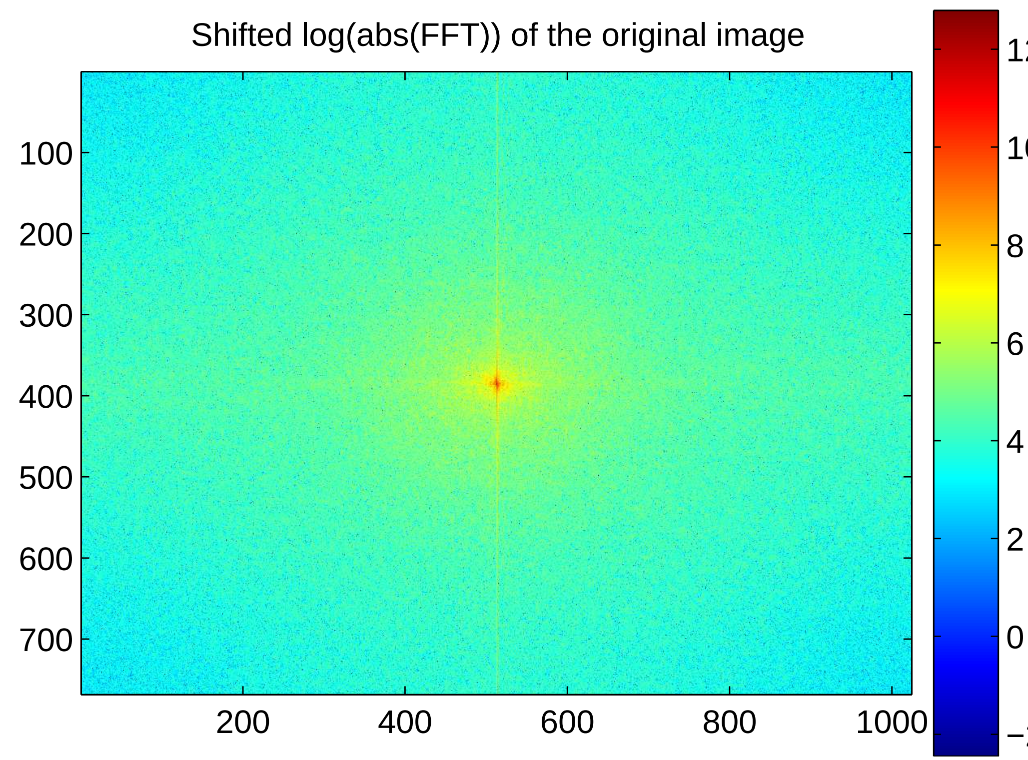
$$C = \begin{bmatrix} 8.0000 & 9.0000 & 15.0000 & 7.0000 & 6.0000 \\ 11.0000 & 17.0000 & 30.0000 & 19.0000 & 13.0000 \\ 15.0000 & 30.0000 & 45.0000 & 30.0000 & 15.0000 \\ 7.0000 & 21.0000 & 30.0000 & 23.0000 & 9.0000 \\ 4.0000 & 13.0000 & 15.0000 & 11.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Poznámka: konvoluce přes spektra je v MATLABu rychlejší pro velké matice. Pro malé matice je rychlejší `conv2`, `filt2`.

Dolní propust, Butterworth (1)

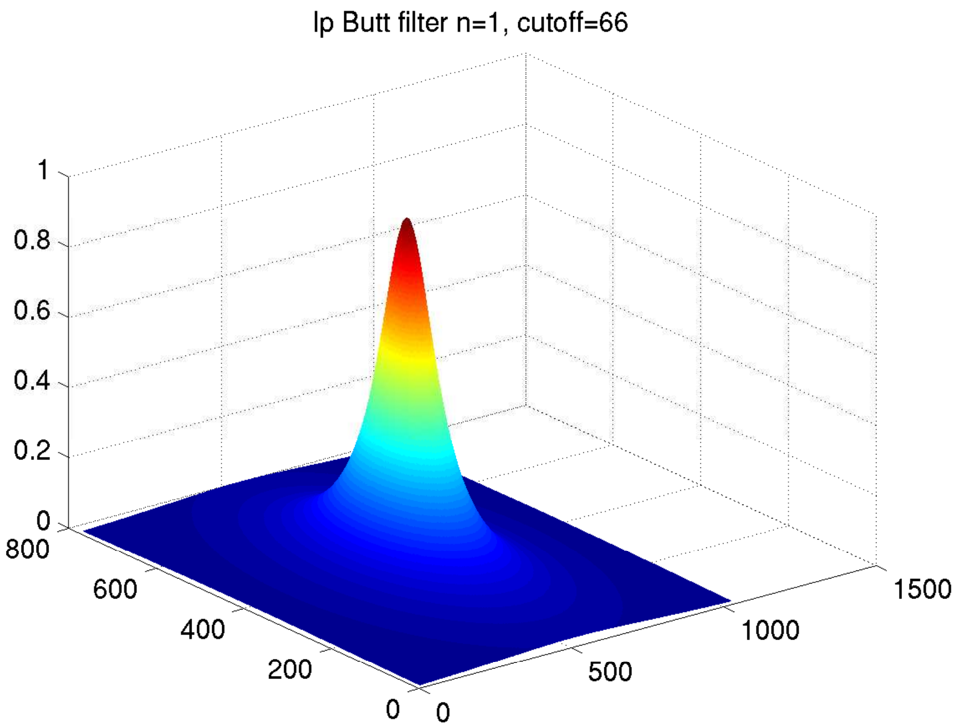
Filtr, který má nejméně zvlněné frekvenční spektrum a konverguje k nule u maximální frekvence (S. Buttherworth, 1930).

Výchozí obrázek

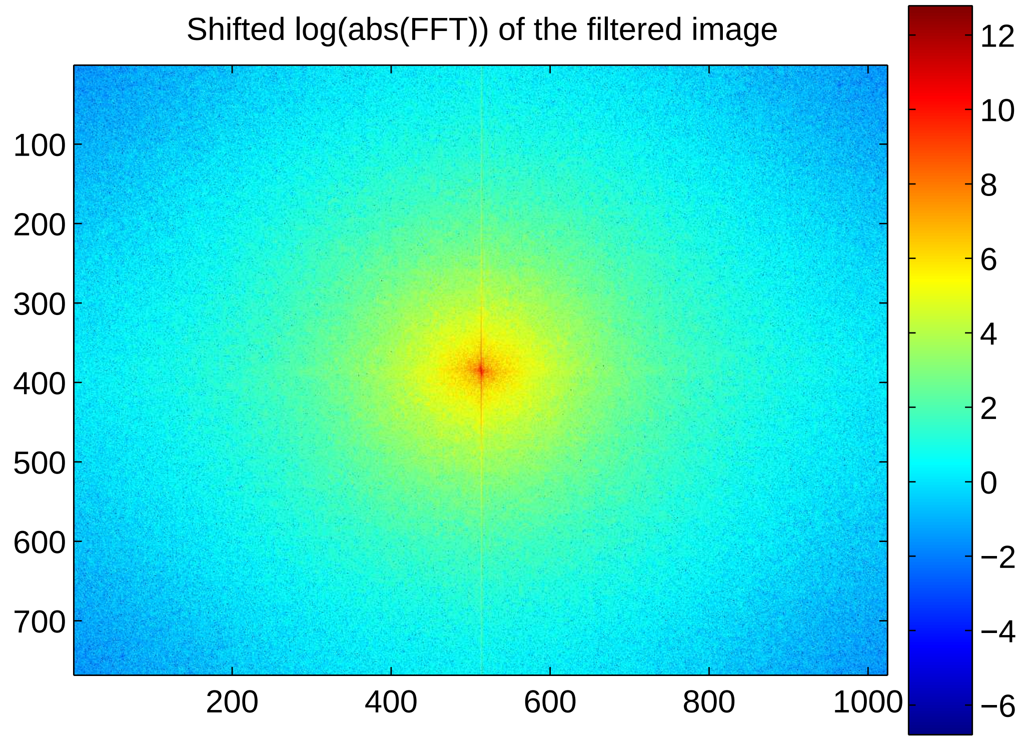


Frekvenční spektrum

Dolní propust, Butterworth (2)



Butterworthův dolnoprop. filtr



FFT filtrovaného obrázku

$H(u,v) = \frac{1}{1+\left(\frac{D(u,v)}{D_0}\right)^{\frac{2}{n}}}$, kde $D(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$. n je stupeň filtru. D_0 je frekvence filtru odpovídající poklesu amplitudy o 3dB.

Dolní propust, Butterworth (3)

Výchozí obrázek

Filtrovaný obrázek

Homomorfický filtr (1)

Cíl: normalizovat současně jas přes celý obrázek a zvýšit kontrast.

Vychází se z předpokladů, že:

- osvětlení i se mění v obrázku pomalu (malé frekvence),
- odrazivost r se mění rychle, protože scéna bývá různorodá,
- obrázek lze rozložit v každém pixlu na součin dvou složek – osvětlení i a odrazivosti r: $f(x, y) = i(x, y)\, r(x, y)$.

Trik: použít logaritmus pro oddělení dvou komponent, tj. osvětlení a odrazivosti!

Homomorfický filtr (2)

$$z(x,y) = \ln f(x,y) = \ln i(x,y) + \ln r(x,y)$$

Fourierovská dvojice

$$Z(u,v) = I(u,v) + R(u,v)$$

Filtrování ve frekvenční oblasti

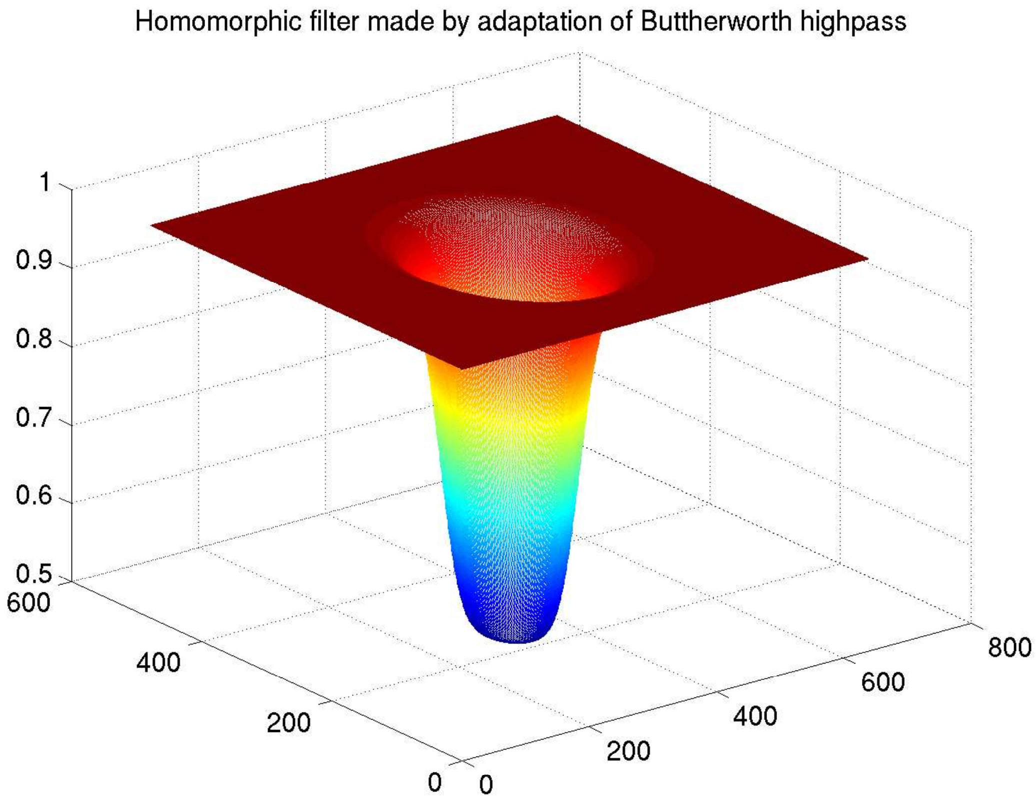
$$S(u,v) = H(u,v) Z(u,v) = H(u,v) I(u,v) + H(u,v) R(u,v)$$

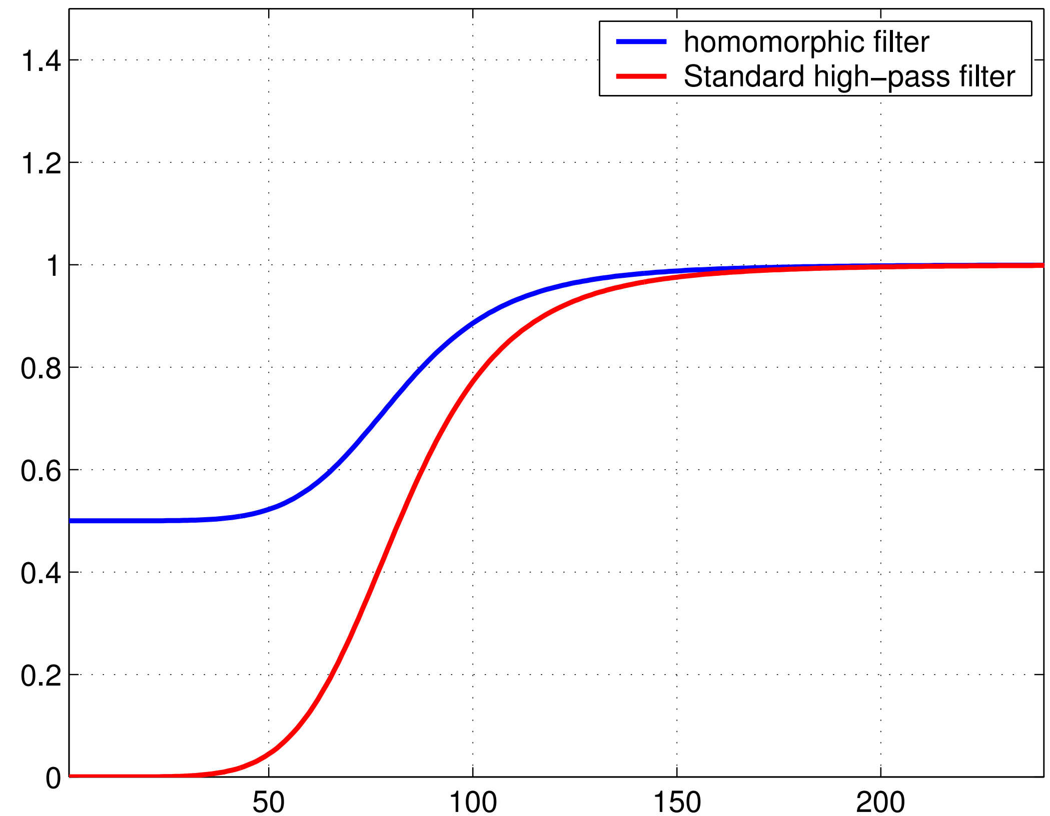
převod zpět do prostorových souřadnic $s(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{S(u,v)\}$ a návrat z $\ln$

$$g(x,y) = \exp\left(s(x,y)\right)$$

Výsledkem je potlačení změn v osvětlení scény a zlepšení odrazivostní složky.

Homomorfické filtry





Připomínka: Filter je použit na $Z(u, v)$ a nikoliv na $F(u, v)$!

Výsledky homomorfické filtrace

Original image.

Filtered image.

Návrh 2D FIR filtrů

- Dvojrozměrné IIR filtry se nepoužívají kvůli nestabilitě (není zaručena kauzalita).
- FIR filtry se snadno reprezentují jako matice koeficientů. Snadná implementace.
- 2D FIR filtry jsou přirozeným zobecněním 1D FIR filtrů.
- FIR filtry lze navrhnout, aby měly lineární fázi, což omezuje zkreslení.
- Používají se tři návrhové metody:
  1. Metoda transformace frekvence převádí 1D filtr na 2D.
  2. Metoda vzorkování frekvence vytváří filtr podle požadované frekvenční odezvy.
  3. Metoda okna skládá filtr z ideální impulsní charakteristiky a vyhlazovacího okna.

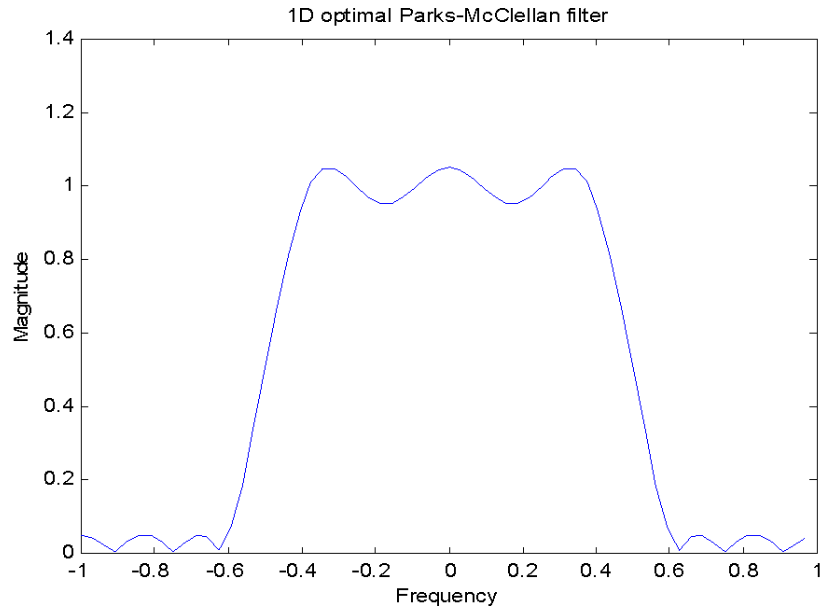
Metoda transformace frekvence

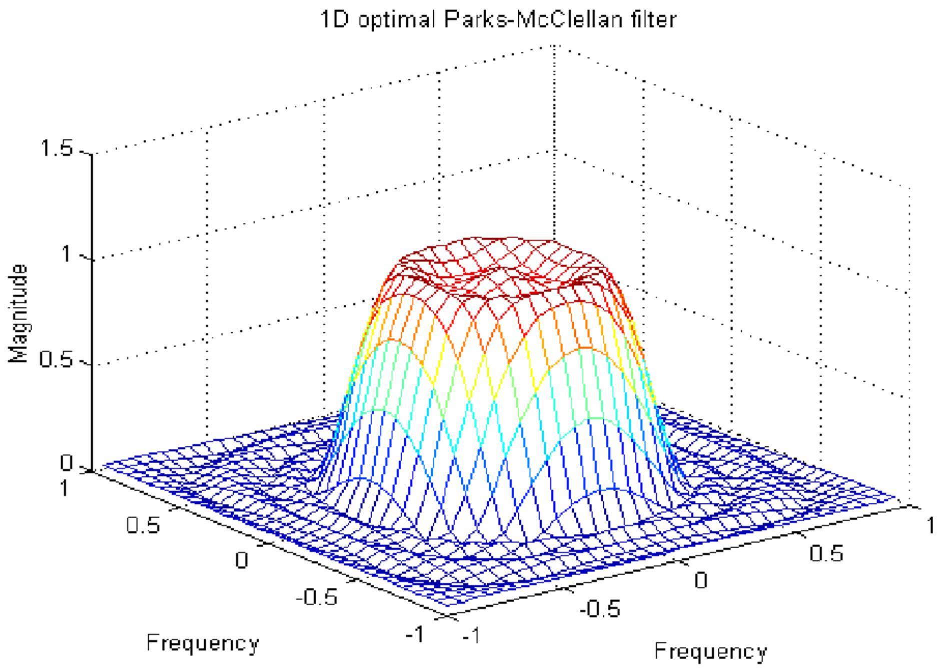
Lze využít metody pro návrh 1D filtrů. Převod na středově souměrný 2D filtr. Dobrá metoda.

Příklad v MATLABU (Parks-McClellanův optimální návrh):

```
b = remez(10,[0 0.4 0.6 1],[1 1 0 0]);

h = ftrans2(b);

[H,w] = freqz(b,1,64,'whole');

colormap(jet(64))

plot(w/pi-1,fftshift(abs(H))) figure, freqz2(h,[32 32])
```

2D Parks-McClellan Filtr pokračování příkladu





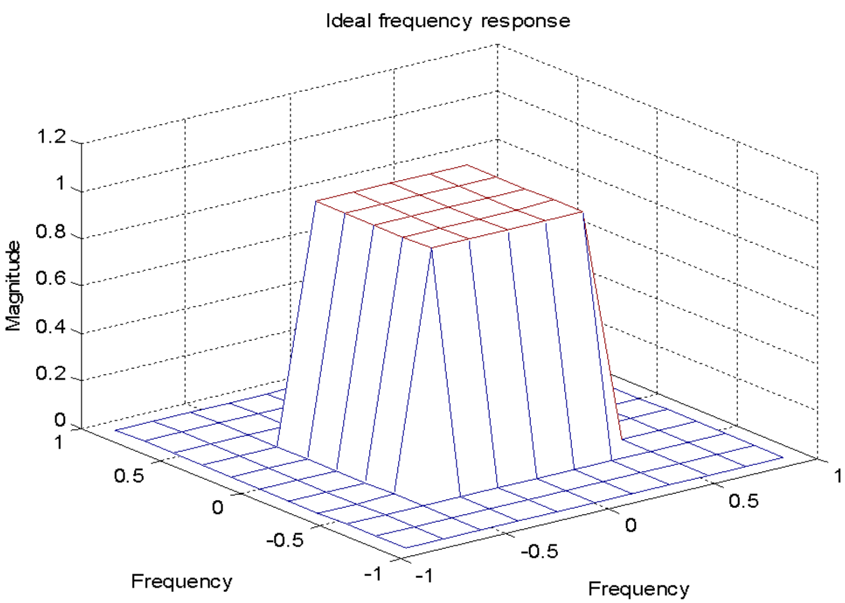
Metoda vzorkování frekvence

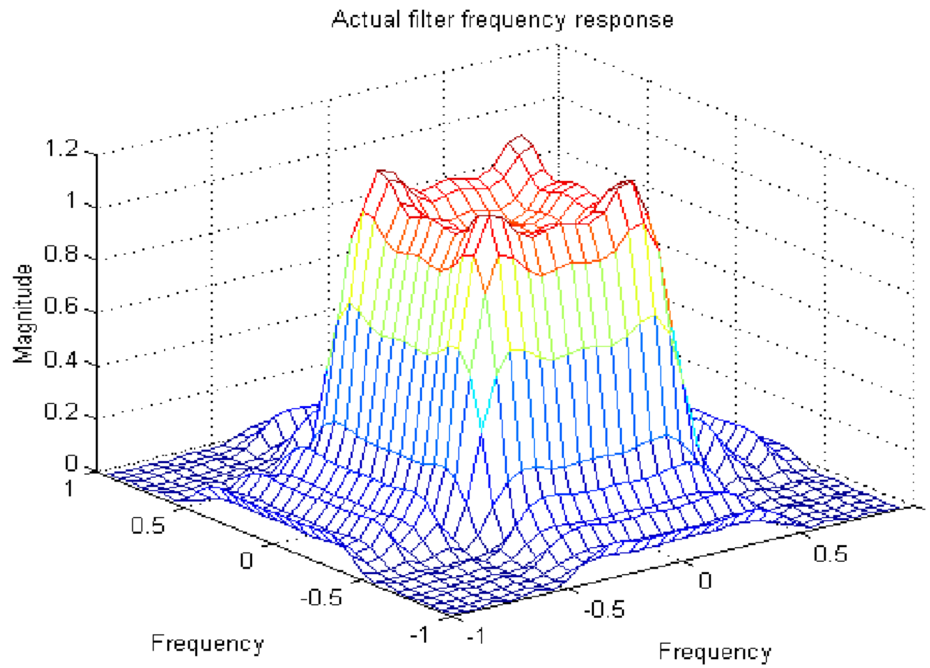
Vytváří filtr na základě zadané frekvenční odezvy ve formě matice, který danými body prochází. Mimo vzorkovací body je chování libovolné, obvykle zakmitávání.

Příklad v MATLABU (návrh 11×11 filtru)

```
Hd = zeros(11,11); Hd(4:8,4:8) = 1;

[f1,f2] = freqspace(11,'meshgrid');

mesh(f1,f2,Hd), axis([-1 1 -1 1 0 1.2]), colormap(jet(64))

h = fsamp2(Hd);

figure, freqz2(h,[32 32]), axis([-1 1 -1 1 0 1.2])
```

Metoda vzorkování frekvence pokračování příkladu





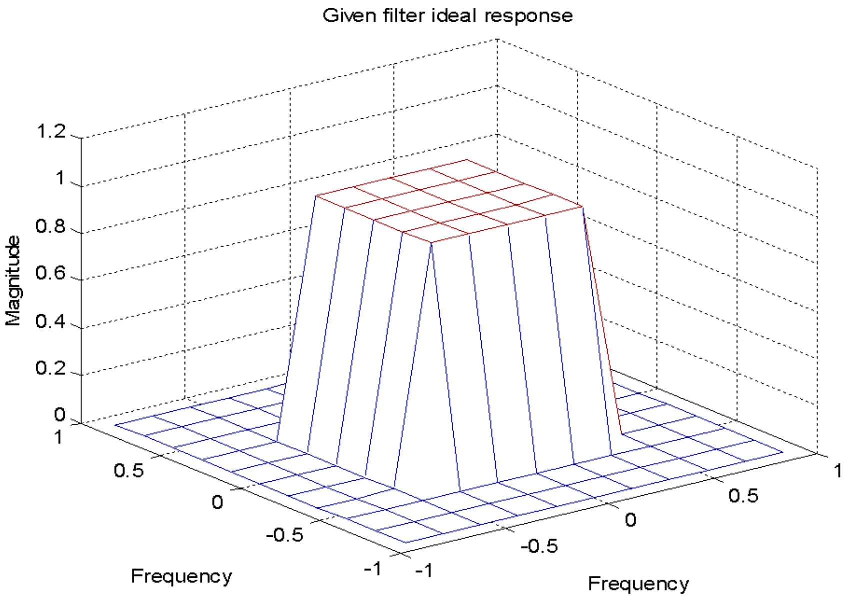
Metoda okna

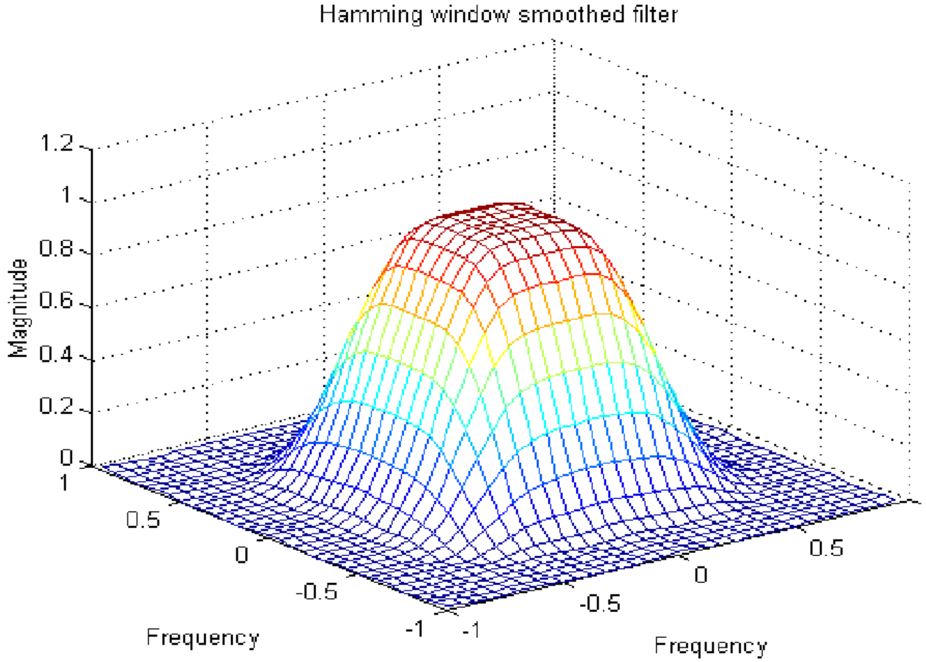
Ideální odezva filtru se vyhladí koeficienty v okně. Aproximuje se ideální filtr.

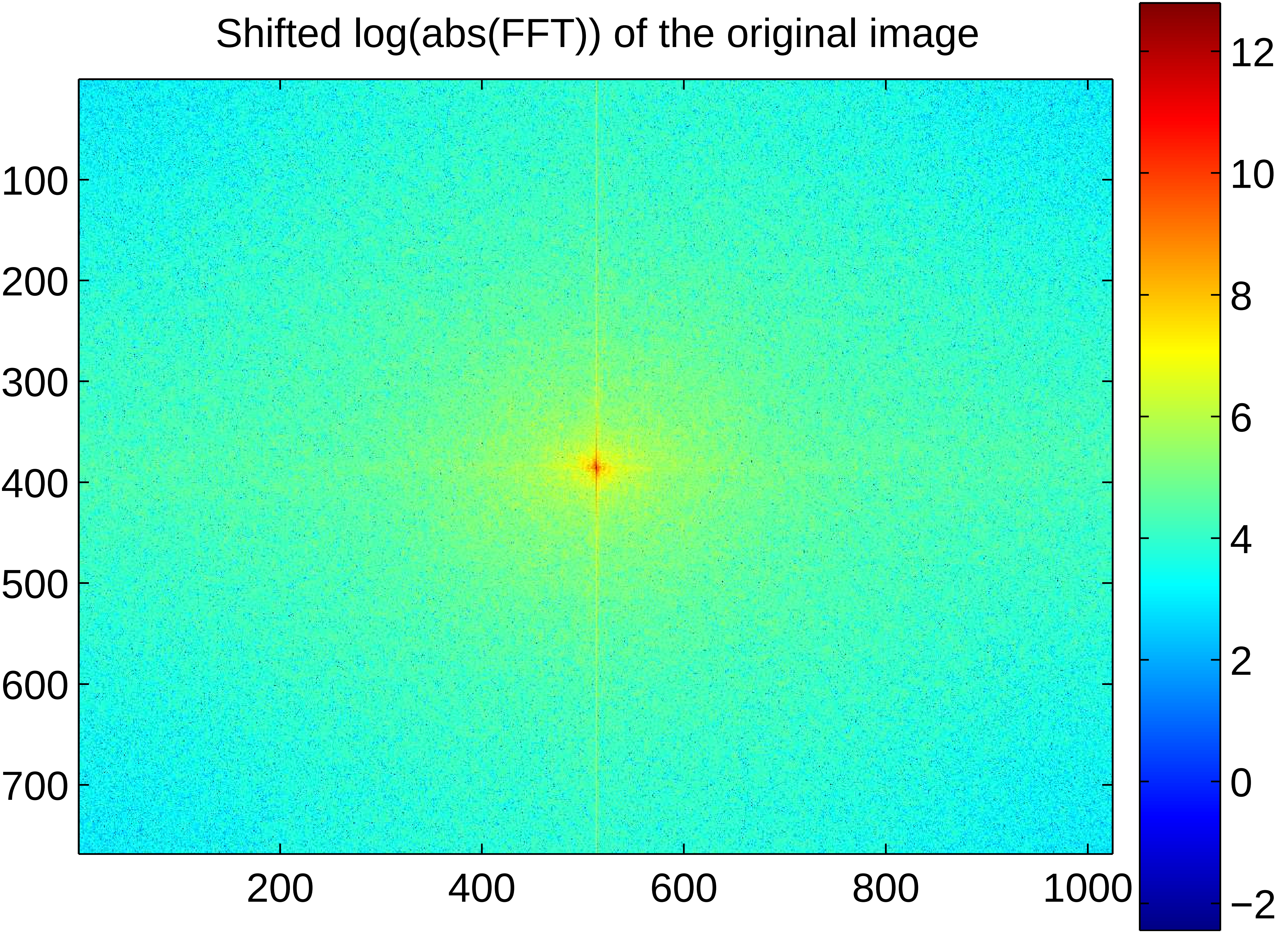
Většinou poskytuje lepší výsledky než metoda vzorkování frekvence.

```
Hd = zeros(11,11); Hd(4:8,4:8) = 1;

[f1,f2] = freqspace(11,'meshgrid');

mesh(f1,f2,Hd), axis([-1 1 -1 1 0 1.2]), colormap(jet(64))

h = fwind1(Hd,hamming(11));

figure, freqz2(h,[32 32]), axis([-1 1 -1 1 0 1.2])
```

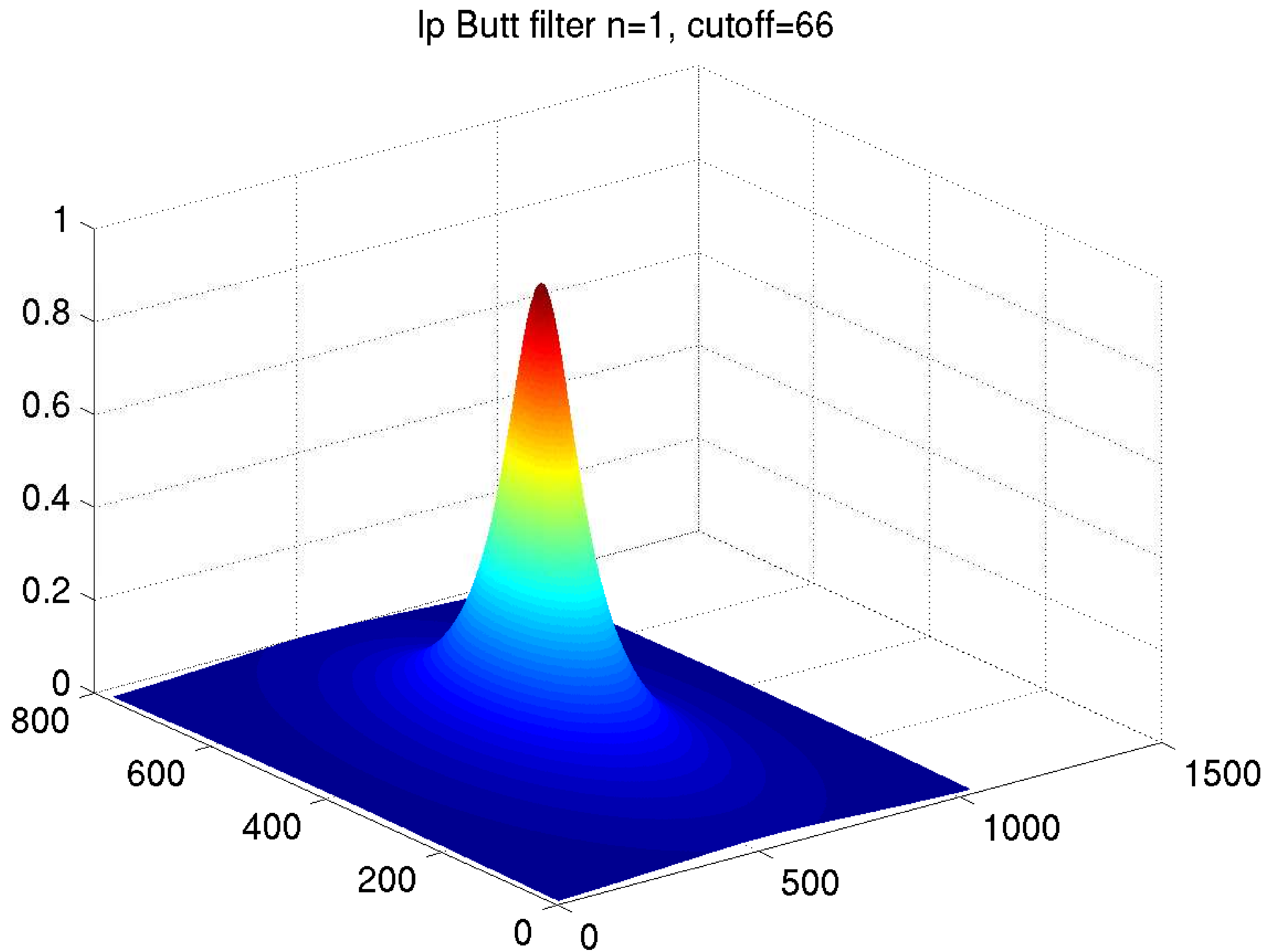
Metoda okna
pokračování příkladu

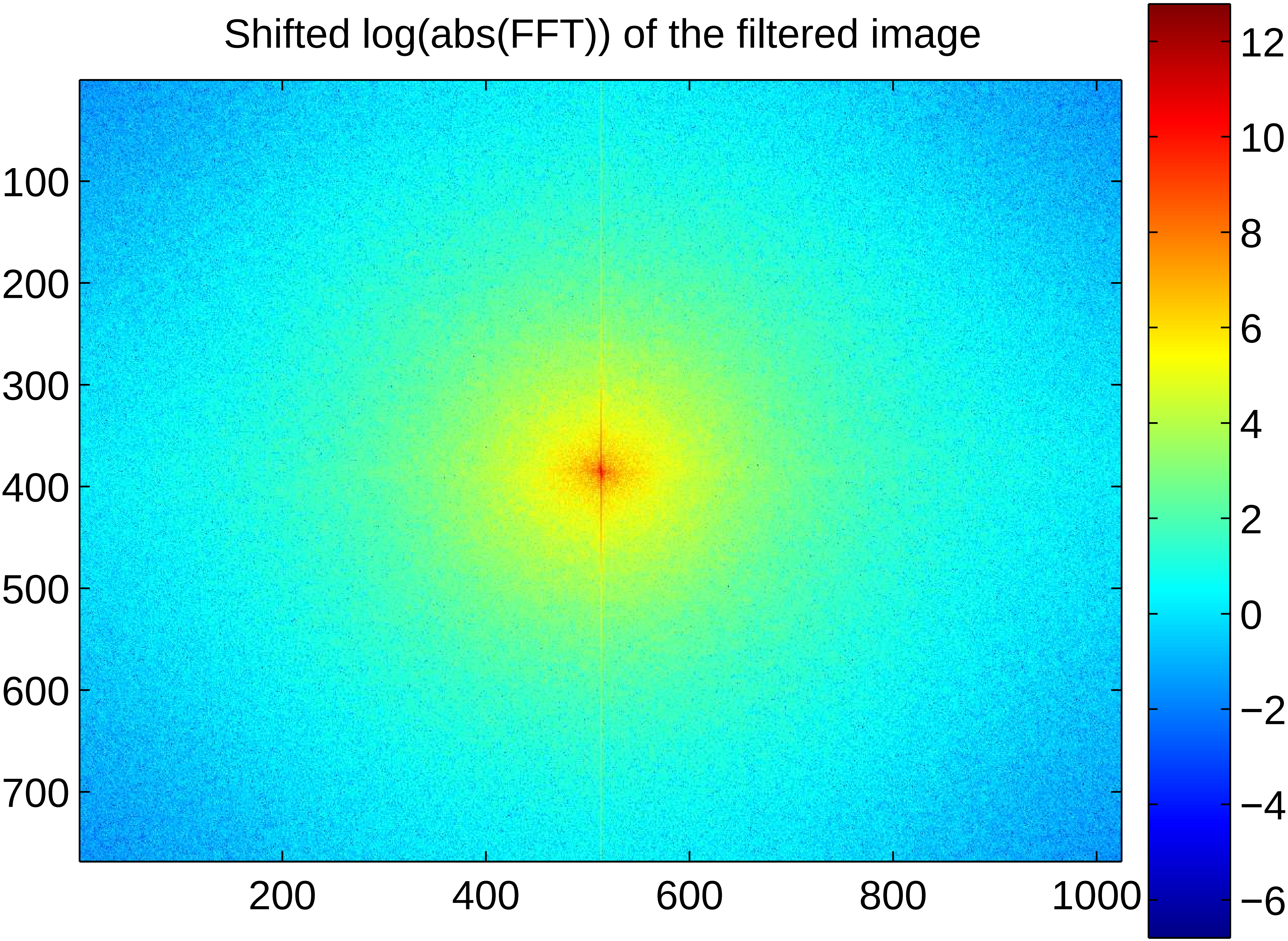


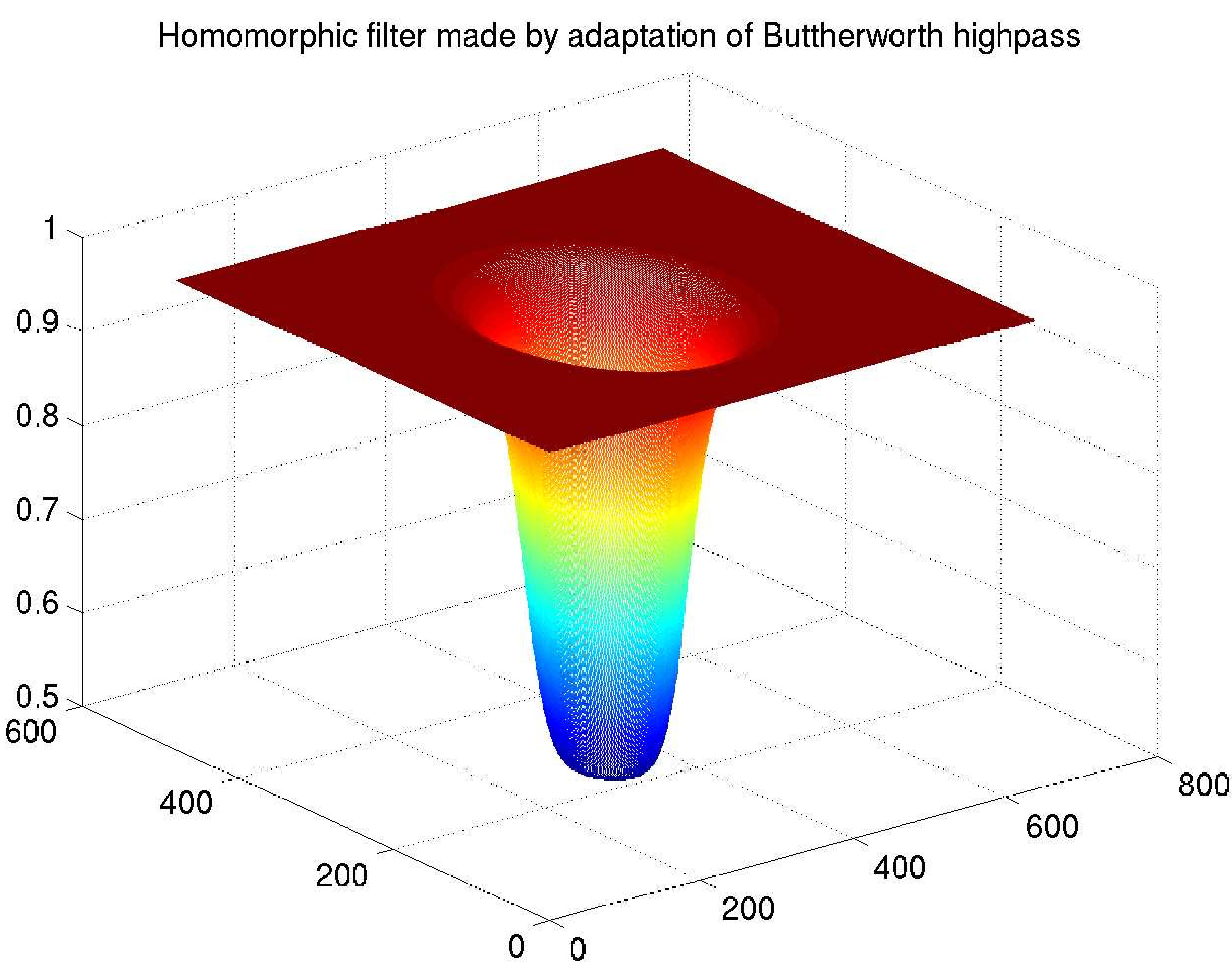




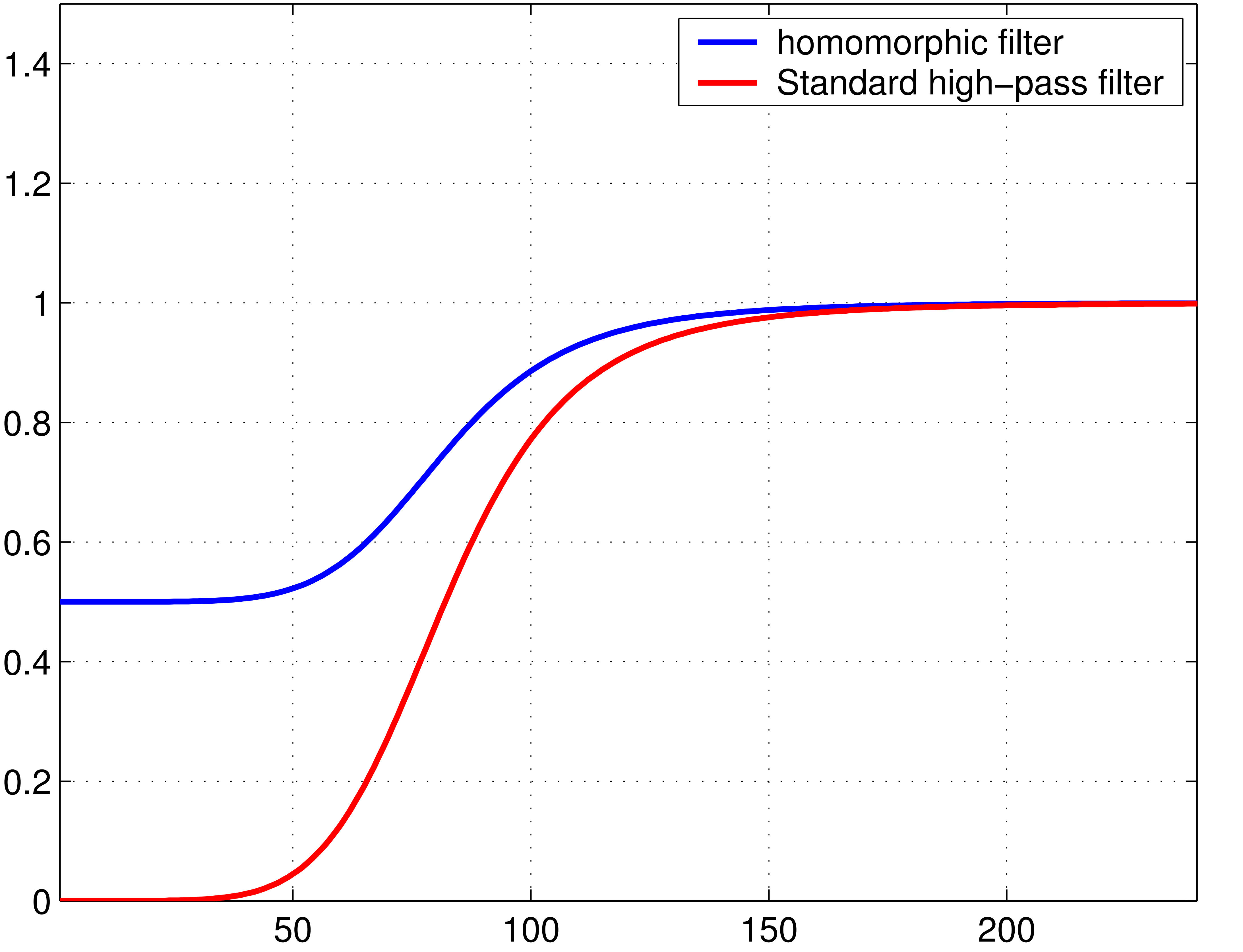
Shifted log(abs(FFT)) of the original image
100
200
300
400
500
600
700
200
400
600
800
1000
12
10
8
6
4
2
0
−2

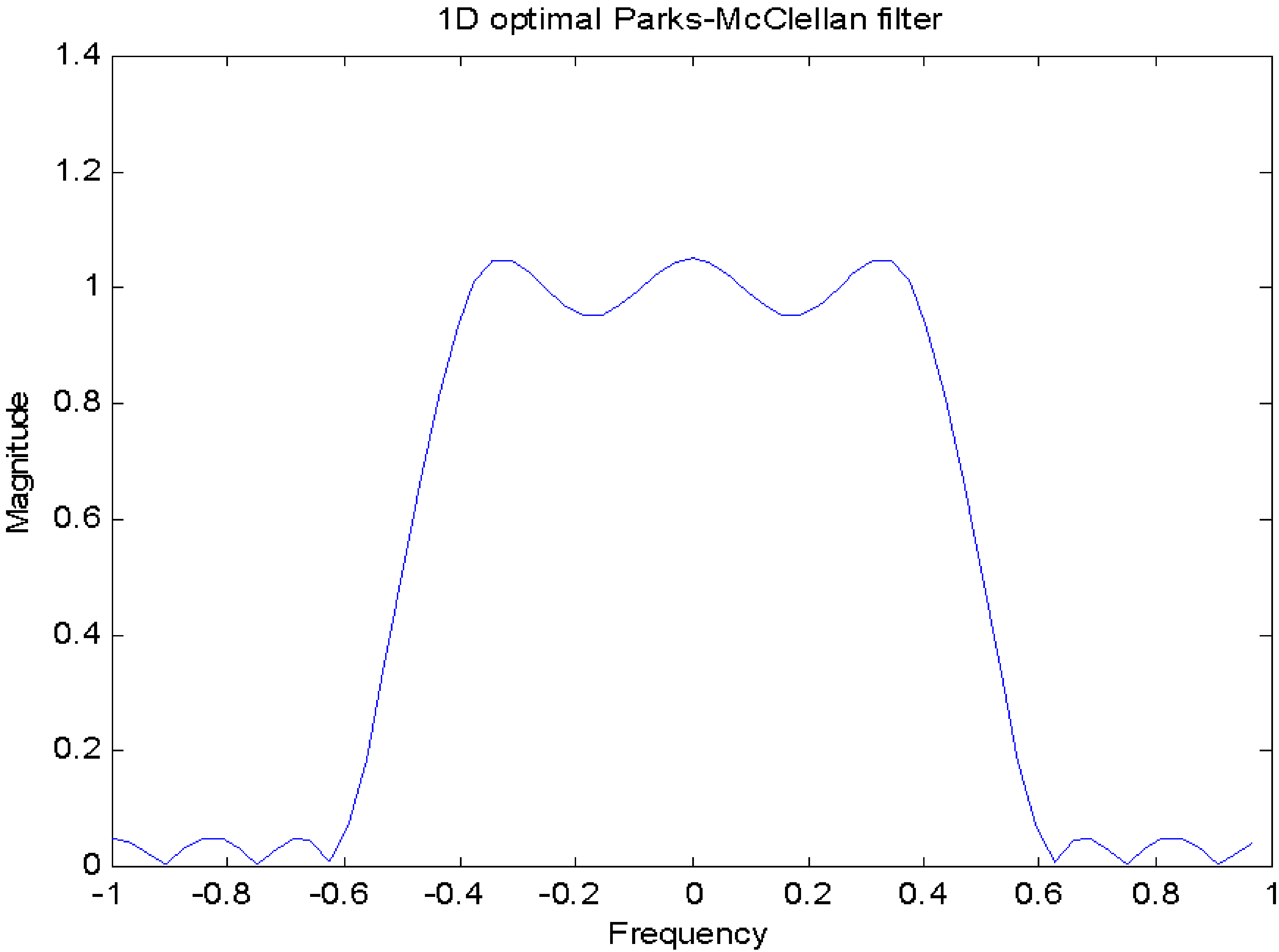

lp Butt filter n=1, cutoff=66
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
800
600
400
200
0
0
500
1000
1500

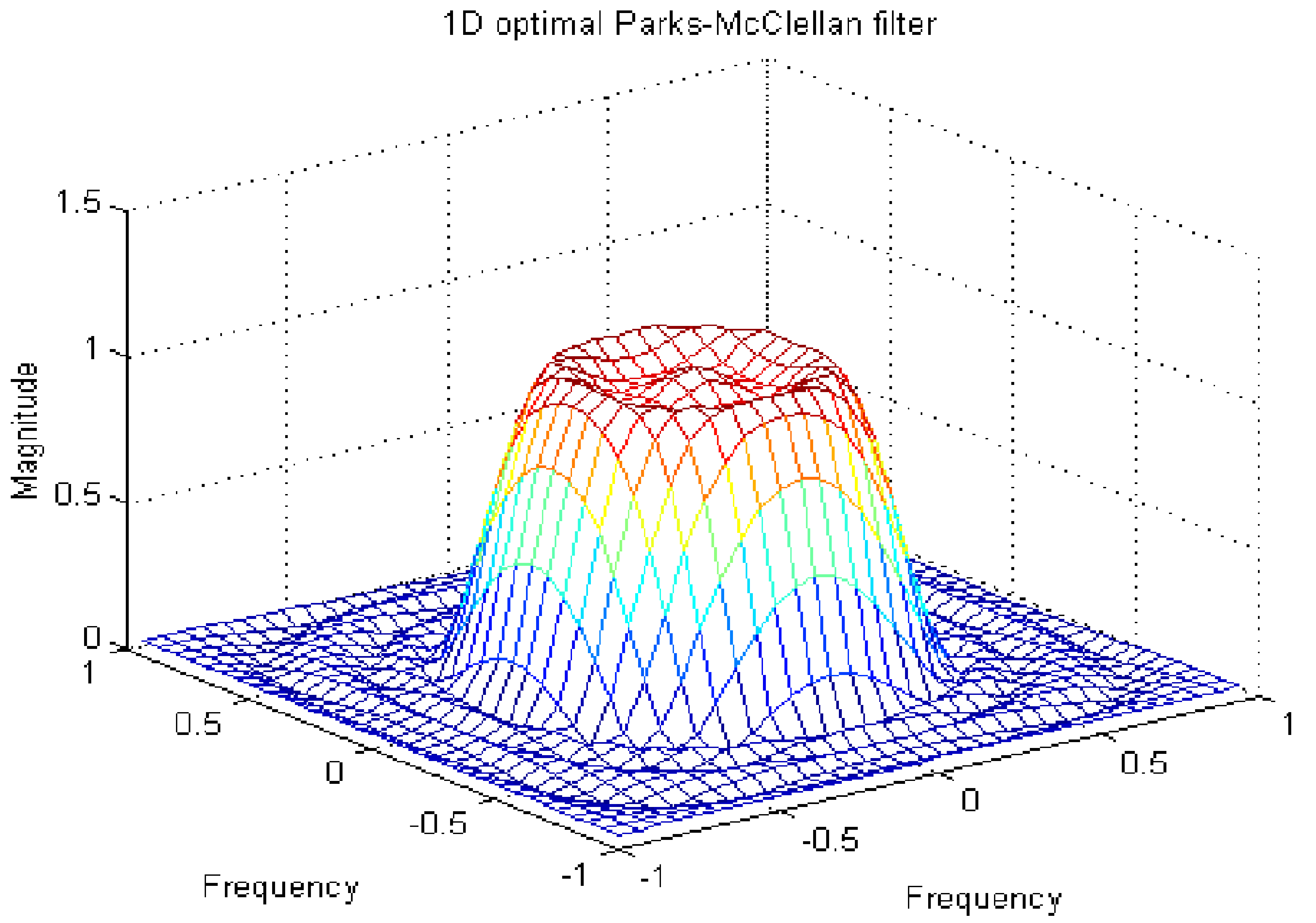

Shifted log(abs(FFT)) of the filtered image
100
200
300
400
500
600
700
200
400
600
800
1000
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6



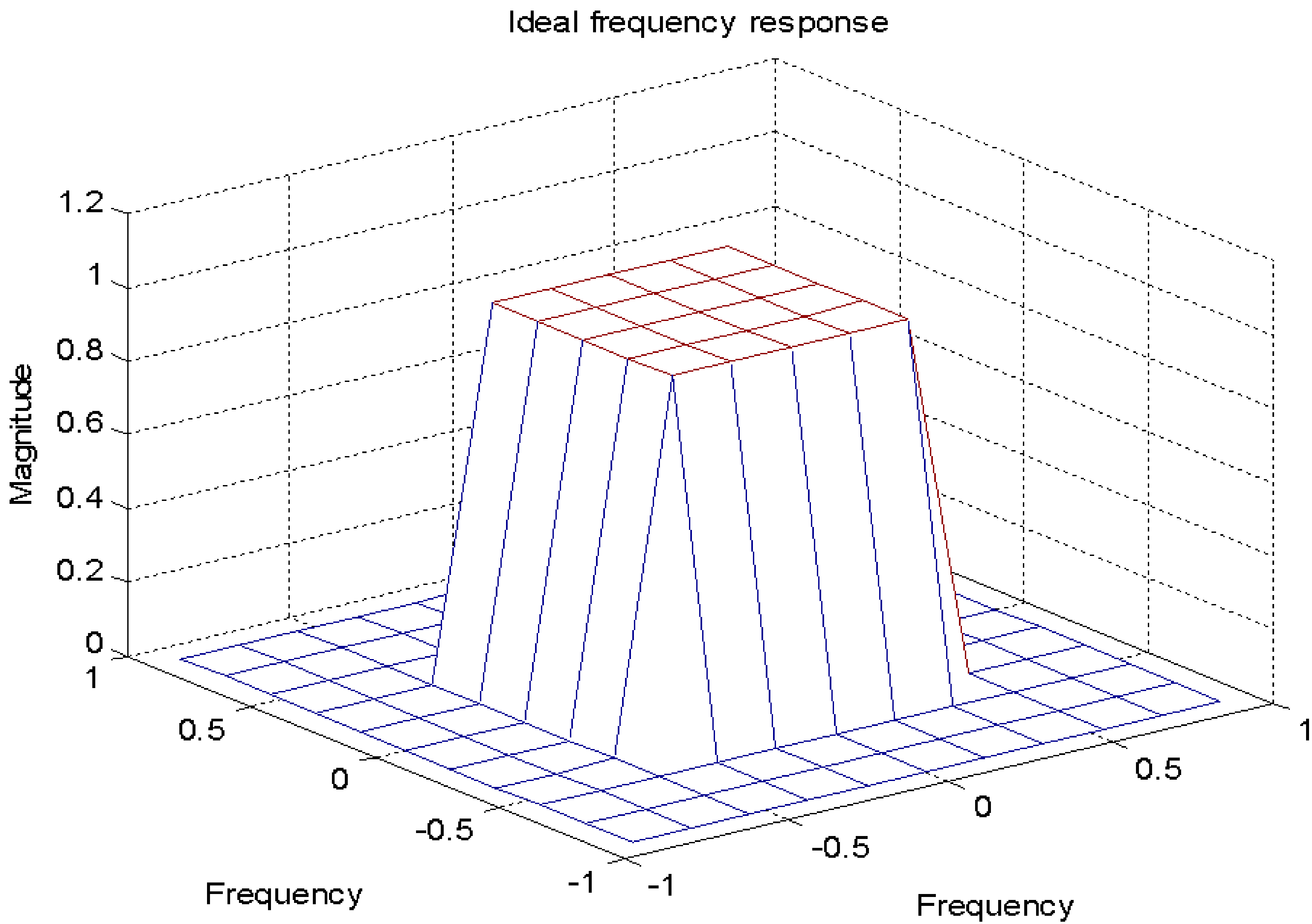
Homomorphic filter made by adaptation of Buttherworth highpass
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
600
400
200
0
0
200
400
600
800

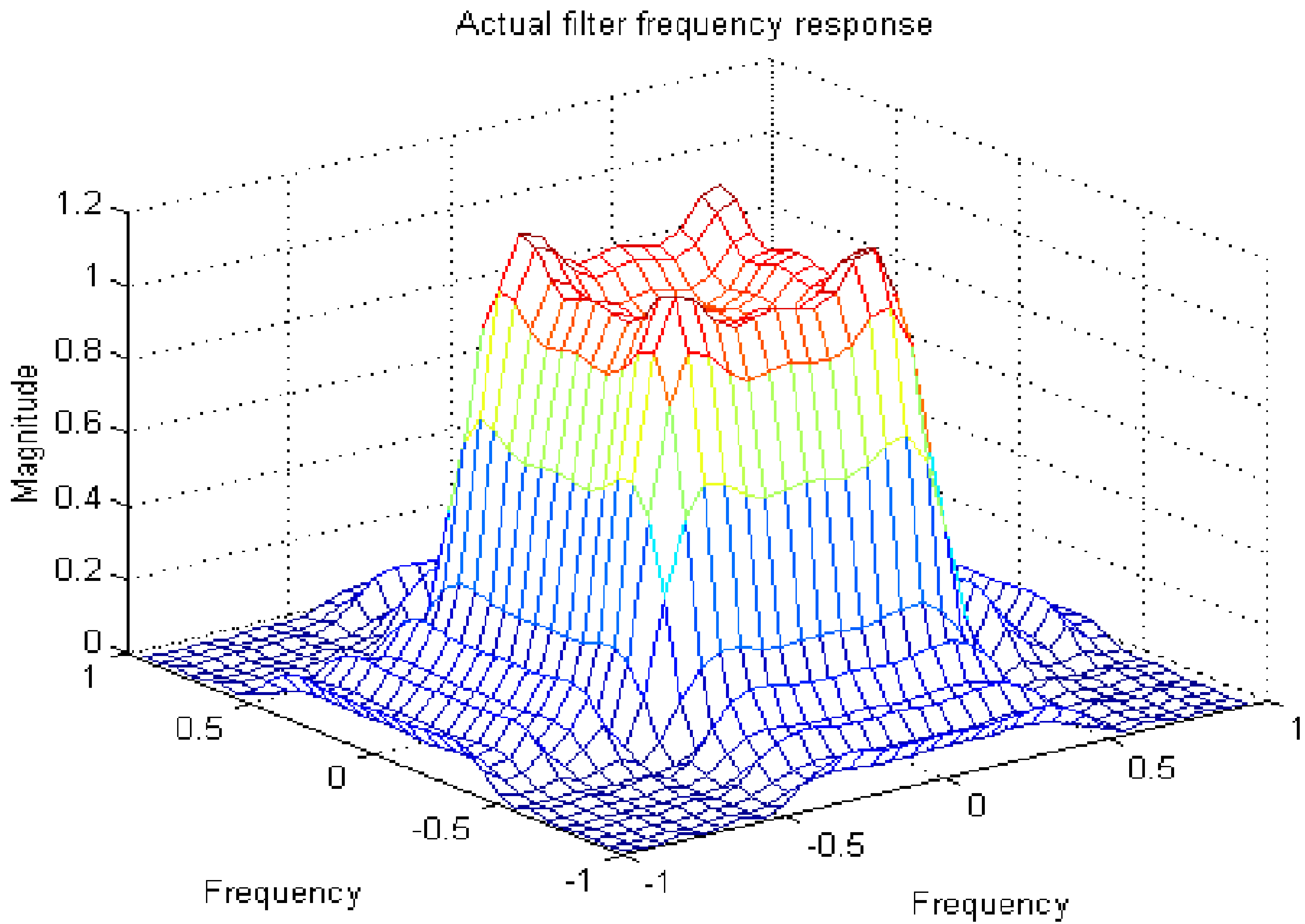

homomorphic filter
Standard high−pass filter
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50
100
150
200

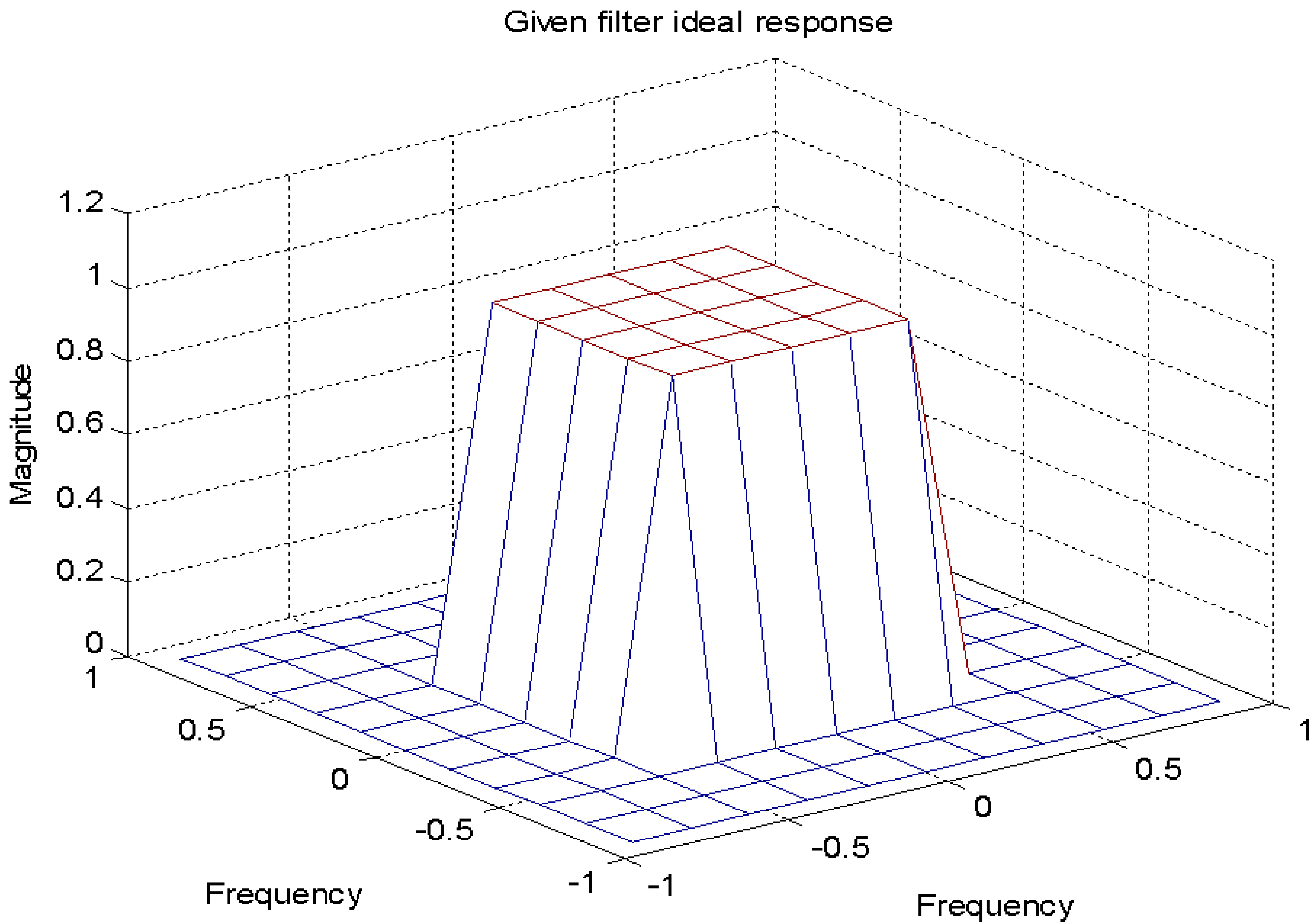

1D optimal Parks-McClellan filter
Magnitude
Frequency
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

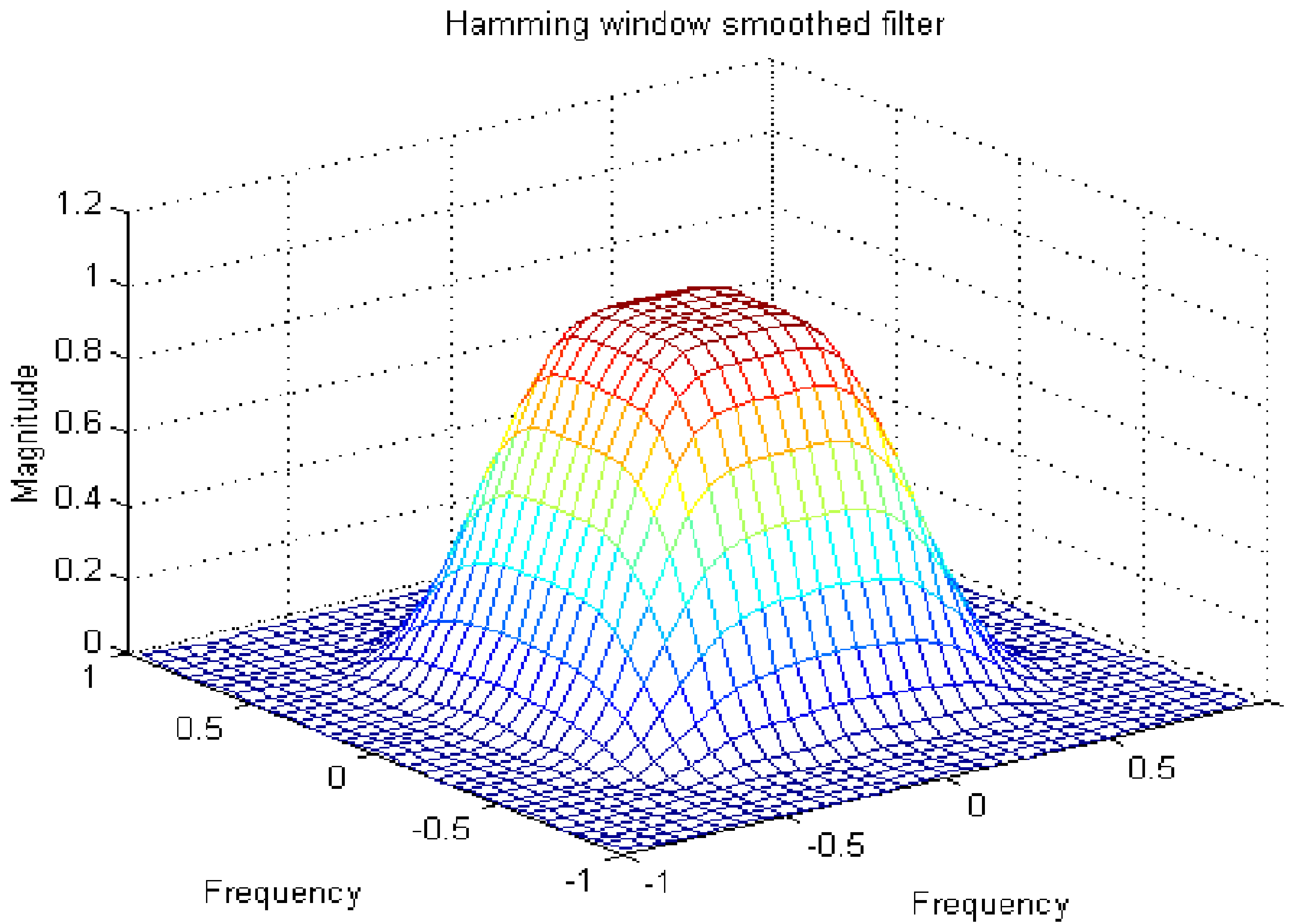


1D optimal Parks-McClellan filter
Magnitude
1.5
1
0.5
0
1
0.5
0
-0.5
-1
Frequency
-1
-0.5
0
0.5
1
Frequency


Ideal frequency response
Magnitude
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
-0.5
-1
Frequency
-1
-0.5
0
0.5
1
Frequency


Actual filter frequency response
Magnitude
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
-0.5
-1
Frequency
-1
-0.5
0
0.5
1
Frequency


Given filter ideal response
Magnitude
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
Frequency
Frequency


Hamming window smoothed filter
Magnitude
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
-0.5
-1
Frequency
-1
-0.5
0
0.5
1
Frequency