Fourierova transformace v 1D a 2D

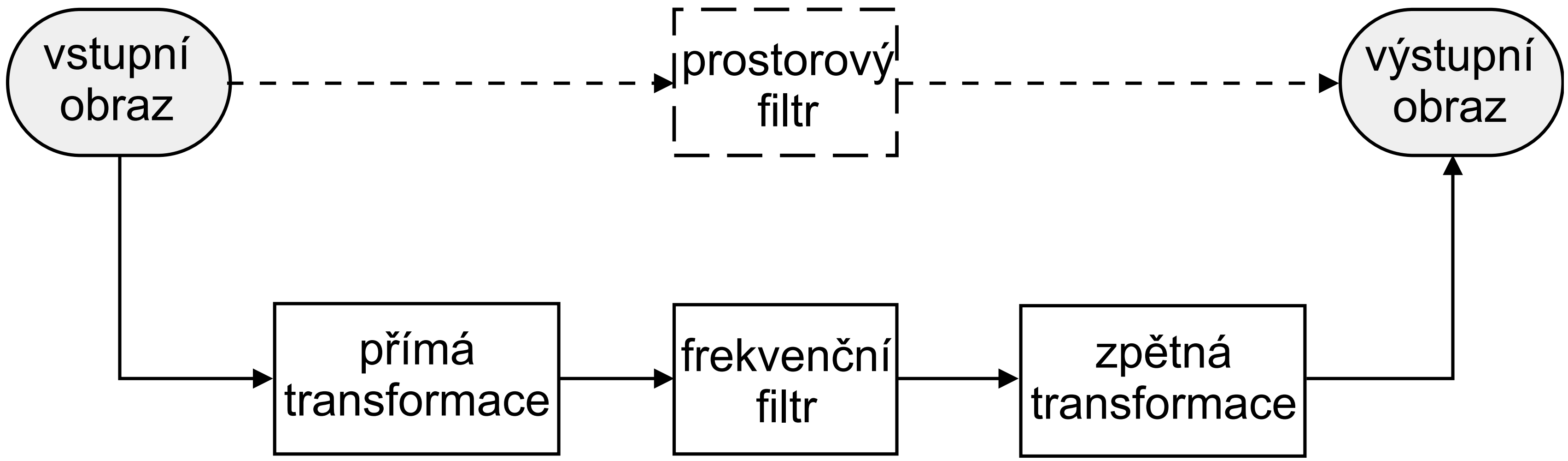
Václav Hlaváč

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická, katedra kybernetiky
Centrum strojového vnímání
`http://cmp.felk.cvut.cz/~hlavac, hlavac@fel.cvut.cz`

Osnova přednášky:

- Fourierova tx v 1D, výpočetní složitost, FFT.
- Fourierova tx ve 2D, centrování spektra.
- Příklady ve 2D.

Výchozí představa, filtrování v prostoru frekvencí



Filtrace v prostorové oblasti. Pro 1D signály bychom řekli v časové oblasti. Lineární kombinace vstupního obrazu s koeficienty (často lokálního) filtru. Základní operací je konvoluce.

Filtrace ve frekvenční oblasti. Převod do "frekvenční reprezentace", tam filtrace, převod zpět.

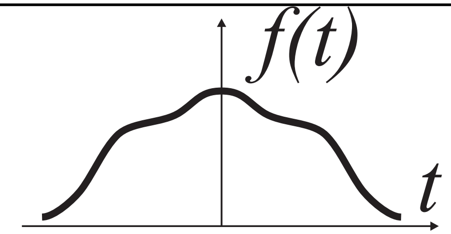
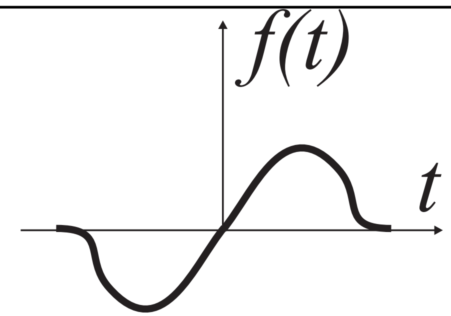
Pro první představu stačí *Fourierova transformace*, ale jsou i další lineární integrální transformace sloužící k podobnému účelu, např. kosínová nebo vlnková (wavelet).

1D Fourierova transformace, úvod

- Fourierova transformace je základním nástrojem pro (lineární) zpracování signálů a v teorii řízení.
- Dovoluje vzájemně jednoznačný převod signálů z/do časové reprezentace $f(t)$ do/z frekvenční reprezentace $F(\xi)$.
- Umožňuje analyzovat frekvenční obsah (spektrum) signálu.
- FT je vhodná pro periodické signály.
- Když signál není periodický, potom lze použít krátkodobou FT nebo lineární integrální transformaci s bázovými funkcemi lokalizovanými v čase nebo 2D prostoru. Příkladem je vlnková transformace (wavelets), Gaborovy filtry.

Joseph Fourier
1768-1830

Sudá, lichá a komplexně sdružená funkce

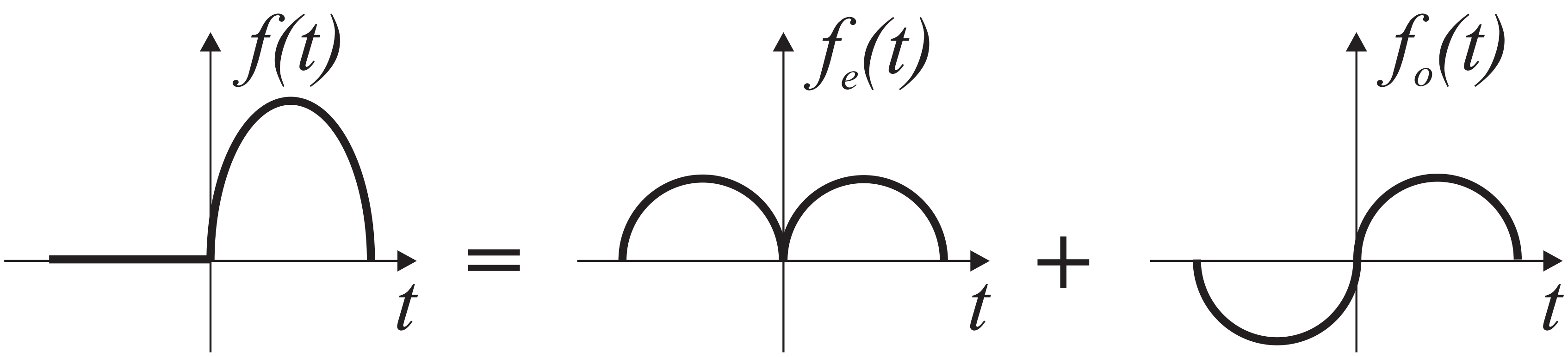
Sudá	$f(t) = f(-t)$	
Lichá	$f(t) = -f(-t)$	
Komplexně sdružená	$f(\xi) = f^*(-\xi)$	$f(\ \ 5) = 2 + 3i$ $f(-5) = 2 - 3i$

- f^* označuje komplexně sdruženou funkci.
- i je komplexní jednotka.

Každou funkci lze rozložit na sudou a lichou část

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$



Fourierova Tx definice: spojitý případ

$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\xi)$, kde ξ [Hz=s^{-1}] je frekvence a $2\pi\xi$ [s^{-1}] je úhlová frekvence.

Fourierova Tx	Inverzní Fourierova Tx
$F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, \mathrm{d}t$	$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{2\pi i \xi t}\, \mathrm{d}\xi$

Jaký je význam inverzní FT? Vyjádřeme pomocí Riemannova součtu:

$$f(t) \doteq \left(\ldots + F(\xi_0)\, e^{2\pi i \xi_0 t} + F(\xi_1)\, e^{2\pi i \xi_1 t} + \ldots \right) \Delta\xi \,,$$

kde $\Delta\xi = \xi_{k+1} - \xi_k$ pro $\forall\ k$.

$\Rightarrow$ Každá 1D funkce se dá vyjádřit jako vážený součet (integrál) mnoha komplexních exponenciál (díky Eulerově vztahu $e^{i\xi} = \cos\xi + i\sin\xi$ také jako součet sinusovek a kosinusovek).

Podmínky pro existenci Fourierovy transformace

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mid f(t) \mid \mathrm{d}t < \infty$, tj. $f(t)$ musí klesat rychleji než exponenciála.
2. $f(t)$ smí mít nejvýše konečný počet nespojitostí v každém konečném intervalu.

Pro digitální obrazy Fourierova transformace vždy existuje, protože digitální obrazy jsou omezené a mají konečný počet nespojitostí.

Fourierova Tx, symetrie

- Symetrie vzhledem ke komplexně sdružené části, tj. $F(-i\xi) = F^*(i\xi)$.
- $|F(i\xi)|$ je vždy sudá.
- Fáze $F(i\xi)$ je vždy lichá.
- $Re\{F(i\xi)\}$ je vždy sudá.
- $Im\{F(i\xi)\}$ je vždy lichá.
- Sudá část $f(t)$ se transformuje na reálnou část $F(i\xi)$.
- Lichá část $f(t)$ se transformuje na imaginární část $F(i\xi)$.

Konvoluce, definice, spojitý případ

- Konvoluce (ve funkcionální analýze) je operace na dvou funkcích f a h, která vytvoří třetí funkci $(f * h)$, která se používá jako modifikace jedné ze vstupních funkcí.
- Konvoluce je integrál "míchající" hodnoty dvou funkcí, a to funkce $h(t)$, která je posouvána a překrývá se s funkcí $f(t)$ nebo obráceně.
- Uvažujme nejdříve spojitý případ s obecnými nekonečnými mezemi

$$(f * h)(t) = (h * f)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

- Meze integrálu můžeme omezit na interval $[0, t]$, protože předpokládáme nulové hodnoty funkcí pro záporný argument

$$(f * h)(t) = (h * f)(t) \equiv \int_{0}^{t} f(\tau)\, h(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} f(t - \tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Konvoluce, diskrétní aproximace

$$(f * h)(i) = (h * f)(i) \equiv \sum_{m \in \mathcal{O}} h(i-m)\, f(m) = \sum_{m \in \mathcal{O}} h(i)\, f(i-m)\,,$$

kde $\mathcal{O}$ je lokální okolí "současné pozice"a h je konvoluční jádro (též konvoluční maska).

Fourierova Tx, vlastnosti (1)

Vlastnosti	$f(t)$	$F(\xi)$
Linearita	$af_1(t) + bf_2(t)$	$a\,F_1(\xi) + b\,F_2(\xi)$
Dualita	$F(t)$	$f(-\xi)$
Konvoluce	$(f * g)(t)$	$F(\xi)\,G(\xi)$
Součin	$f(t)\,g(t)$	$(F * G)(\xi)$
Časový posun	$f(t - t_0)$	$e^{-2\pi i \xi t_0}\,F(\xi)$
Frekvenční posun	$e^{2\pi i \xi_0 t} f(t)$	$F(\xi - \xi_0)$
Derivace	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$2\pi i \xi F(\xi)$
Násobení t	$t\,f(t)$	$\frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}F(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$
Změna měřítka času	$f(a\,t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\xi/a\right)$

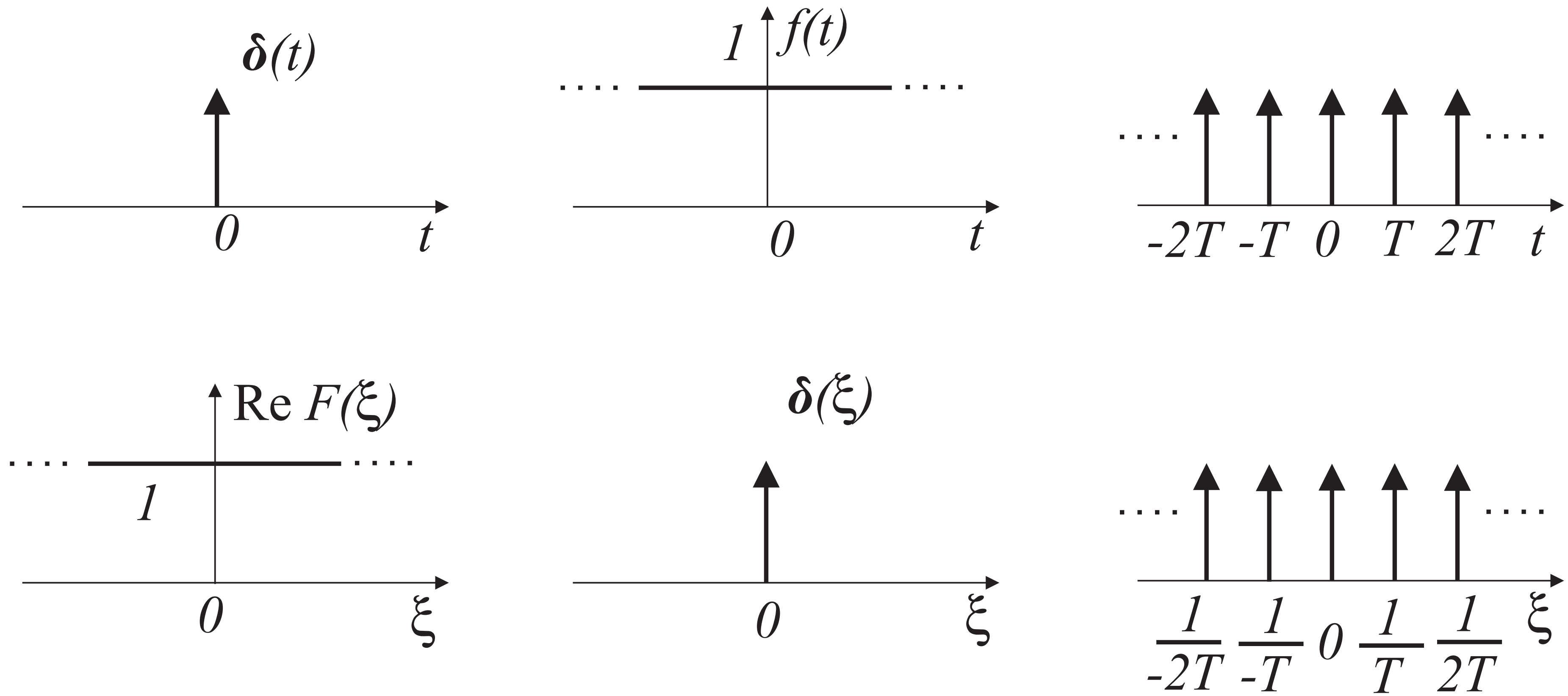
Fourierova Tx, vlastnosti (2)

Hodnota	$F(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$	Plocha pod funkcí $f(t)$
Hodnota $f(0)$	$f(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(j\xi)\mathrm{d}\xi$	Plocha pod $F(j\xi)$
Parsevalova věta	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert F(j\xi)\rvert^2\mathrm{d}\xi$	energie f $=$ energie F

Základní dvojice Fourierovy Tx (1)

$f(t)$

$F(\xi)$

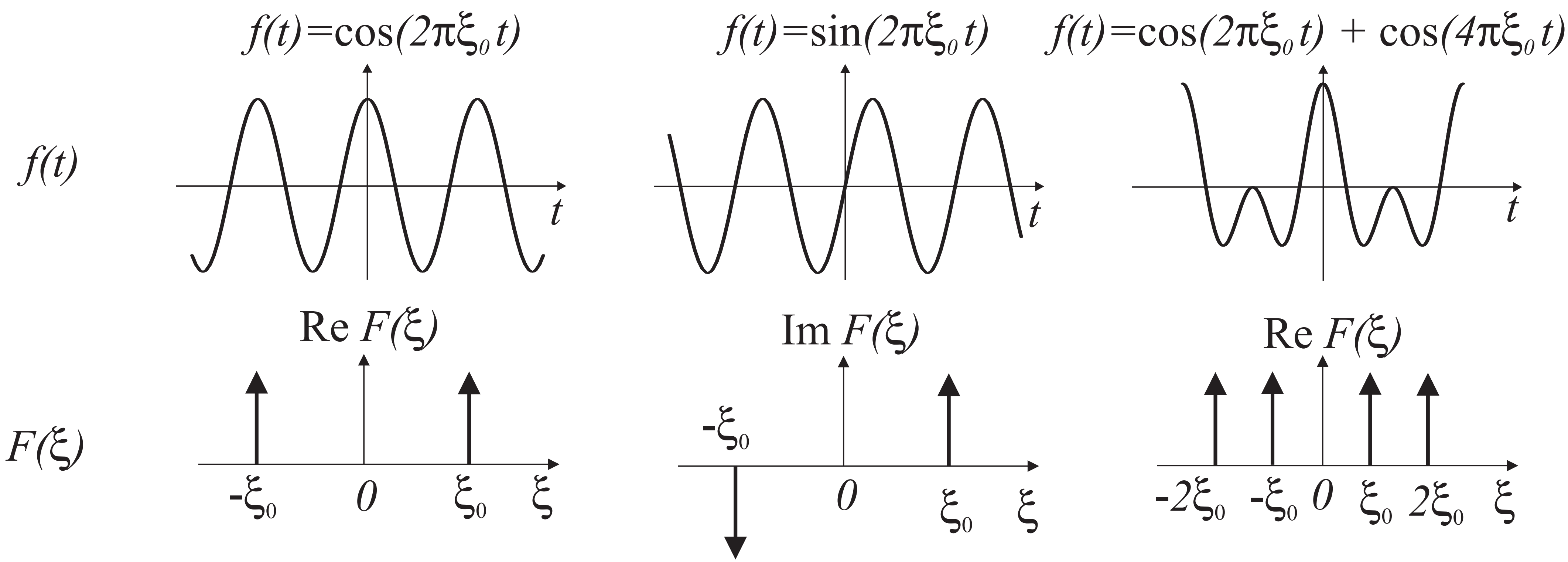


Dirac

konstanta

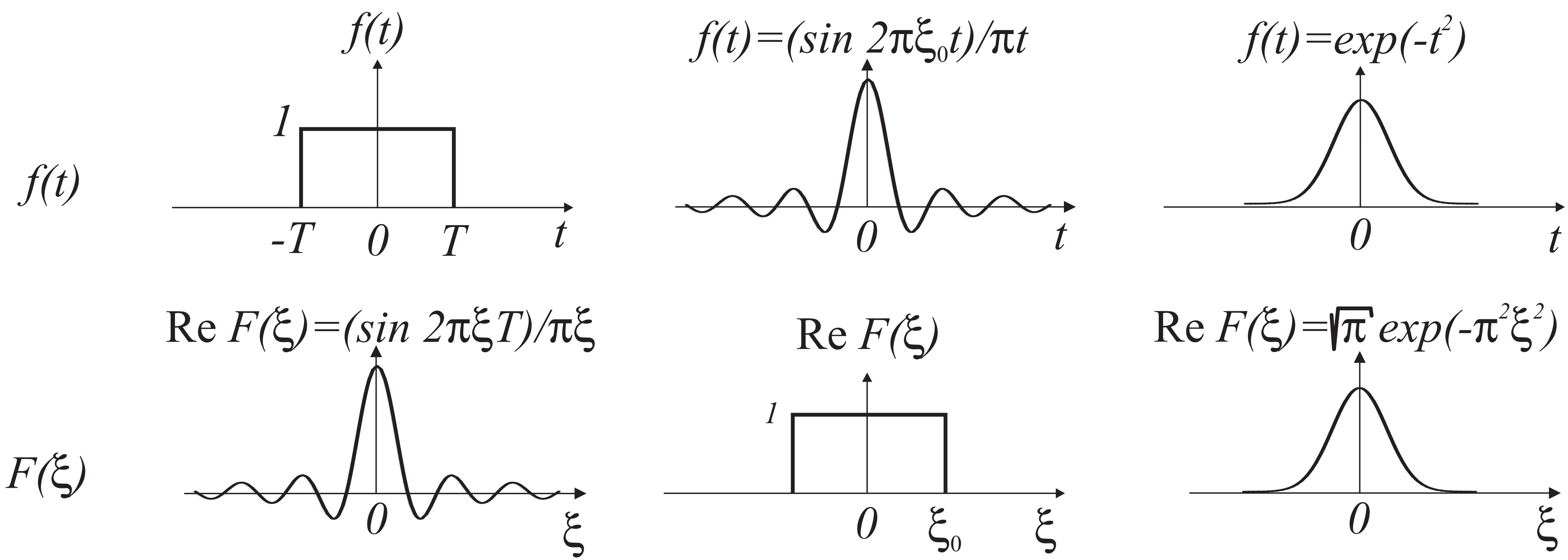
∞ posloupnost Diraců

Základní dvojice Fourierovy Tx (2)



sínus kosínus směs dvou kosínů

Základní dvojice Fourierovy Tx (3)



obdélník v t obdélník v ξ Gaussián

Princip nejistoty

- Všechny dvojice (časový signál $\leftrightarrow$ Fourierův obraz) jsou vázány principem nejistoty.
- Signál o krátké době trvání má široké frekvenční spektrum a obráceně.
- $\boxed{\text{(trvání signálu)} \cdot \text{(šířka spektra)} \geq \frac{1}{\pi}}$
- Pozorování: Gaussián e^{-t^2} modulovaný sinusovkou (Gaborova funkce) má nejmenší součin mezi trváním a šířkou spektra (optimum).
- Princip je instancí obecného principu nejistoty zavedeného Wernerem Heisenbergem v kvantové mechanice.

Neperiodické signály

Fourierova transformace předpokládá periodický signál. A co když potřebujeme zpracovávat neperiodický signál? Dva obvyklé přístupy.

1. Zpracovat signál po malých částech (oknech) a předpokládat, že vně je signál periodický.
   - Přístup zavedl Dennis Gabor v roce 1946 a nazývá se krátkodobá Fourierova transformace (Short time Fourier transform).

     Dennis Gabor, 1900-1979, vynálezce holografie, Nobelova cena za fyziku 1971., studoval v Budapešti, PhD v Berlíně 1927, odešel před nacisty do Británie v 1933.
   - Pouhé rozsekání signálu na obdélníková okna není dobré, protože na rozhraní oken jsou nespojitosti. Ty se ve spektru projeví nežádoucími vysokými frekvencemi.
   - Proto se signál obvykle konvoluje s tlumící váhovou funkcí, obvykle Gaussián nebo Hammingova funkce, zajišťující nulovou hodnotu signálu na okraji a vně okna.
2. Použití složitějších bázových funkcí, např. vlnek ve vlnkové (wavelets) transformaci.

Diskrétní Fourierova transformace

- Uvažujme vstupní signál (posloupnost) $f(n)$, $n = 0, \ldots, N-1$.
- Nechť $F(k)$ označuje Fourierovo spektrum (výsledek diskrétní Fourierovy transformace) signálu $f(n)$.
- Diskrétní Fourierova transformace

$$F(k) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}$$

- Inverzní diskrétní Fourierova transformace

$$f(n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(k)\, e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Výpočetní složitost, připomínka značení

- Při úvahách o složitosti se abstrahuje od určitého počítače a uvažuje se pouze asymptotické chování příslušného algoritmu, ať časové nebo paměťové.
- Hledá se asymptotická horní mez analyzované funkce (tj. růst hodnoty funkce) na základě jiné funkce, vyjádření jejíhož růstu je jednodušší.
- Značení 'Velké $\mathcal{O}$'; např. $\mathcal{O}(n^2)$ říká, že počet kroků algoritmu bude v nejhorším případě úměrný kvadrátu počtu vzorků.
- Aditivní členy a násobicí konstanty se ignorují, protože se hledá pouze kvalitativní chování algoritmu.
- Kvadratická složitost $\mathcal{O}(n^2)$ je horší než lineární složitost $\mathcal{O}(n)$ nebo konstatní $\mathcal{O}(1)$ (tj. nezávislá na délce n), ale lepší než kubická $\mathcal{O}(n^3)$. Když je složitost exponenciální, např. $\mathcal{O}(2^n)$, potom to většinou znamená, že algoritmus je prakticky nepoužitelný pro rozsáhlejší úlohy.

Výpočetní složitost diskrétní Fourerovy transformace

- Nechť W je komplexní číslo, $W \equiv e^{\frac{-2\pi i}{N}}$.

$$F(k) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{\frac{-2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} f(n)$$

- Vektor $f(n)$ se násobí maticí, jejíž prvek (n, k) je komplexní konstantou W umocněnou na $N \cdot k$.

- Výpočet složitost $\mathcal{O}(N^2)$.

Rychlá Fourierova transformace

- Rychlá Fourierova transformace (FFT – fast Fourier transform) je efektivní algoritmus pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace a její inverze.
- Tvrzení: FFT má výpočetní složitost $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.
- Příklad (podle Numerical recepies in C):
  - Uvažujme poslounost $N = 10^6$ a hypotetický počítač s 1 μsekundovým cyklem.
  - FFT by spotřebovovala 30 sekund času procesoru.
  - DFT by spotřebovala dva týdny času procesoru, tj. 1.209.600 sekund, což je asi 40.000 $\times$ více.
- Myšlenka FFT (Danielson, Lanczos, 1942): DFT posloupnosti délky N lze vyjádřit jako součet dvou DFT posloupností délky $N/2$, v jedné jsou liché a ve druhé sudé vzorky. Pozn. existují varianty i pro obecné délky N.

FFT, důkaz

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi i k n}{N}} f(n) \\
&= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} e^{\frac{-2\pi i k (2n)}{N}} f(2n) + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} e^{\frac{-2\pi i k (2n+1)}{N}} f(2n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} e^{\frac{-2\pi i k n}{N/2}} f(2n) + W^n \sum_{n=0}^{(N/2)-1} e^{\frac{-2\pi i k n}{N/2}} f(2n+1) \\
&= F^e(k) + W^n F^o(k) \,, \quad k = 1, \ldots, N
\end{aligned}
$$

- Klíčová myšlenka: rekurzivní výpočet a N je mocninou 2.
- Stačí $\log_2 N$ iterací.

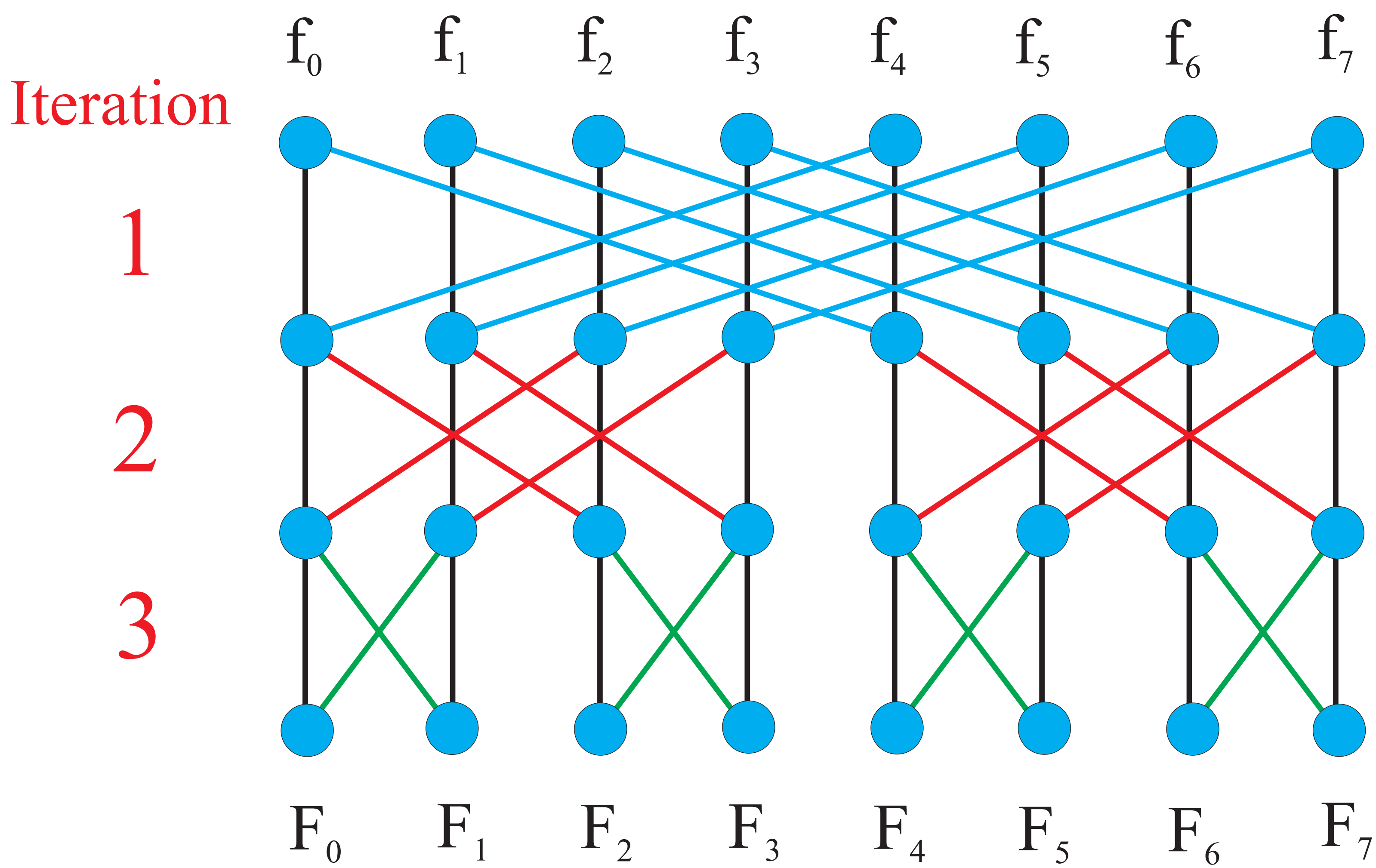
FFT, důkaz (2)

- Posloupnosti (spektra) $F^e(k)$ (sudé) a $F^o(k)$ (liché) jsou peridické podle k a mají délku $N/2$.
- Co je výsledkem Fourierovy transformace posloupnosti délky 1? Identita.
- Pro každou poslounost $\log_2 N$ e-éček a o-óček existuje jednobodové transformace, které využijí právě jednu hodnotu ze vstupní posloupnosti,

$$F^{eoeeoeo\ldots oee}(k) = f(n) \quad \text{pro některá } n \ .$$

- Dalším trikem je znovuvyužití částečných výsledků $\Longrightarrow$ motýlkové schéma výpočtu.

FFT motýlkové schéma výpočtu



2D Fourierova transformace

Myšlenka. Obrazová funkce $f(x, y)$ se rozloží na lineární kombinaci harmonických (sínusovek, kosínusovek, obecněji ortonormálních) funkcí.

Definice přímé transformace. u, v jsou prostorové frekvence.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-2\pi i (xu + yv)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

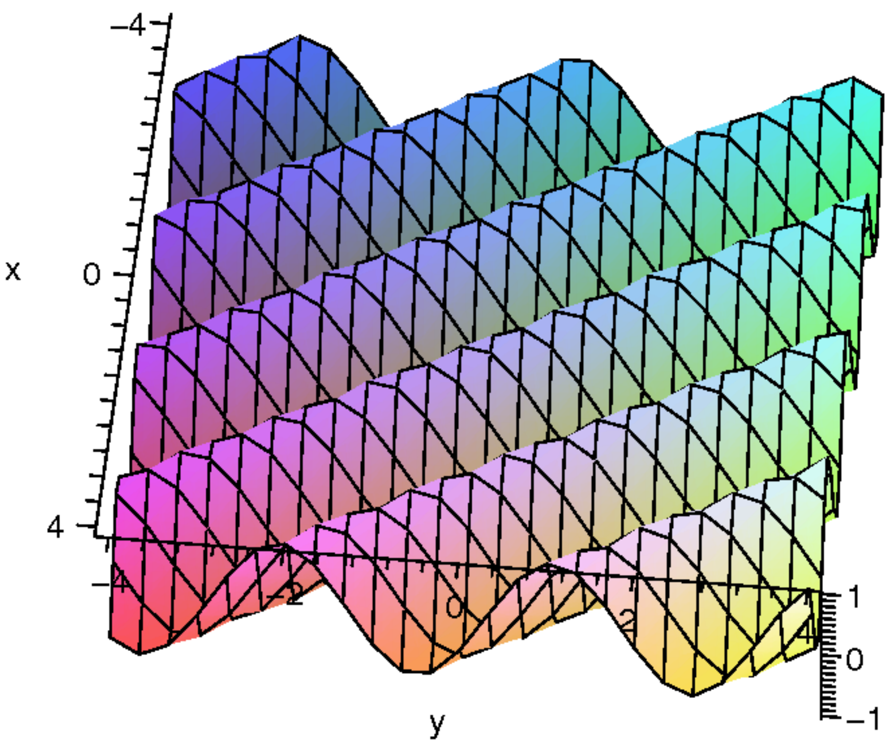
Inverzní Fourierova transformace

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\, e^{2\pi i(xu+yv)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

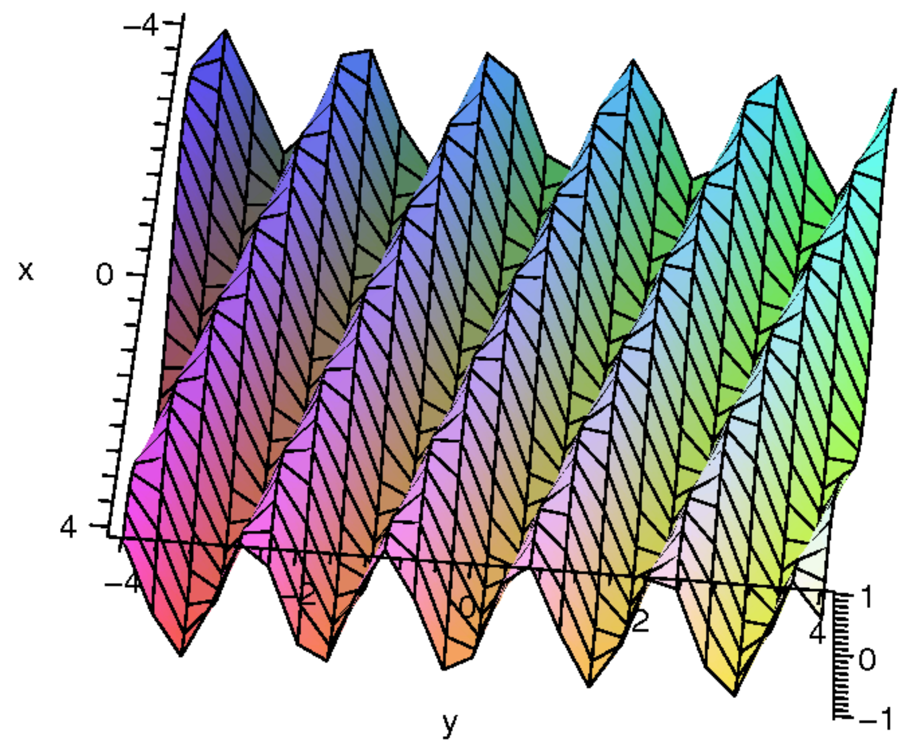
- $f(x,y)$ je lineární kombinací jednoduchých harmonických složek $e^{2\pi i(xu+uv)}$.
- Díky Eulerovu vztahu ($e^{iz} = \cos z + i \sin z$) jsou reálnými složkami $\cos$ a imaginárními $\sin$.
- Funkce $F(u,v)$ (komplexní spektrum) udává váhy harmonických složek v lineární kombinaci.

Ilustrace, vektory báze

Analogie – vlnitý plech.

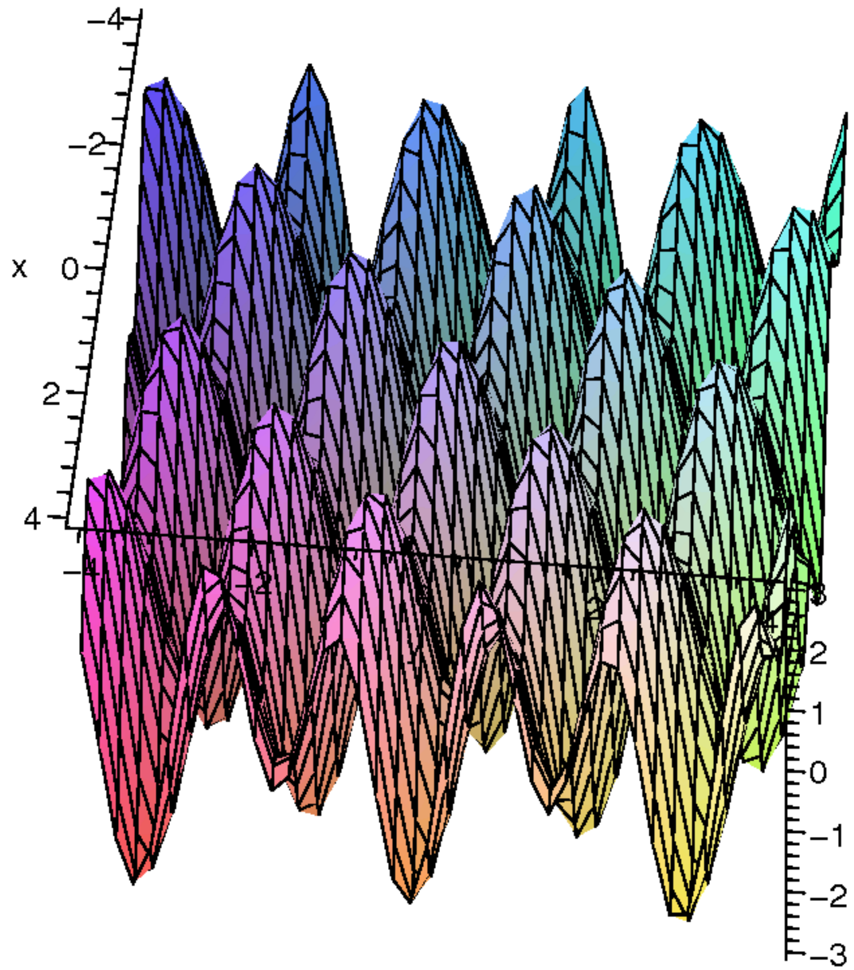


$\sin(3x + 2y)$

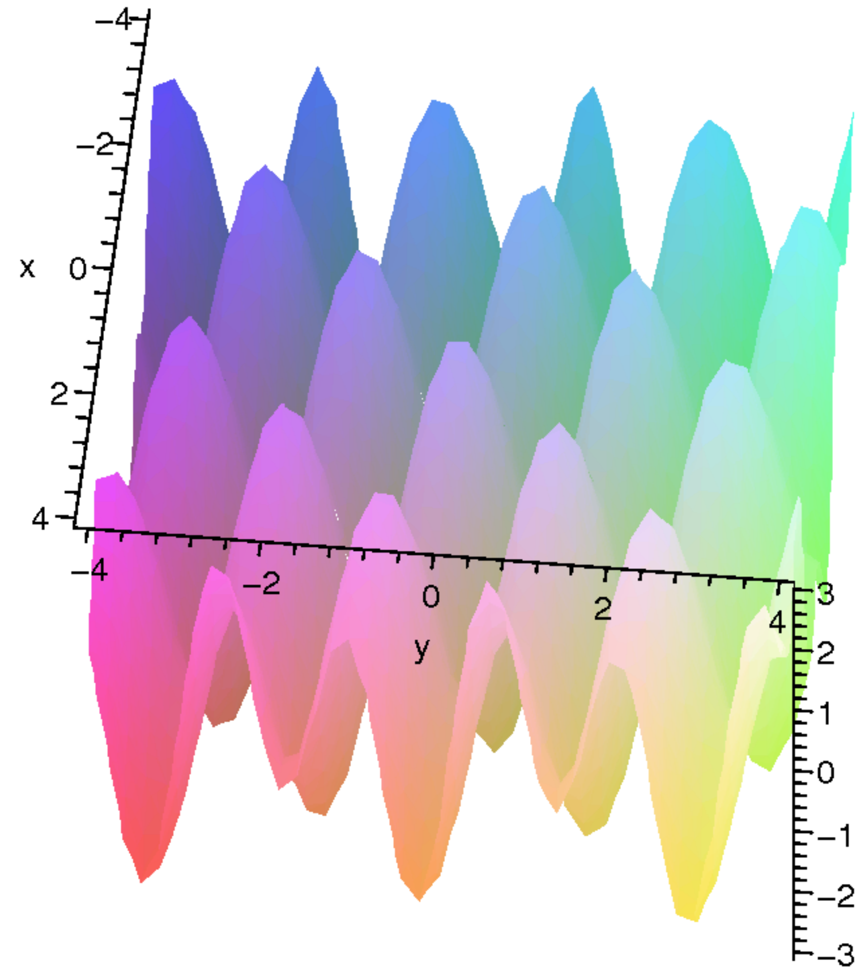


$\cos(x + 4y)$

Lineární kombinace vektorů báze



$\sin(3x+2y) + \cos(x+4y)$



jen jiné zobrazení

2D diskrétní Fourierova transformace

Přímá transformace

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp\left[-2\pi i \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N}\right)\right] ,$$

$$u = 0, 1, \ldots, M-1 , \qquad v = 0, 1, \ldots, N-1 ,$$

Inverzní transformace

$$f(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \exp\left[2\pi i \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N}\right)\right] ,$$

$$m = 0, 1, \ldots, M-1 , \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 .$$

2D Fourierova Tx jako dvojnásobná 1D Fourierova Tx

Vztah pro přímou transformaci lze přepsat na

$$F(u,v) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{-2\pi i n v}{N}\right) f(m,n)\right]\exp\left(\frac{-2\pi i m u}{M}\right) ,$$

$$u = 0,1,\ldots,M-1\,, \qquad v = 0,1,\ldots,N-1\,.$$

- Výraz v hranatých závorkách odpovídá 1D Fourierově transformaci $m -$ tého řádku. Výraz se vypočítá obyčejnou 1D rychlou Fourierovou transformací (FFT).
- Nyní je každý řádek nahrazen Fourierovským spektrem a může se vypočítat 1D diskrétní Fourierovou transformací každého sloupce.

Spektrum prostorových frekvencí

Fourierův obraz $F(u,v)$ je funkcí komplexní proměnné.

(Komplexní) spektrum $F(u,v) = R(u,v) + i\,I(u,v)$

Amplitudové spektrum $|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$

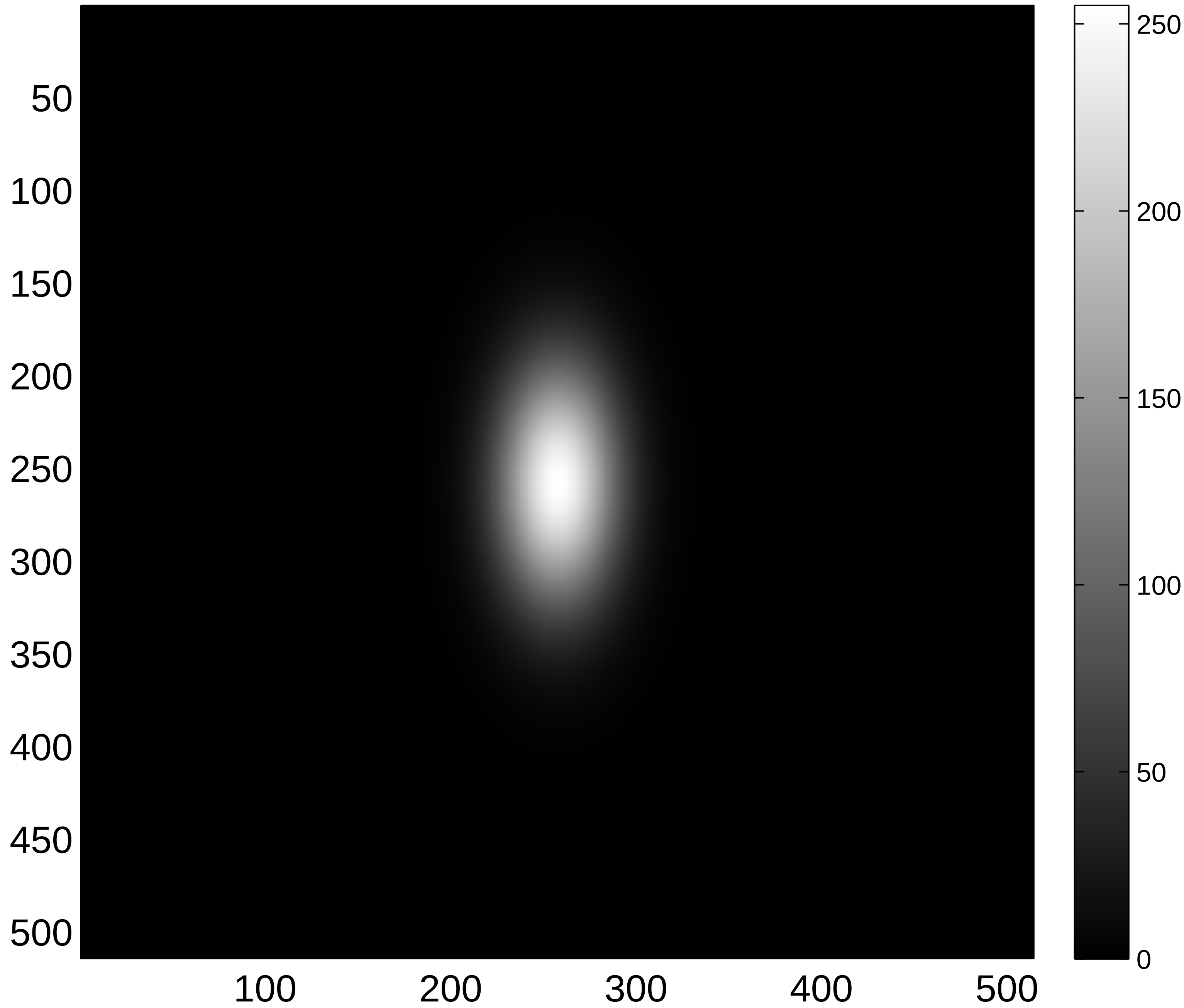
Fázové spektrum $\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$

Výkonové spektrum $P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$

Zobrazování spekter, příklad 2D Gaussiánu

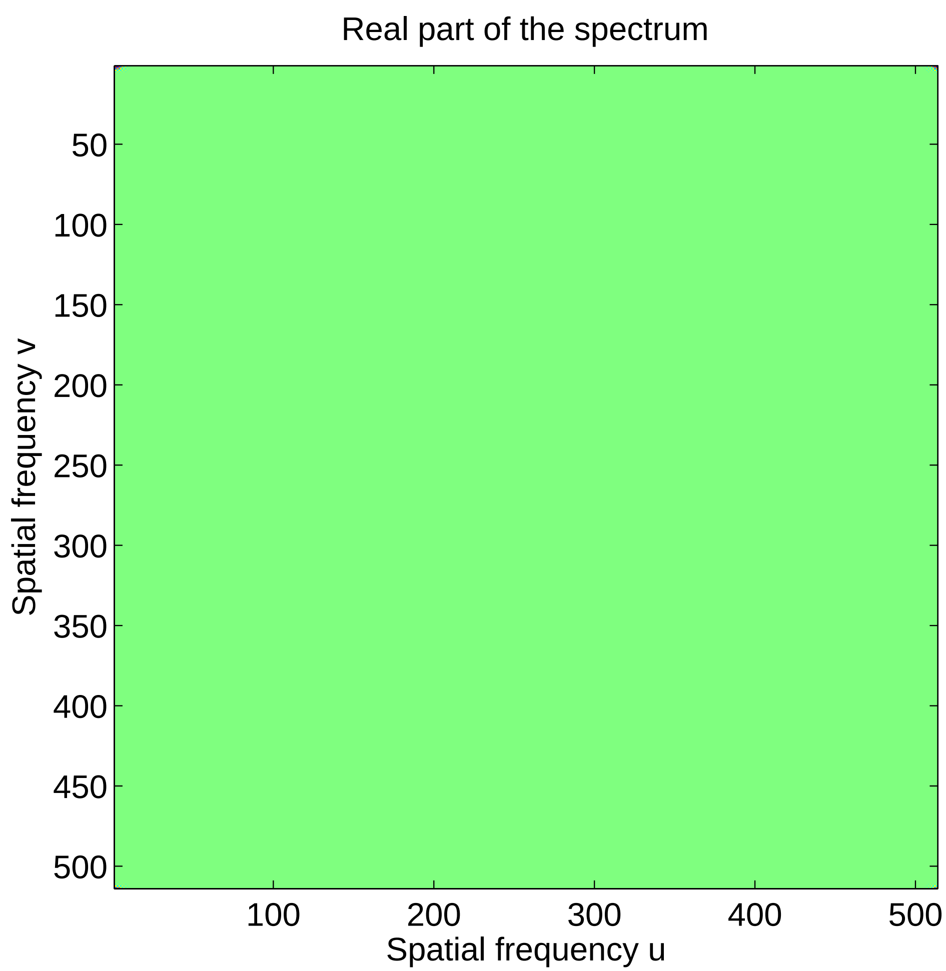
Gaussián je pro ilustraci vybrán, protože má díky prinicipu nejistoty hladké spektrum.

Vstupní intenzitní obrázek, souřadná soustava

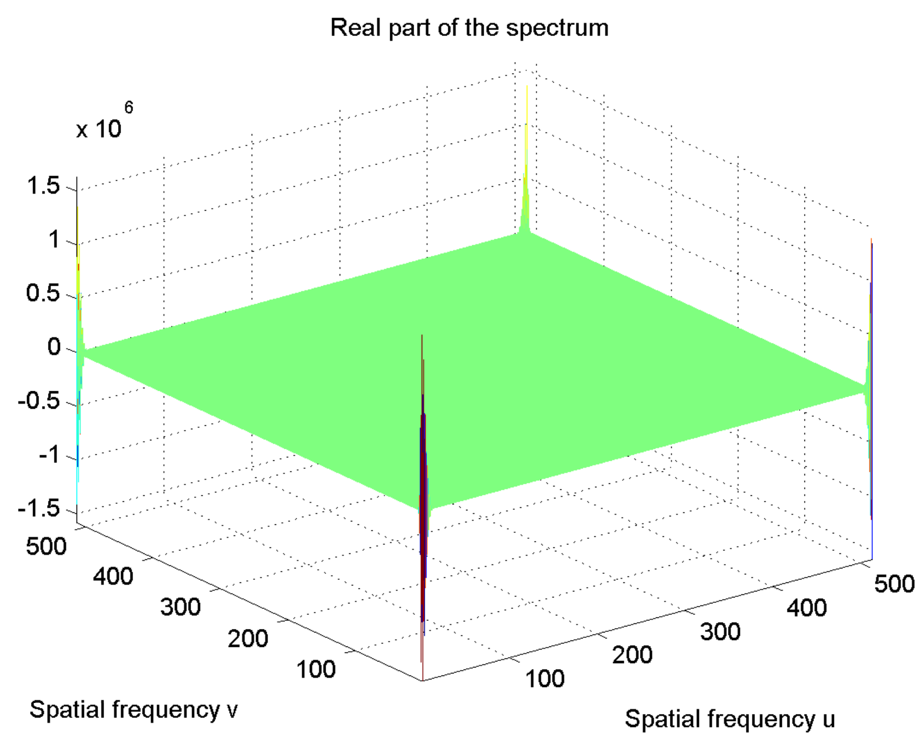


Reálná složka spektra jako obrázek a povrch

Problém při souřadné soustavě vztažené k obrázku: zajímavé části spektra jsou v rozích a rozděleny na čtvrtiny. Díky periodicitě lze libovolně posunout.

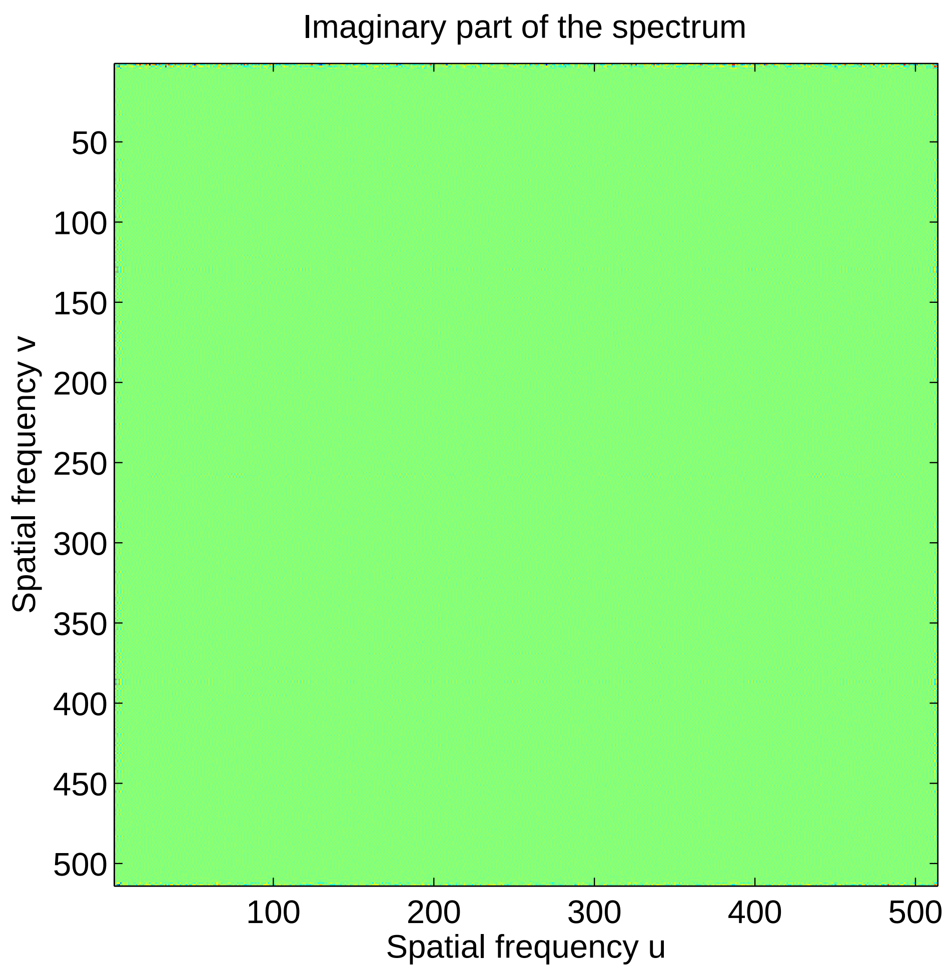


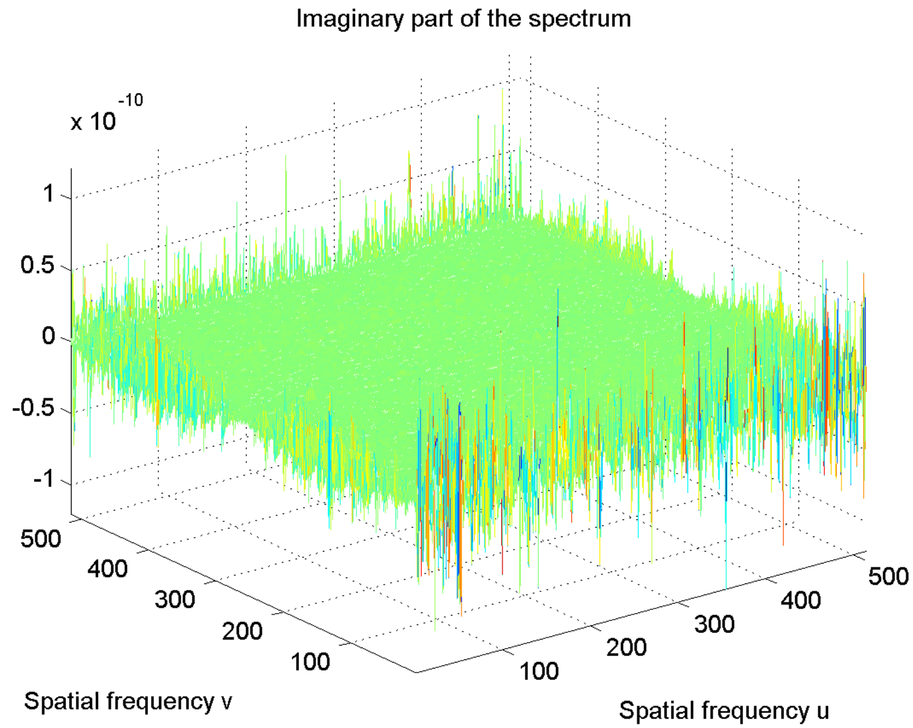
reálná část, obrázek



reálná část, povrch

Imaginární složka spektra jako obrázek a povrch

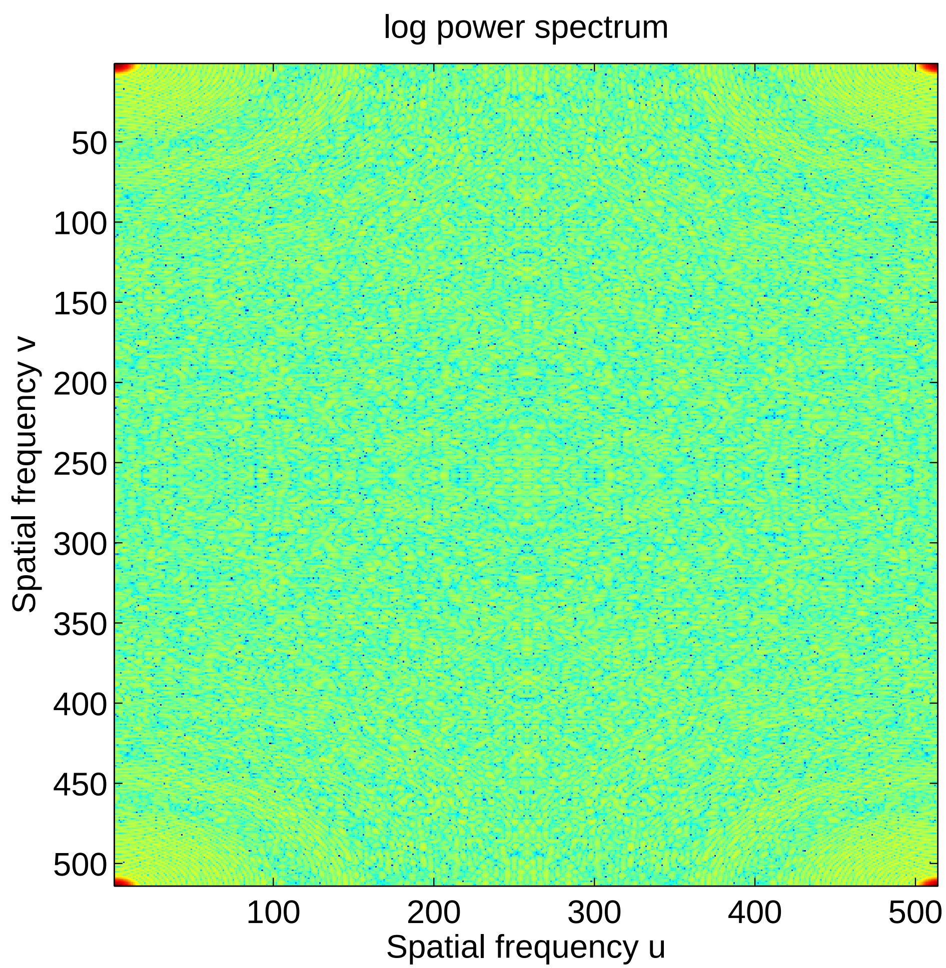


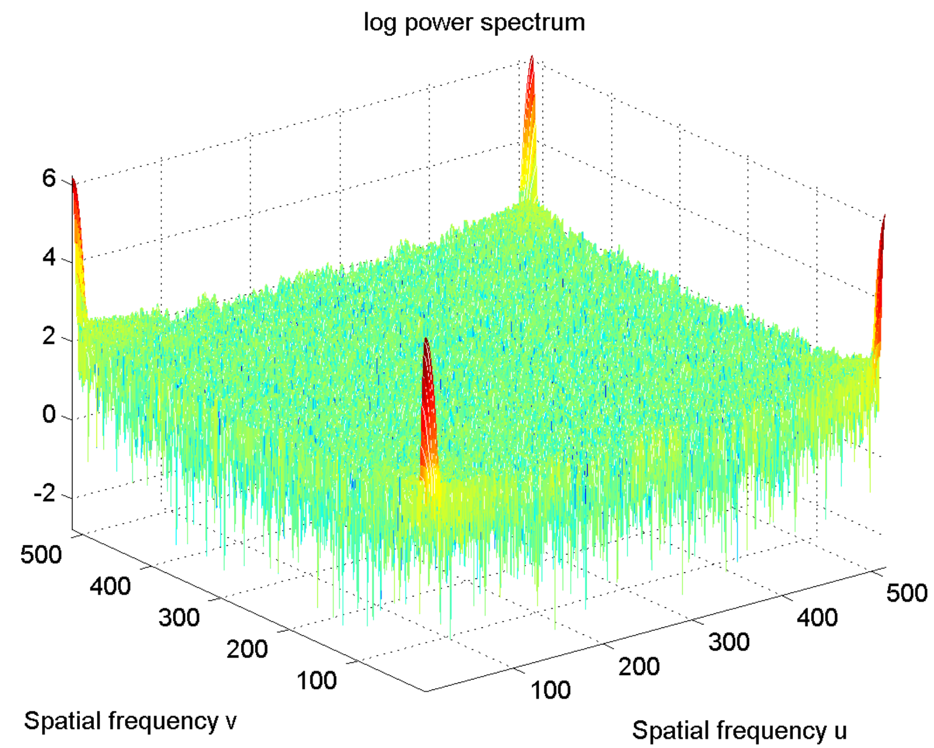


imaginární část, obrázek

imaginární část, povrch

Log výkonového spektra jako obrázek a povrch



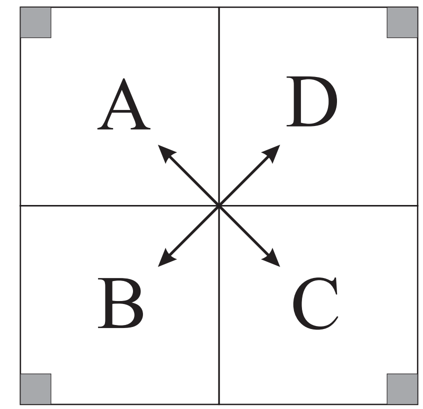


obrázek

povrch

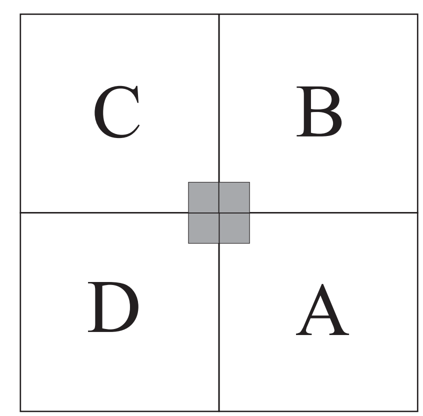
Centrovaná spektra

- Spektrum je názorné zobrazovat centrovaně, tj. s počátkem souřadnic $(0, 0)$ ve středu spektra. Nadále tak budeme činit.
- Uvažujme výchozí spektrum rozdělené na čtyři kvadranty. Malé šedivé čtverečky odpovídají umístění nízkých frekvencí ve spektru.
- Díky symetriím spektra lze kvadranty jen prohodit podle obou diagonál. Nízké frekvence nyní jsou ve středu obrázku.
- V MATLABu je funkce `fftshift`, která převádí necentrované $\longleftrightarrow$ centrované spektrum přehozením kvadrantů podle obou diagonál.



Výchozí spektrum

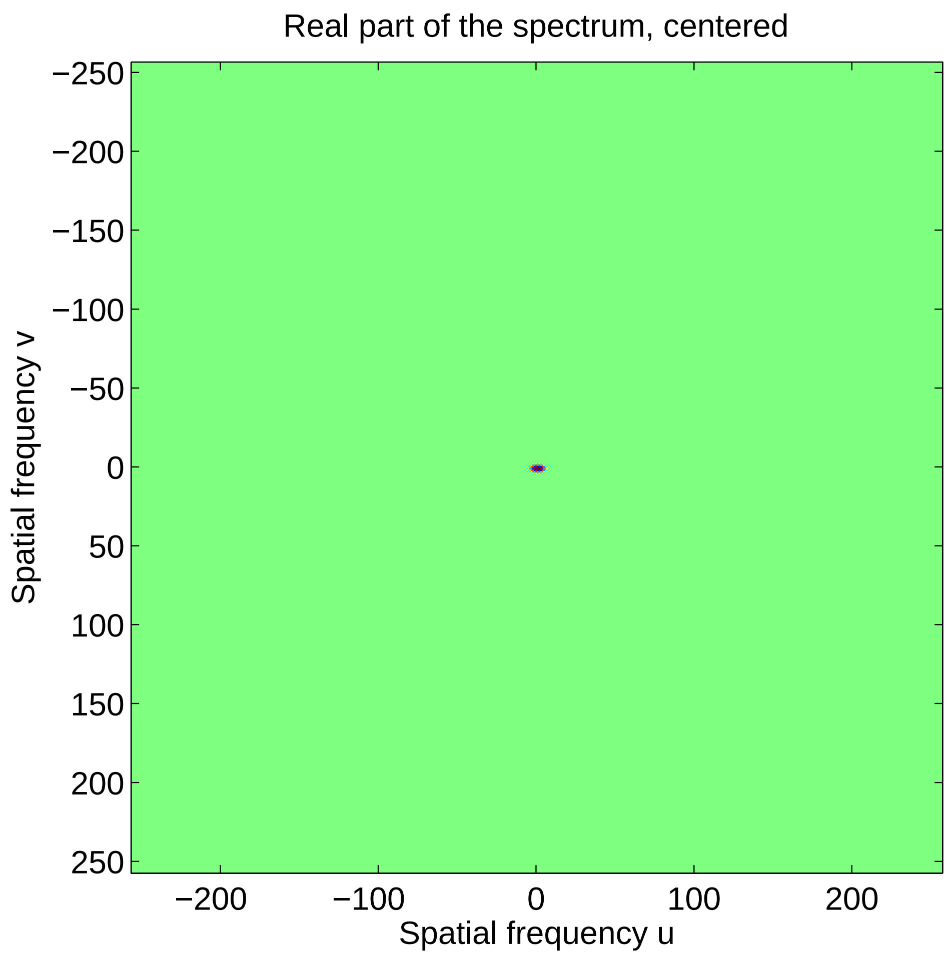
nízké frekvence jsou v rozích



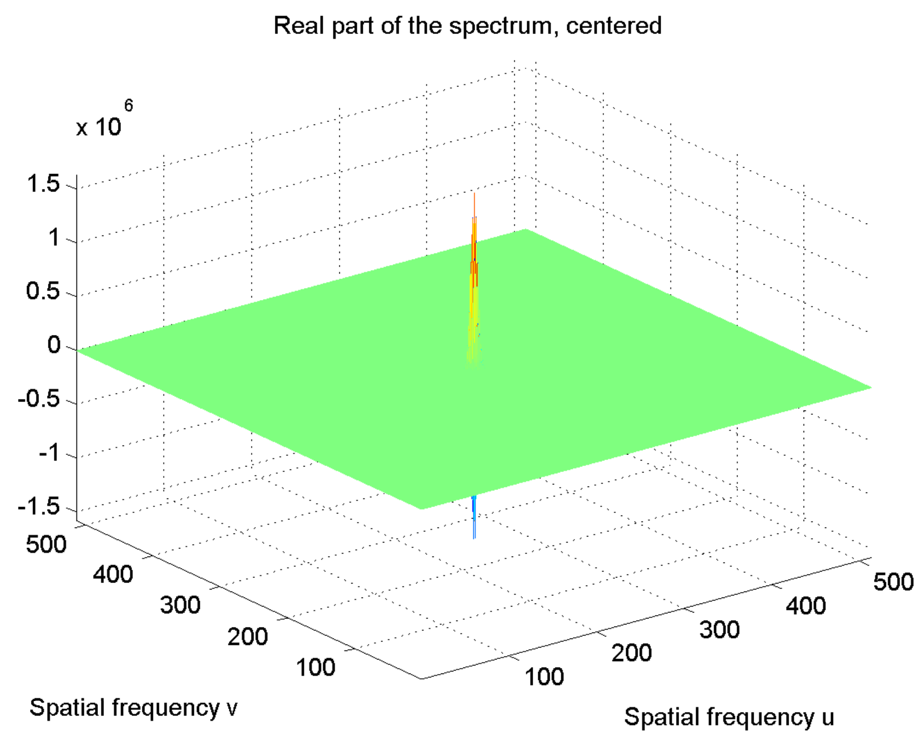
centrované spektrum

s počátkem v $(0, 0)$

Reálná složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

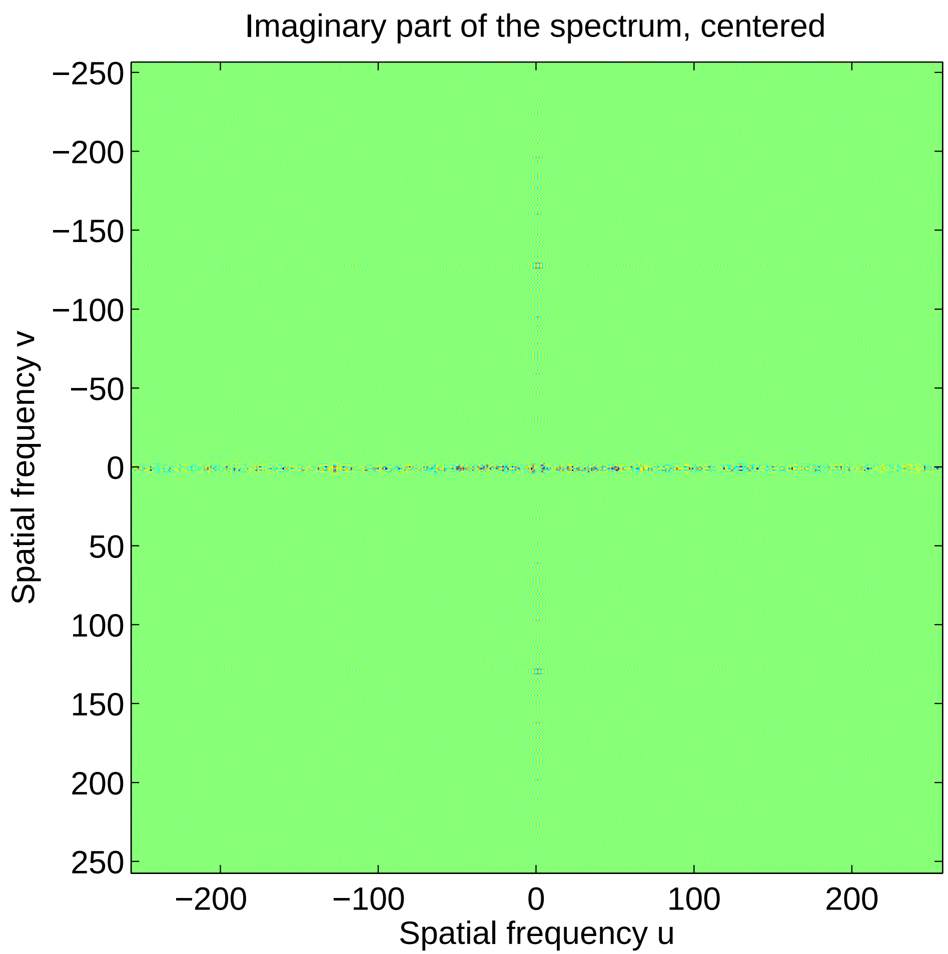


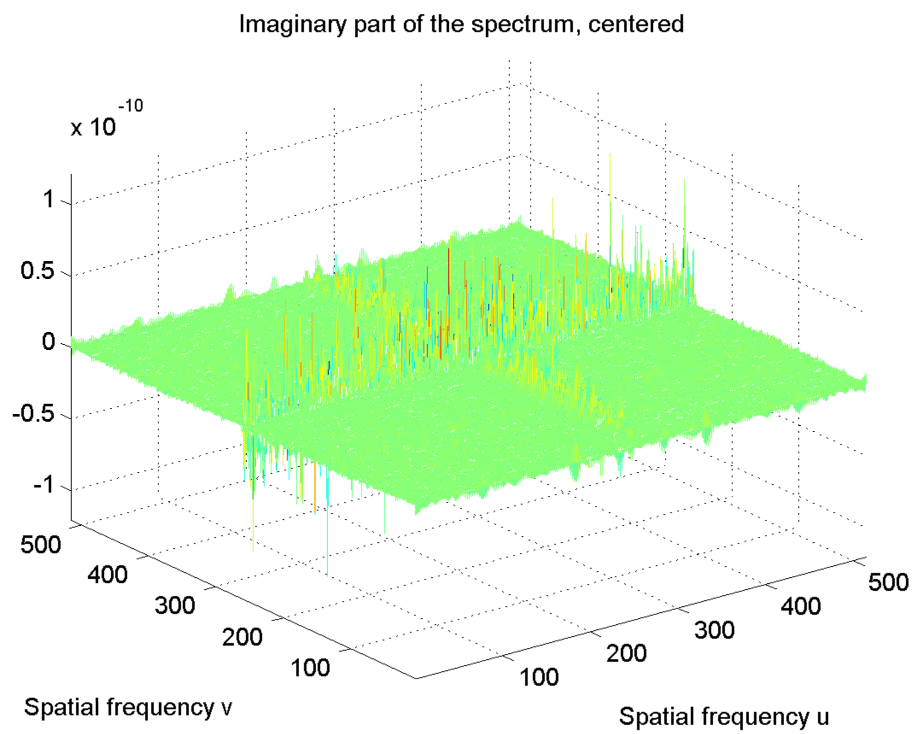
reálná část, obrázek



reálná část, povrch

Imaginární složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

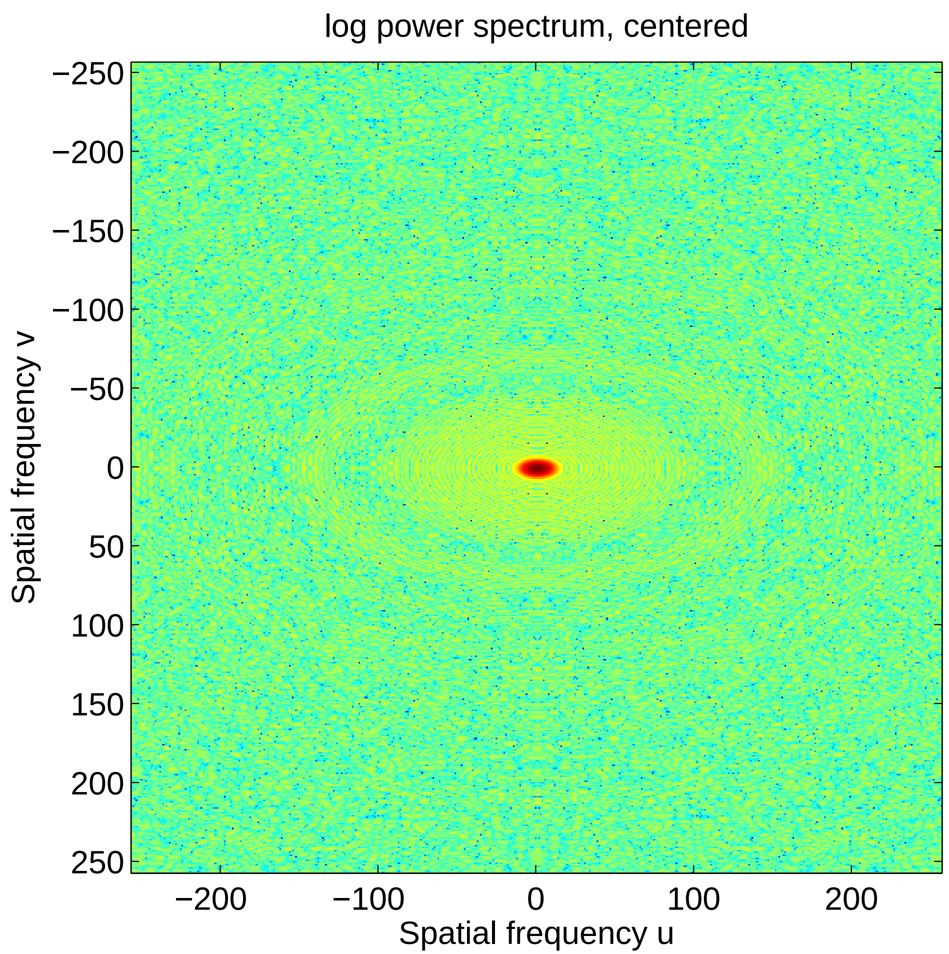




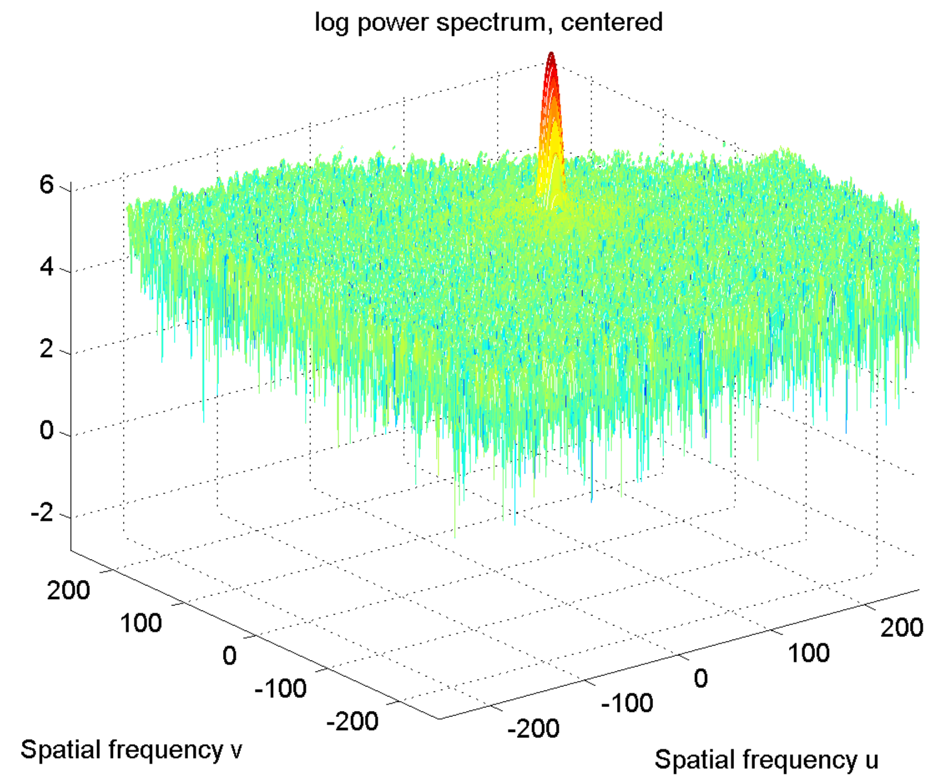
imaginární část, obrázek

imaginární část, povrch

Log centrovaného výkonového spektra jako obrázek a povrch

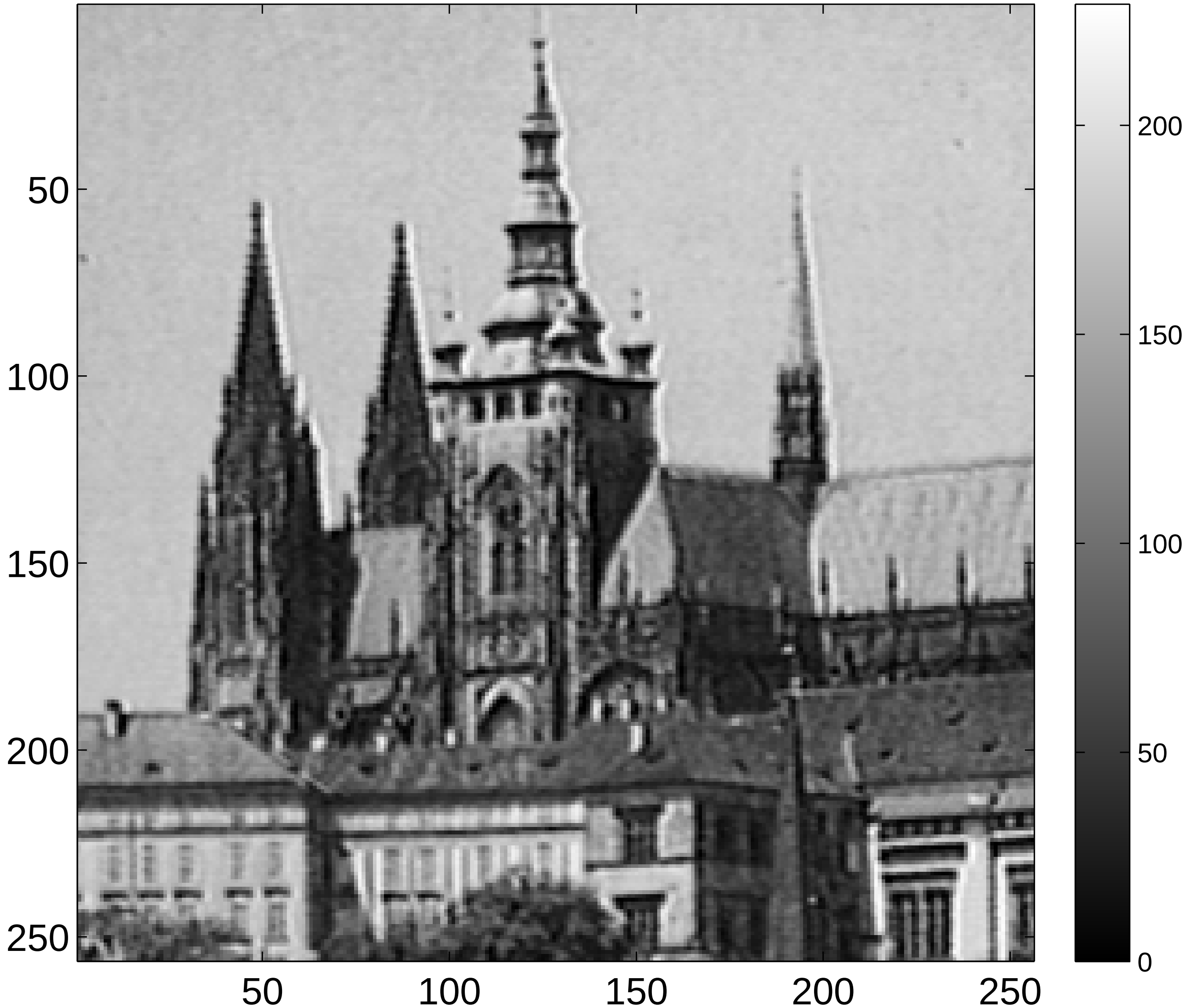


obrázek

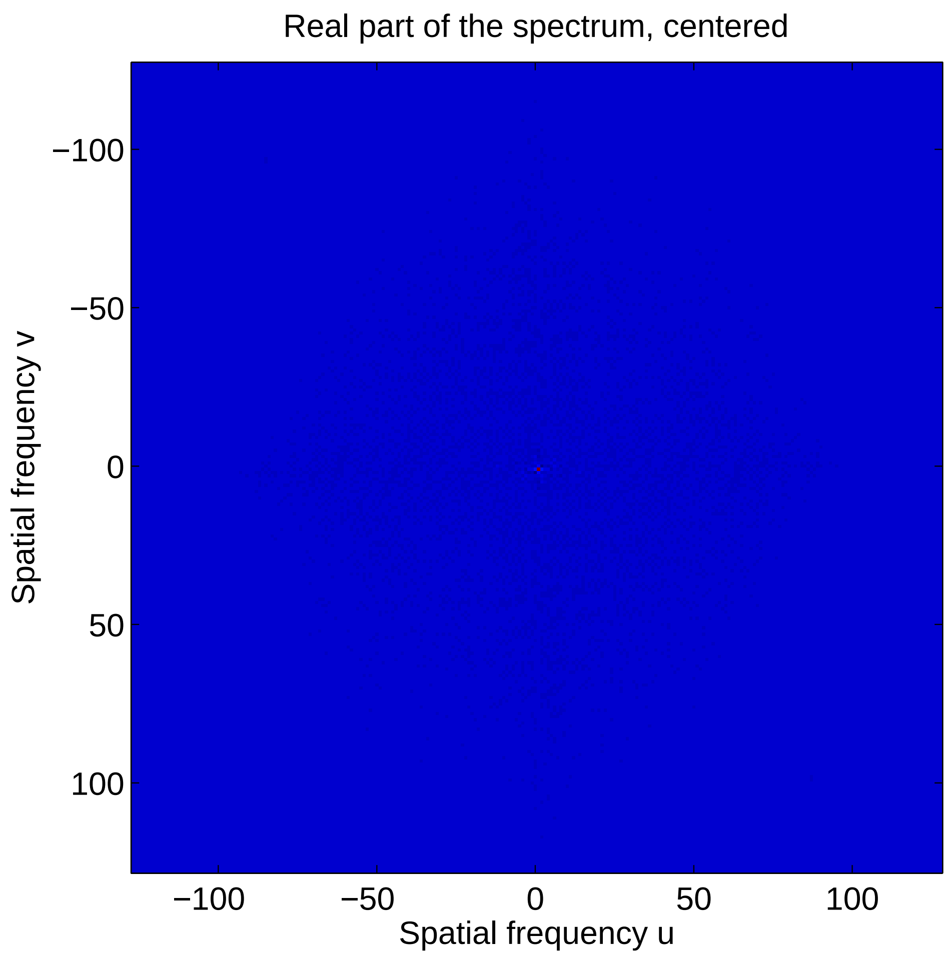


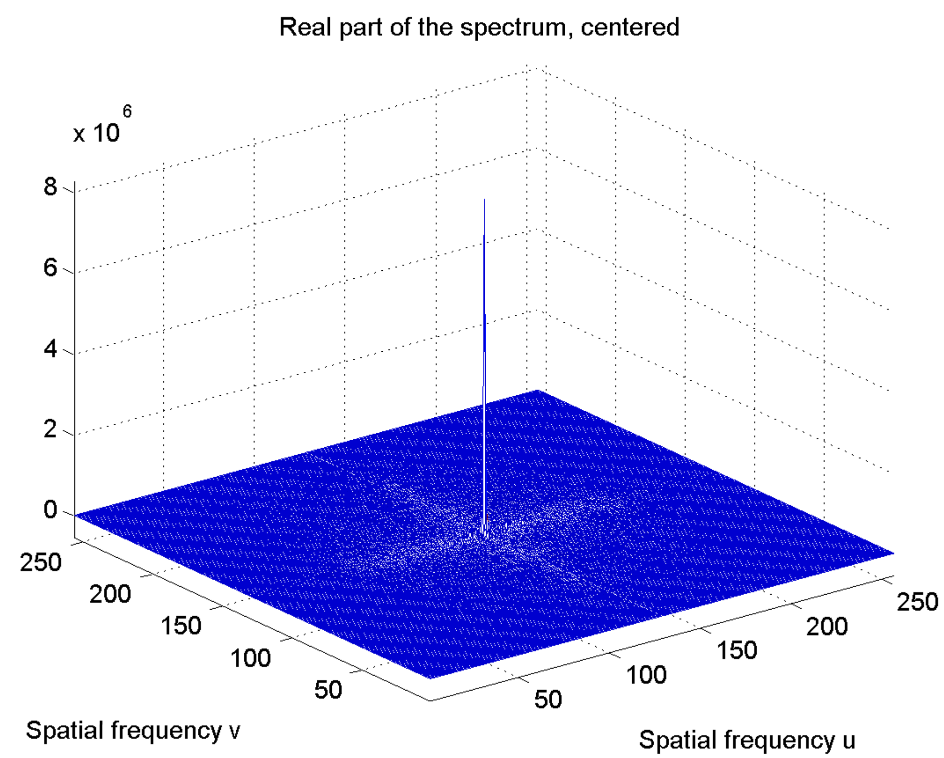
povrch

Příklad Hradčany, výchozí obraz 265×256



Reálná složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

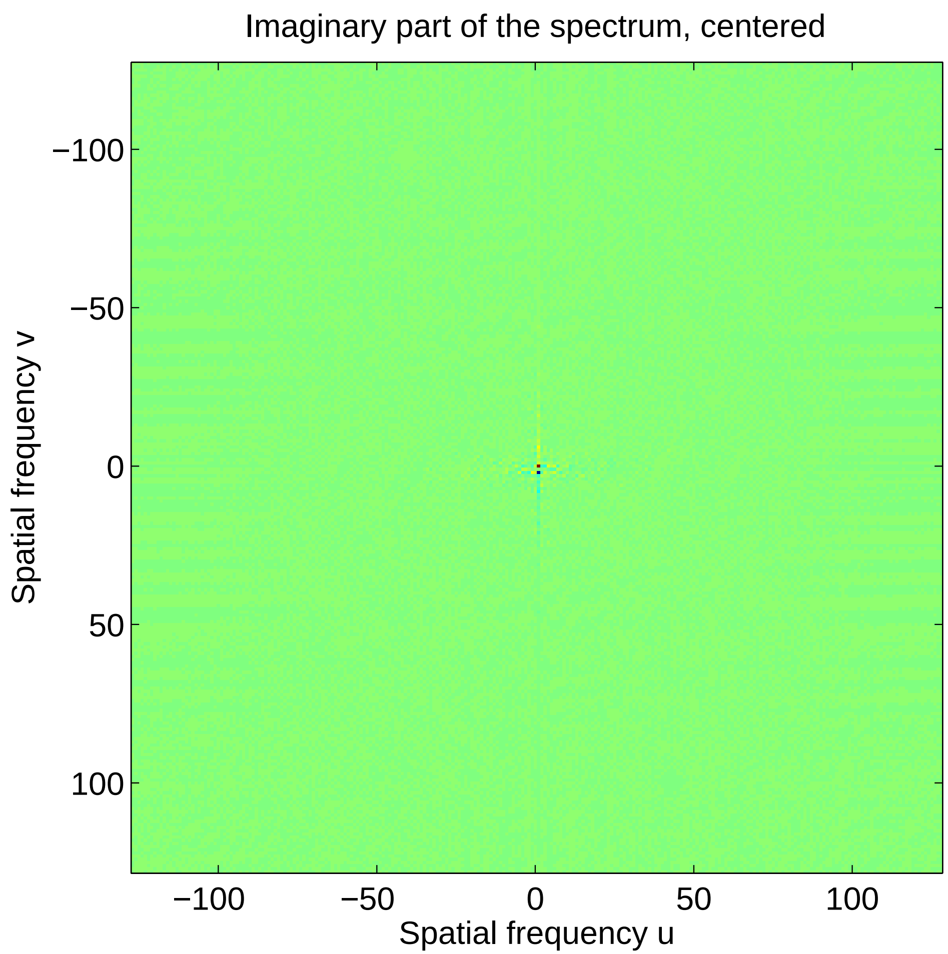




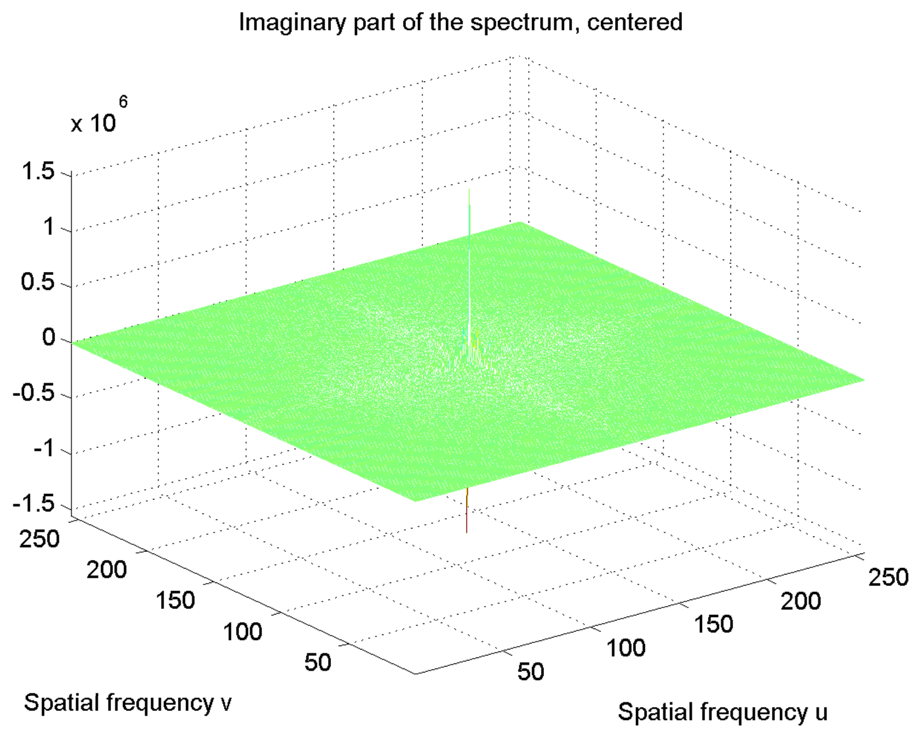
reálná část, obrázek

reálná část, povrch

Imaginární složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

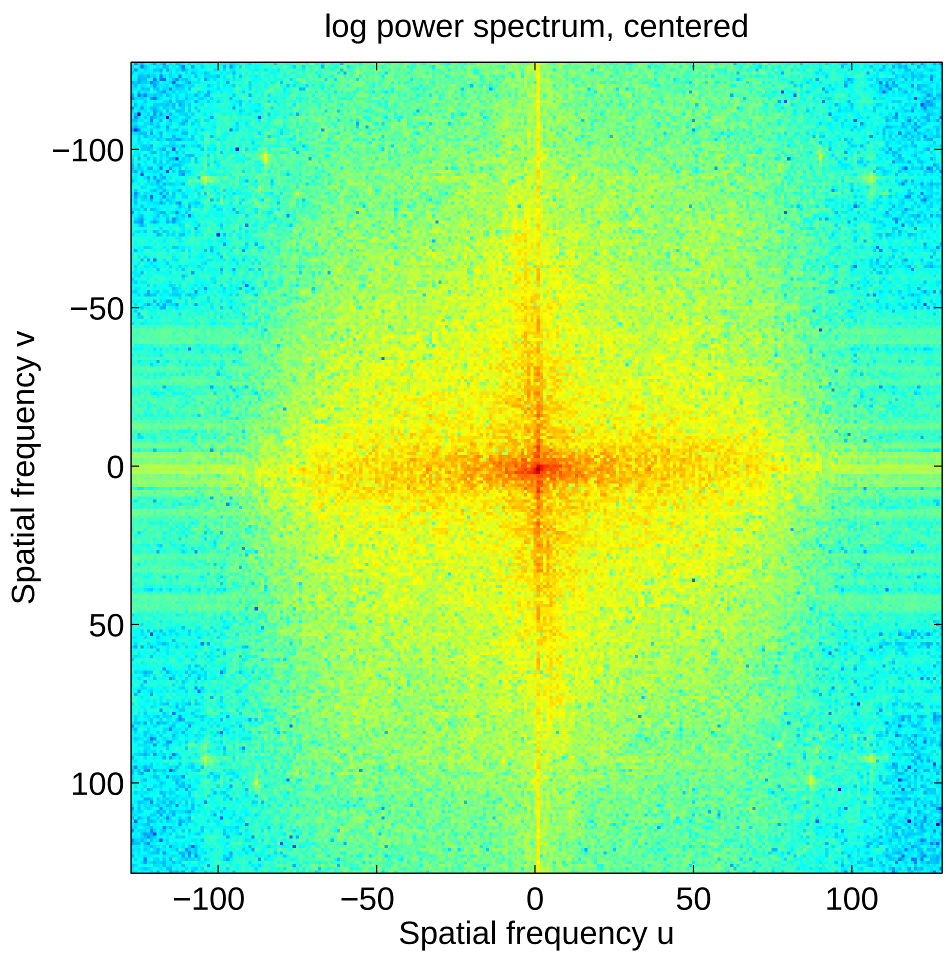


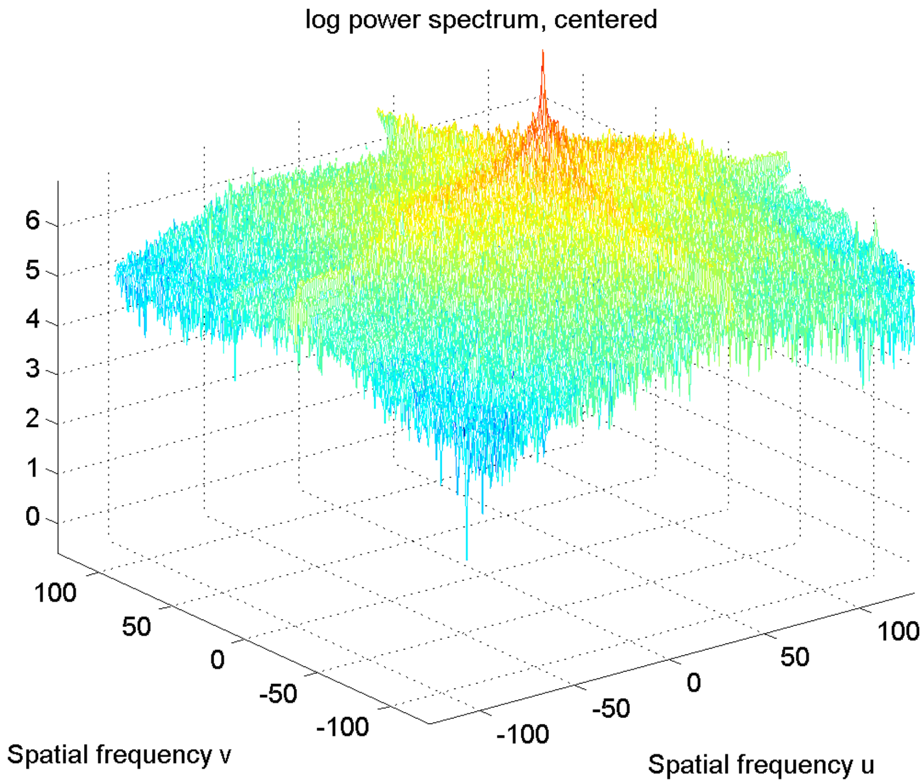
imaginární část, obrázek



imaginární část, povrch

Log centrovaného výkonového spektra jako obrázek a povrch

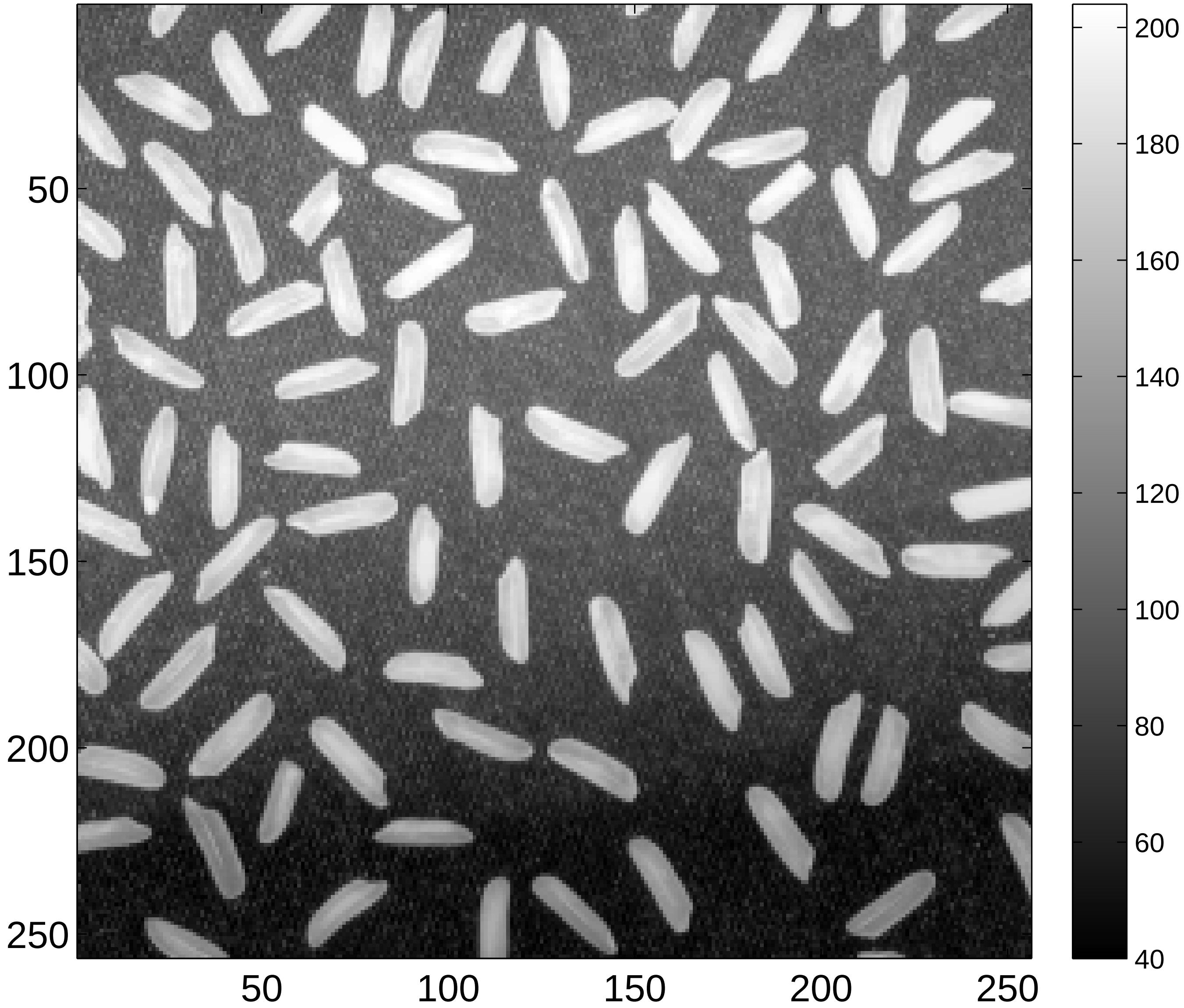




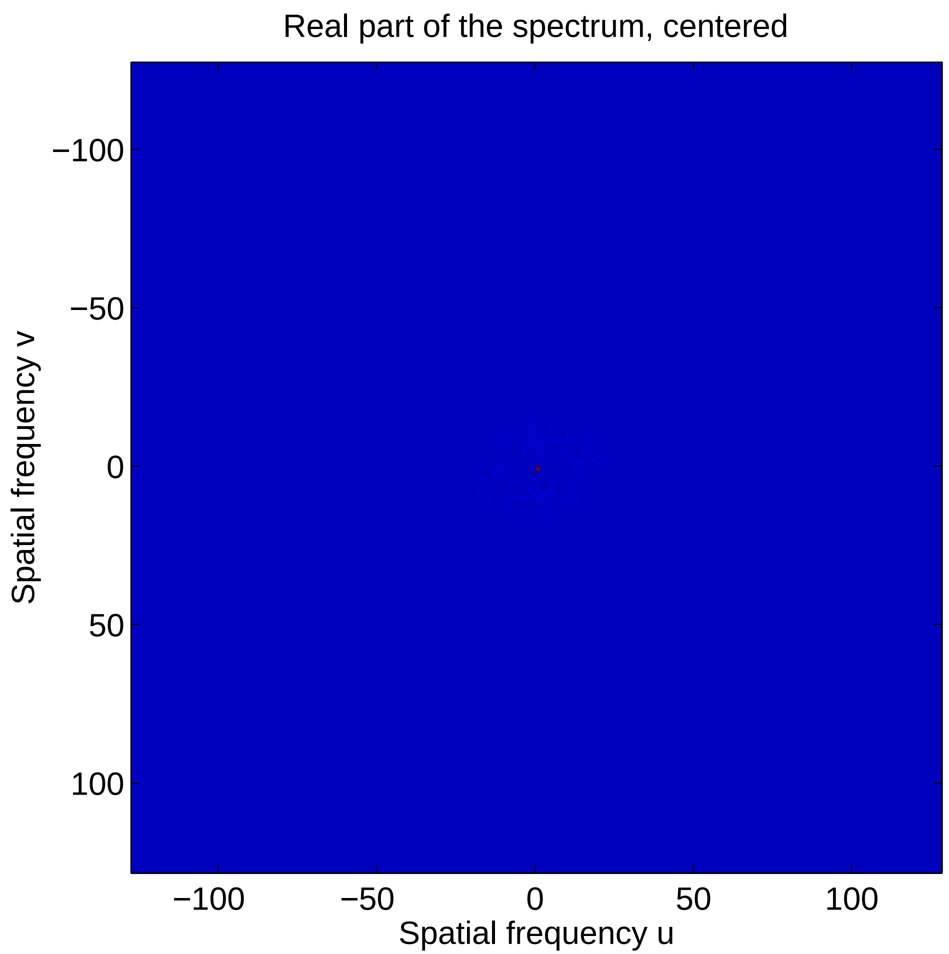
obrázek

povrch

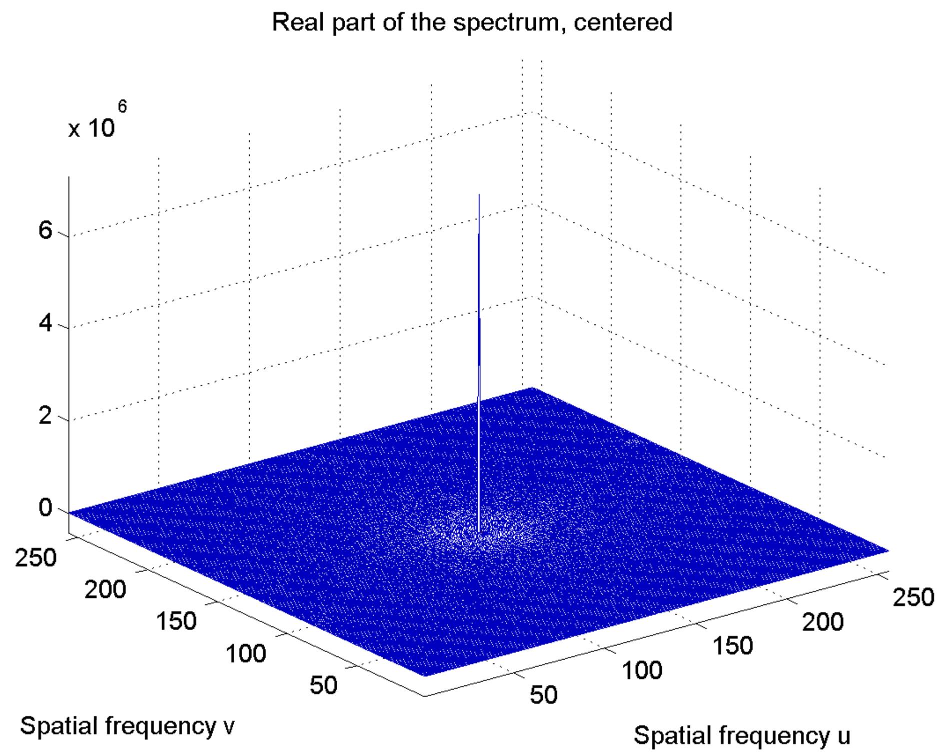
Příklad rýže, výchozí obraz 265×256



Reálná složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

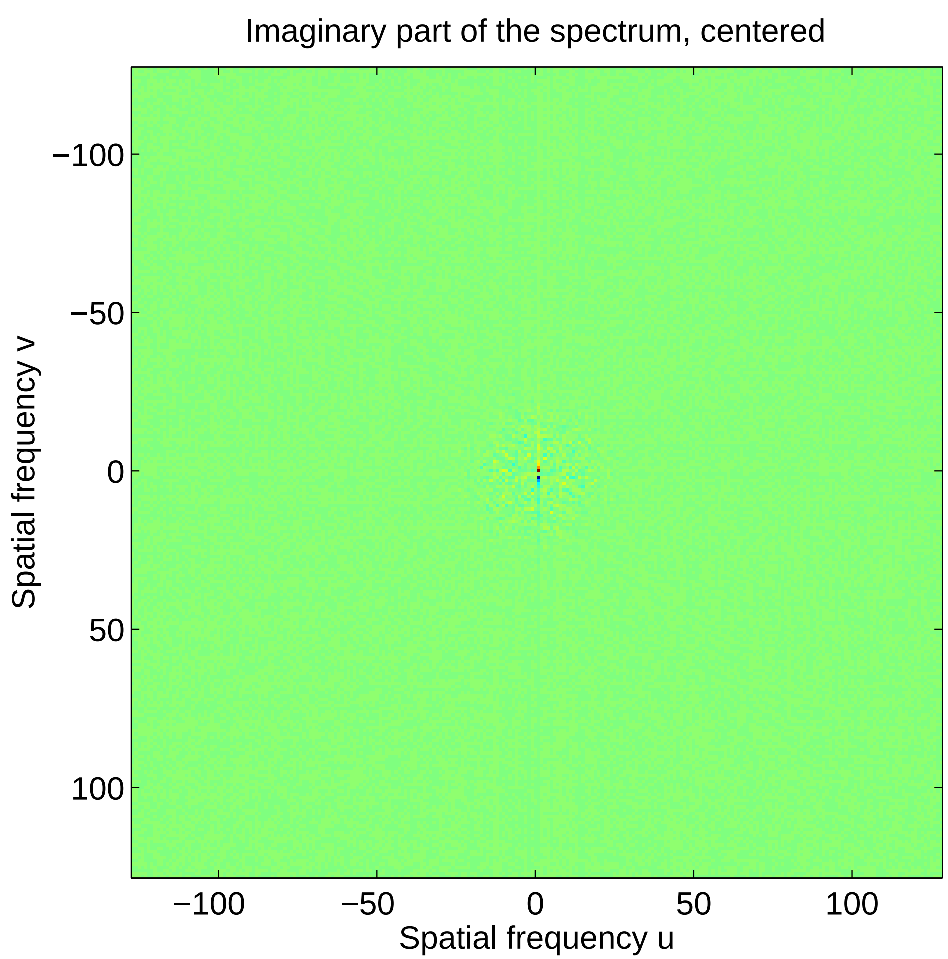


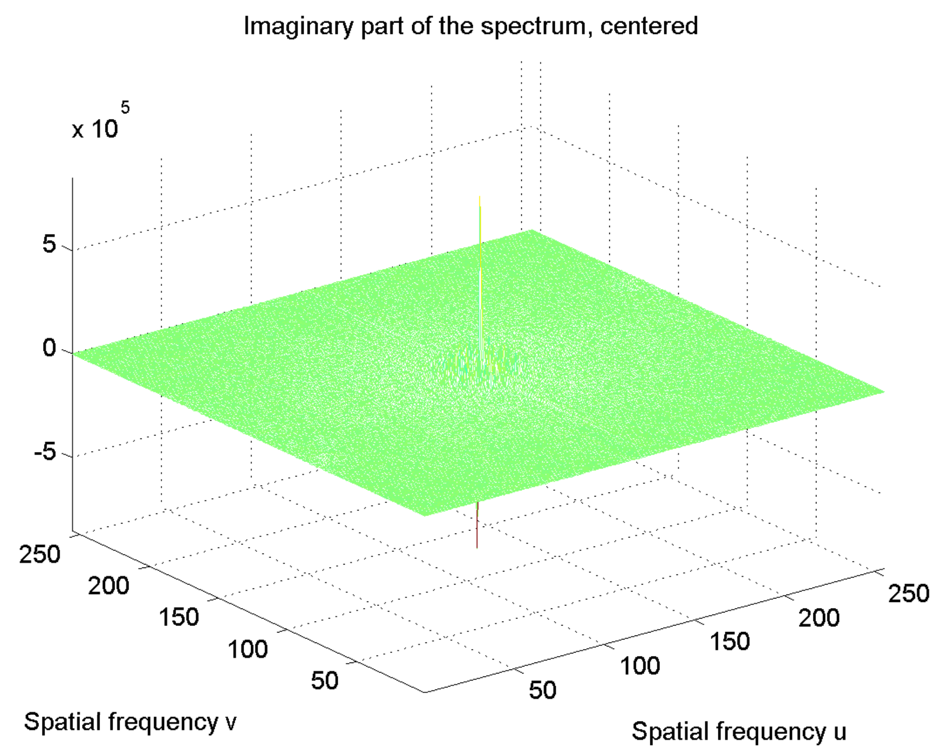
reálná část, obrázek



reálná část, povrch

Imaginární složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

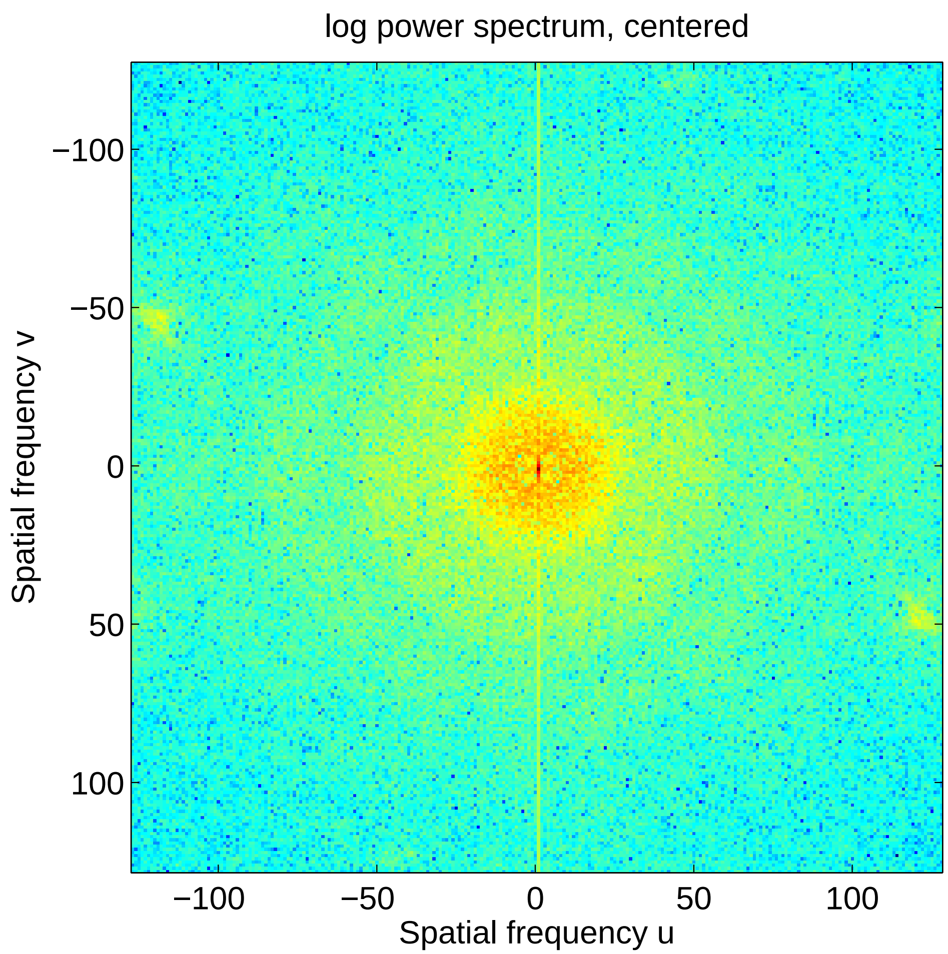




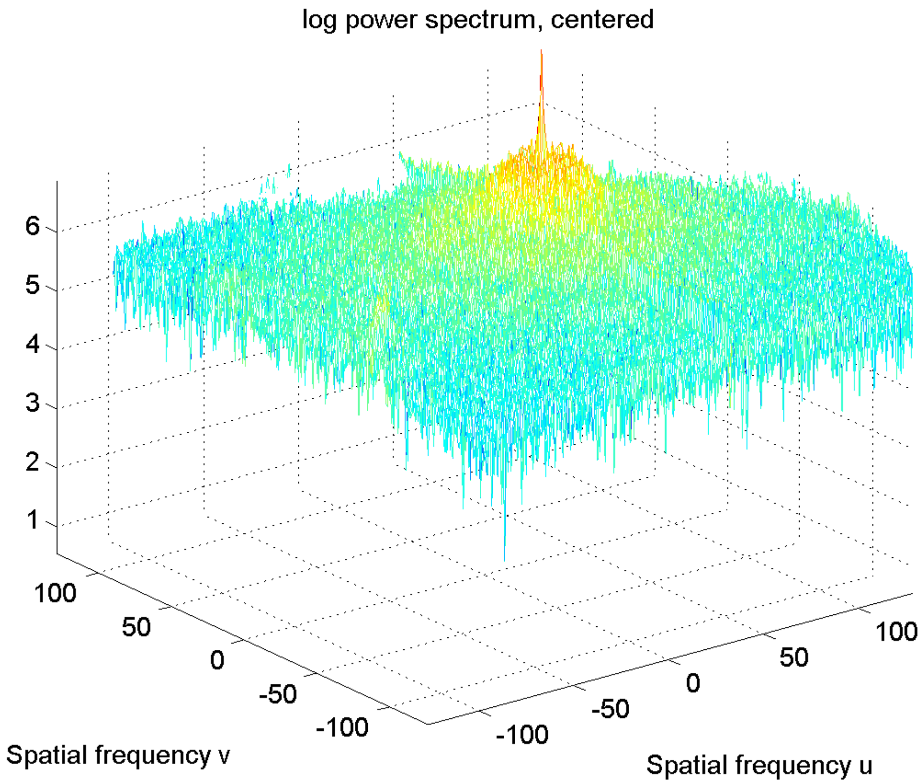
imaginární část, obrázek

imaginární část, povrch

Log centrovaného výkonového spektra jako obrázek a povrch

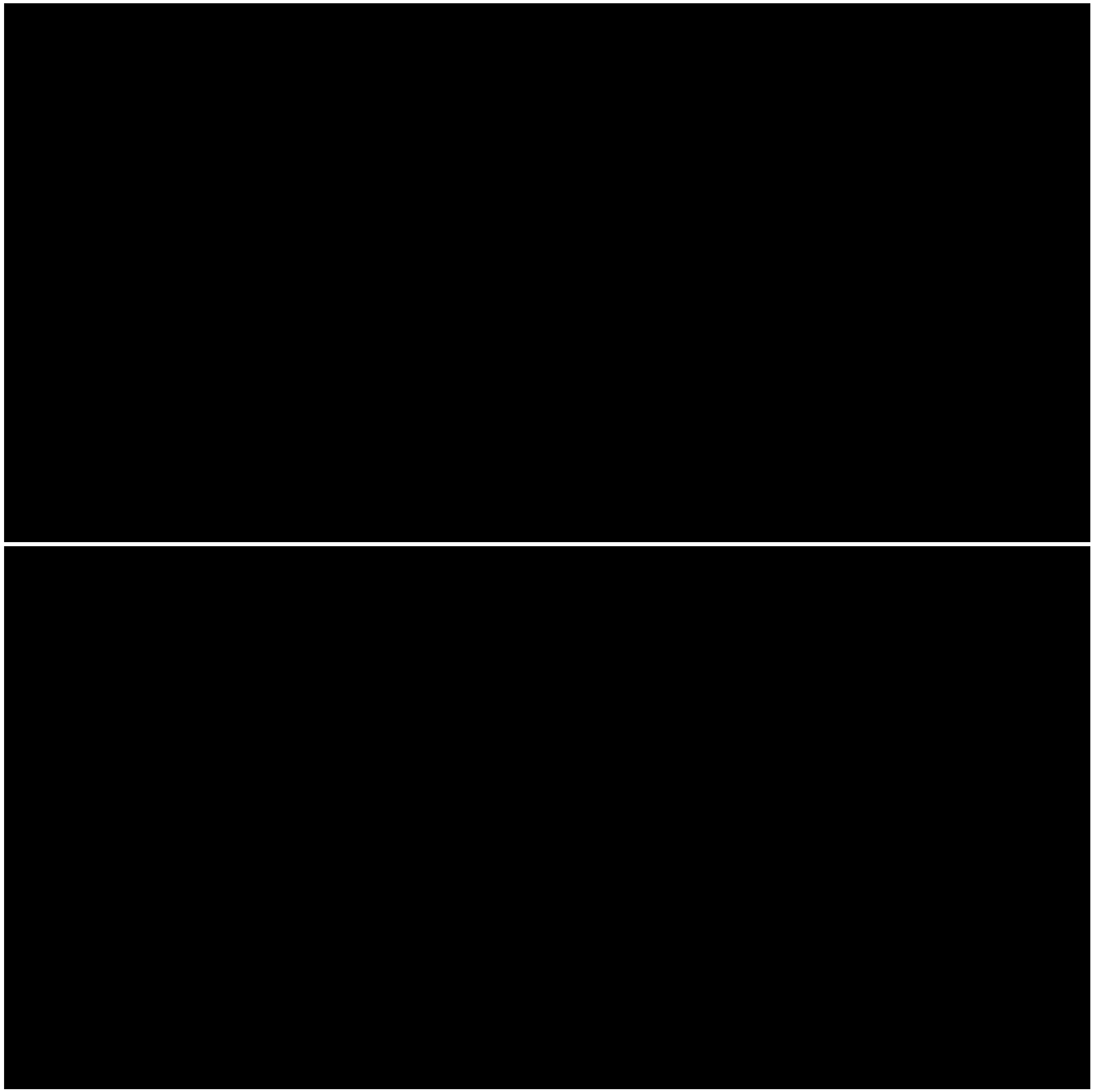


obrázek

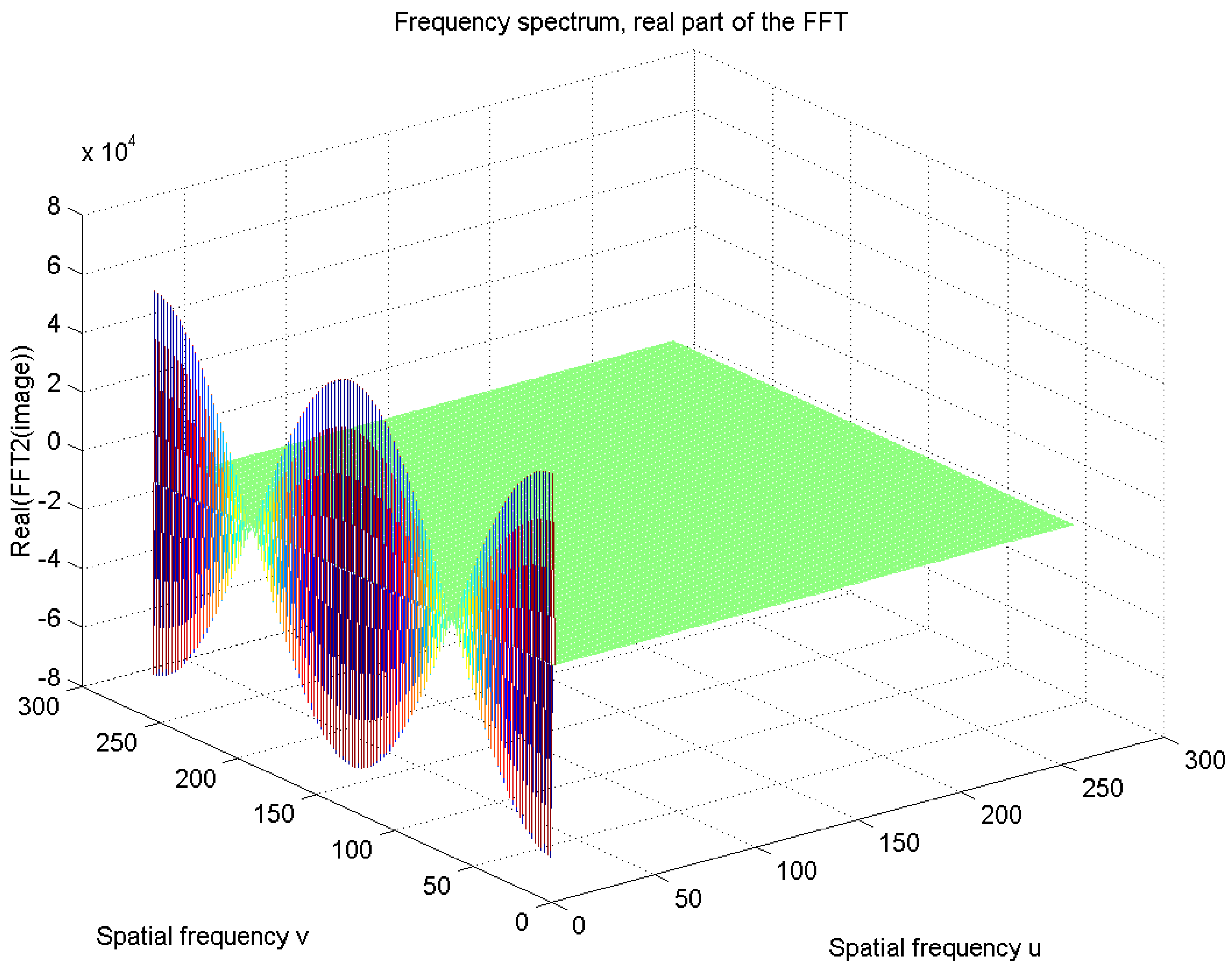


povrch

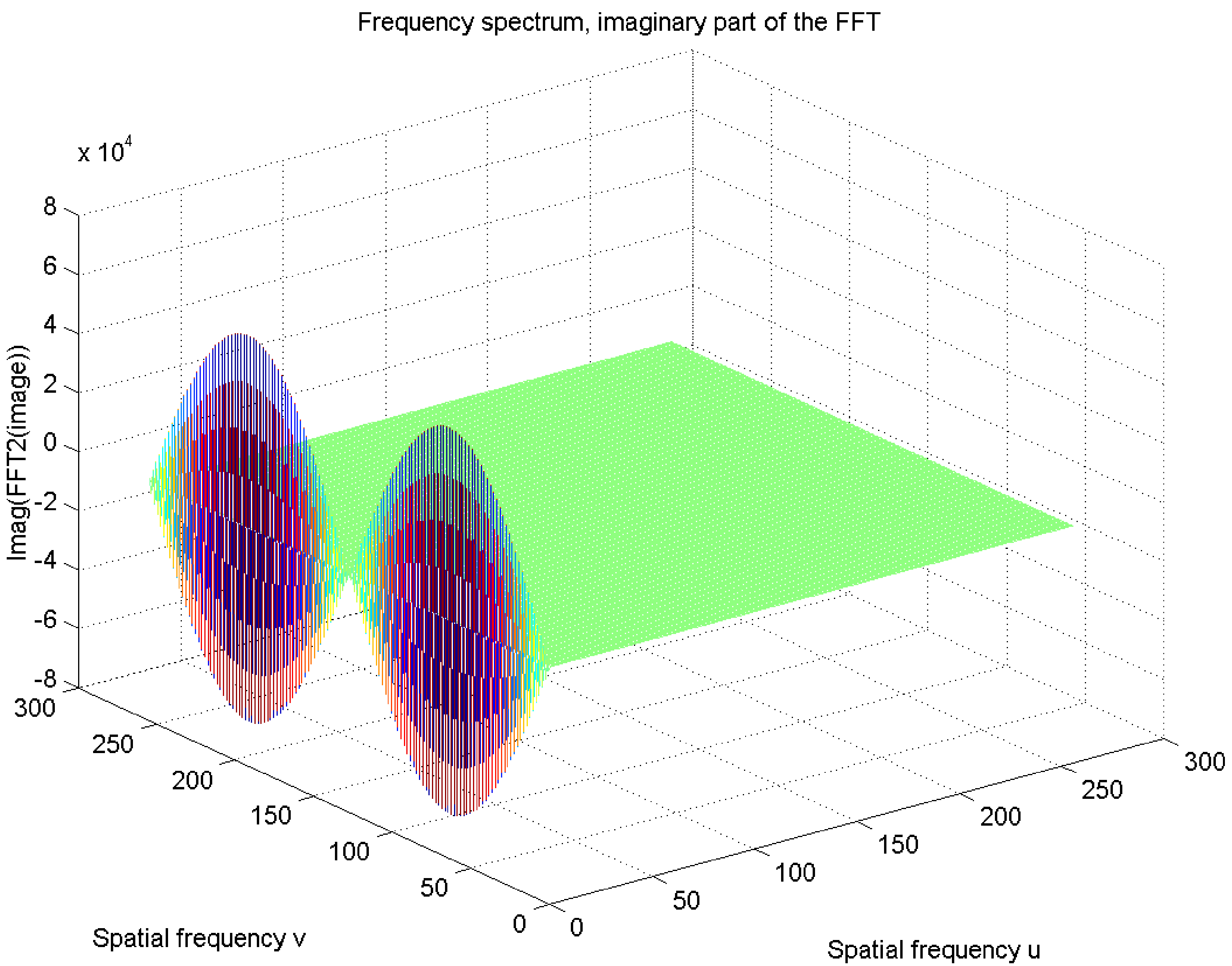
Příklad vodorovná čára, výchozí obraz 265×256



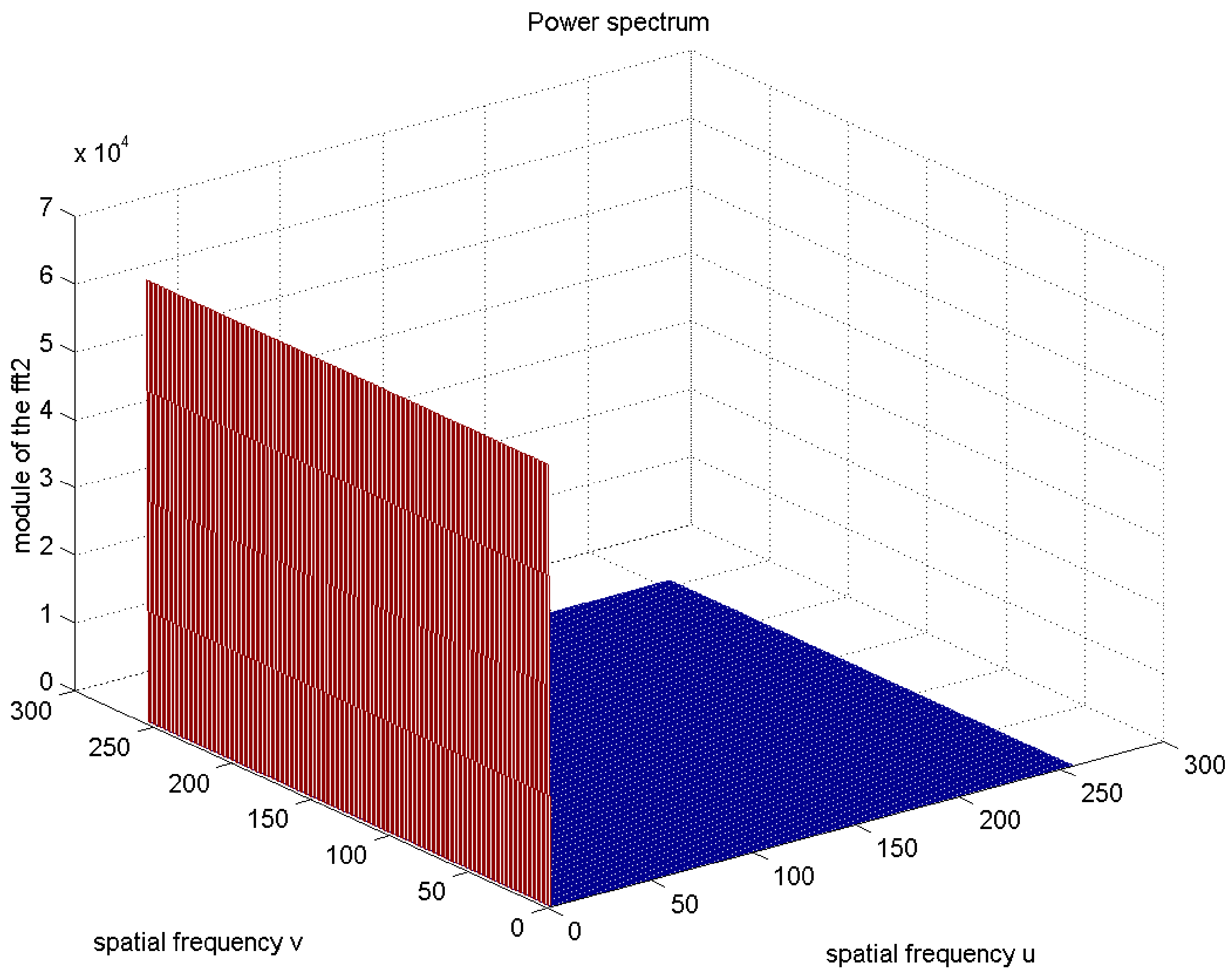
Příklad vodorovná čára, reálná složka spektra



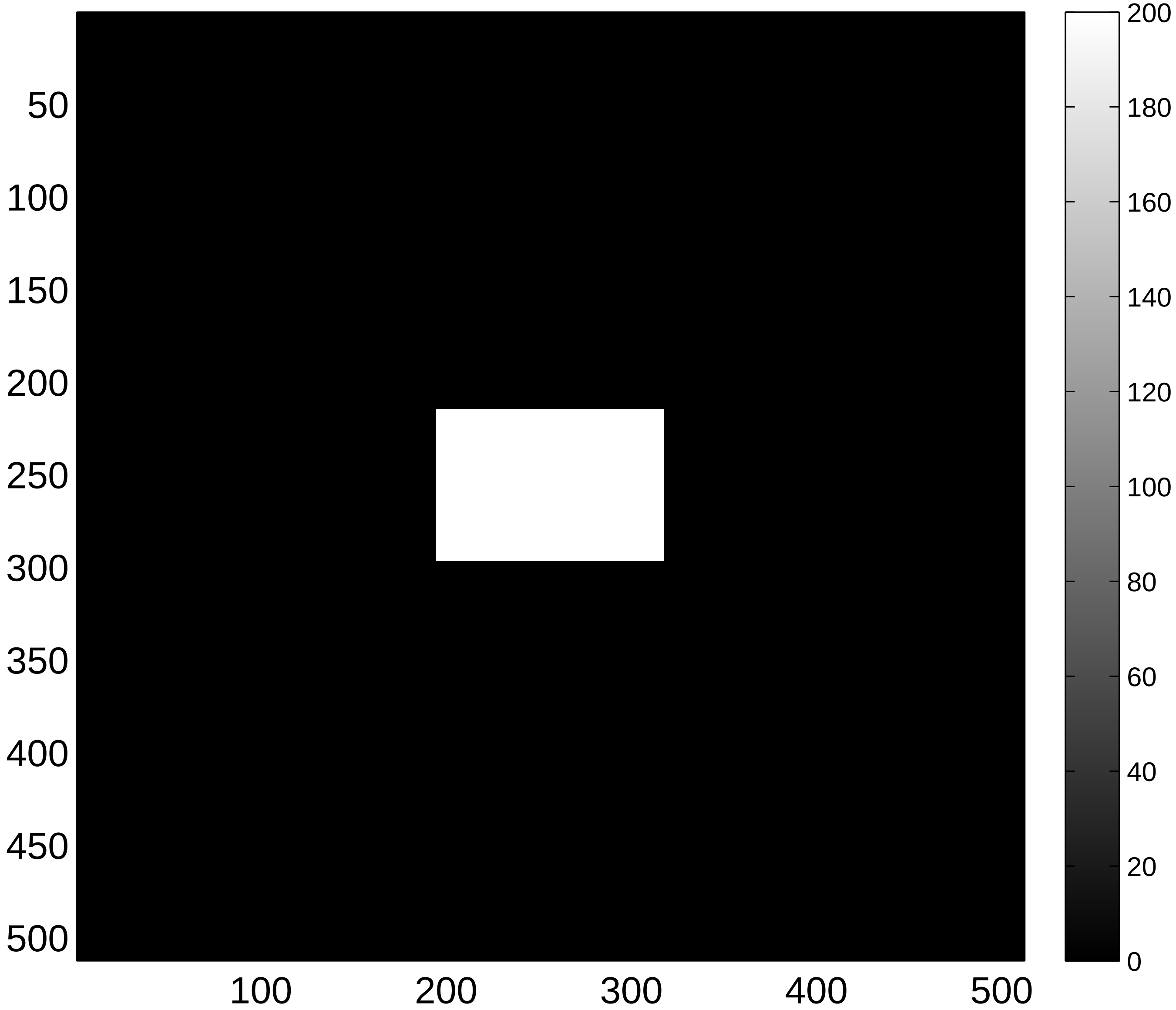
Příklad vodorovná čára, imaginární složka spektra



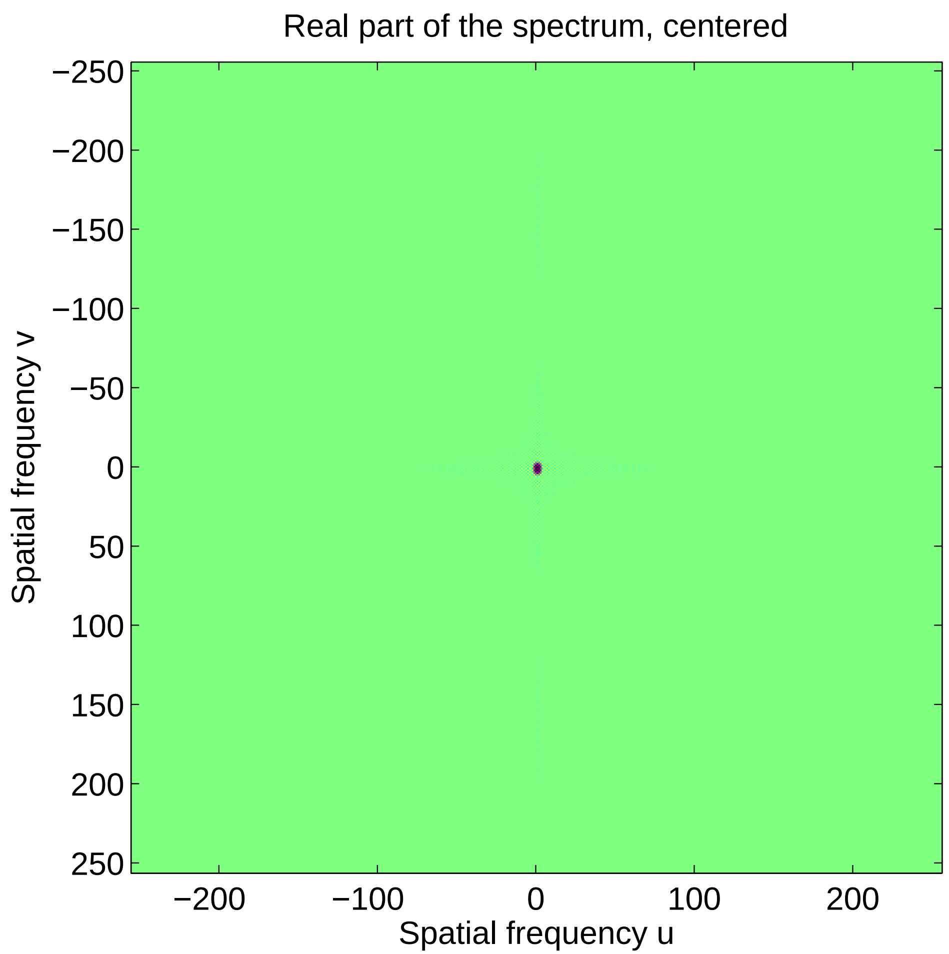
Příklad vodorovná čára, výkonové spektrum

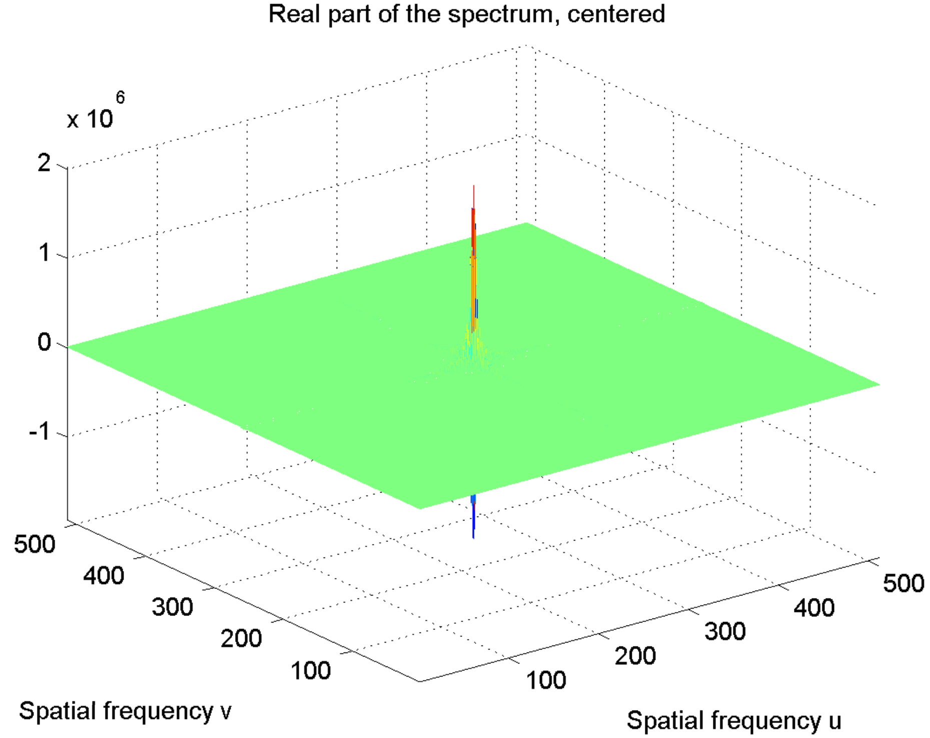


Příklad obdélník, výchozí obraz 512×512



Reálná složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

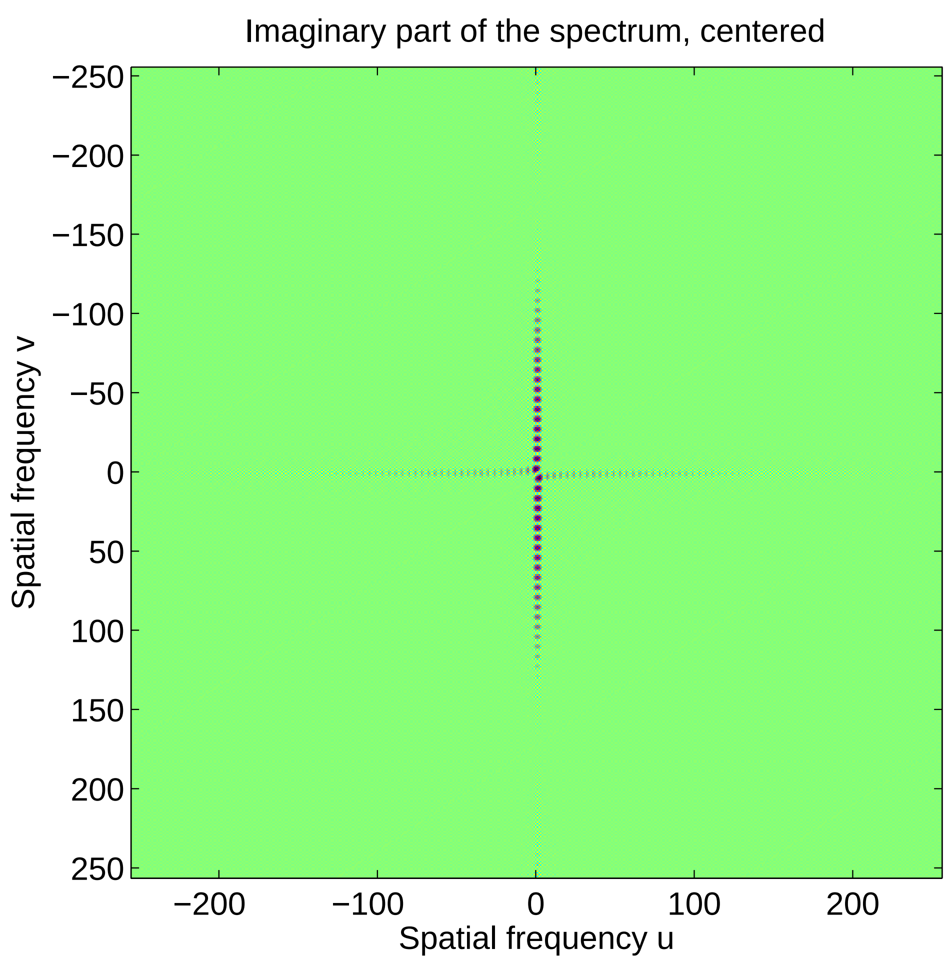




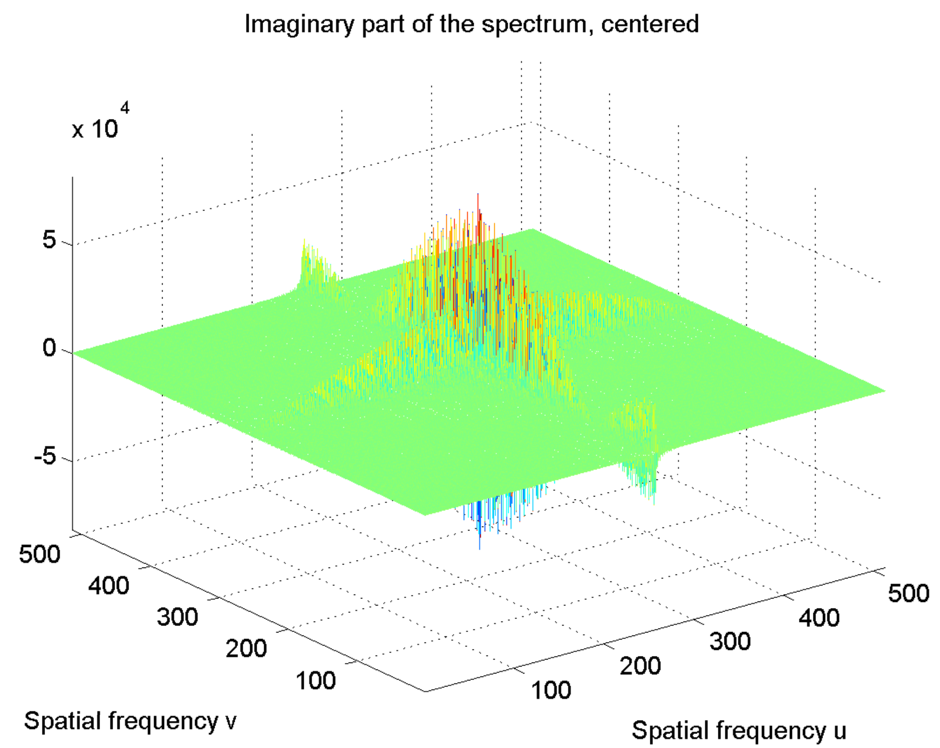
reálná část, obrázek

reálná část, povrch

Imaginární složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

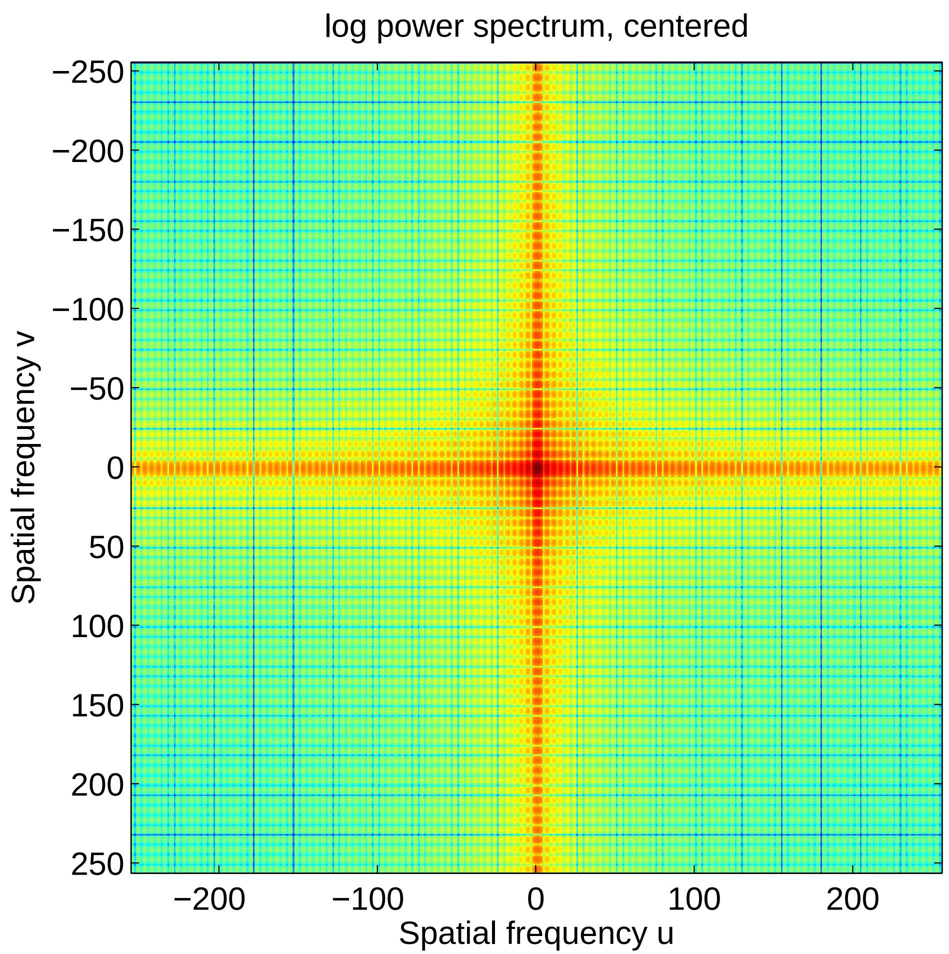


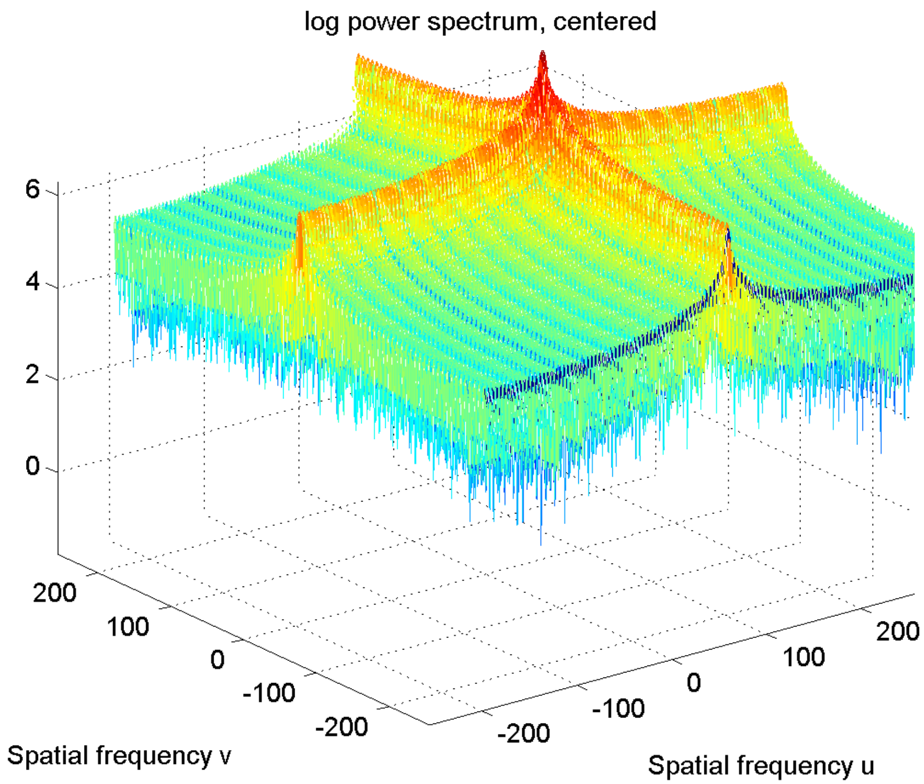
imaginární část, obrázek



imaginární část, povrch

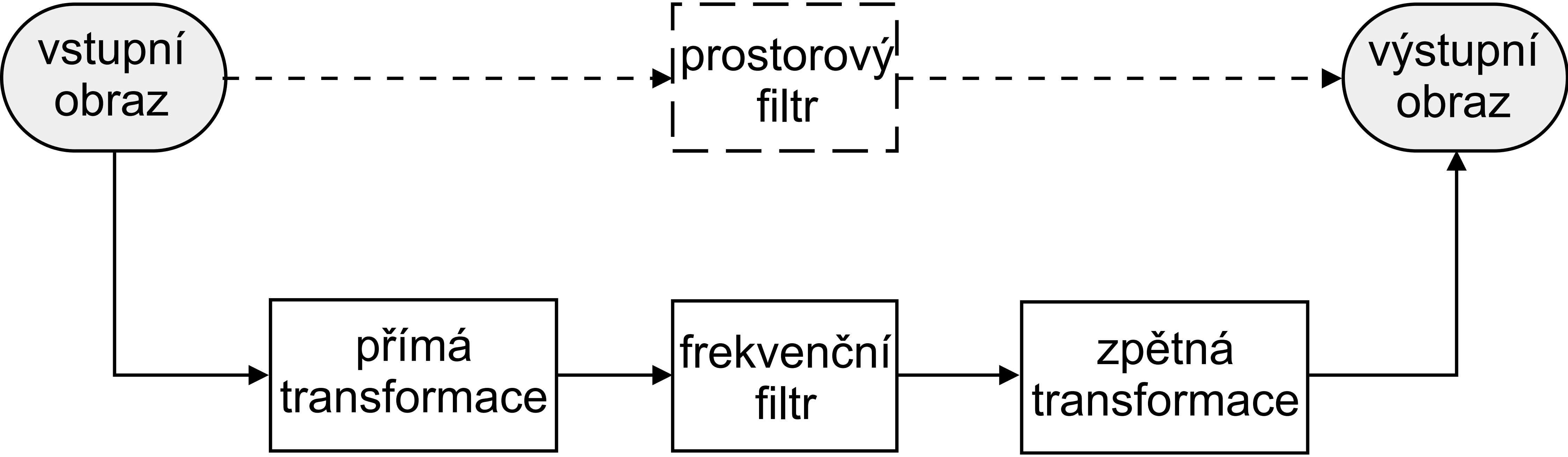
Log centrovaného výkonového spektra jako obrázek a povrch

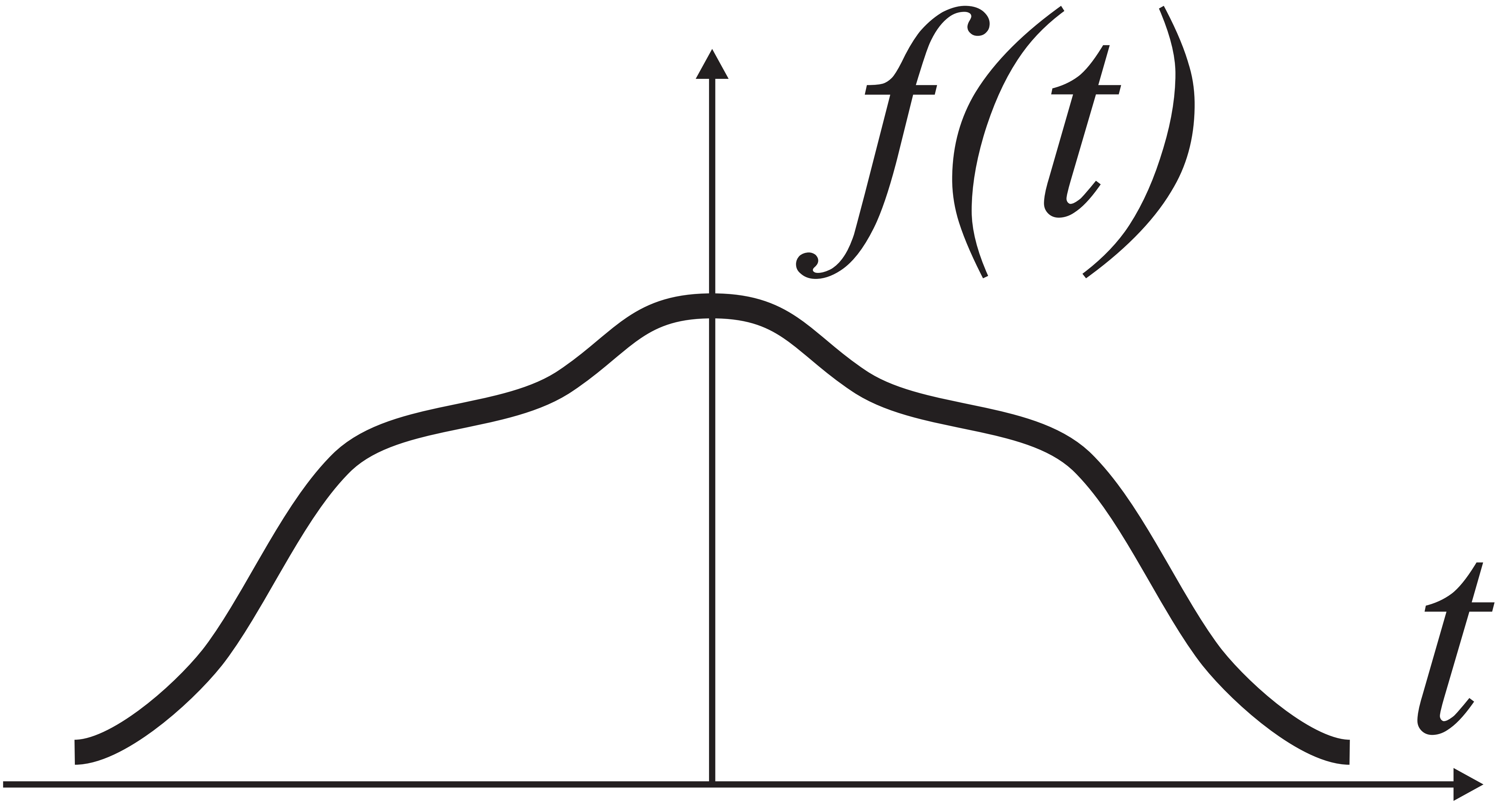


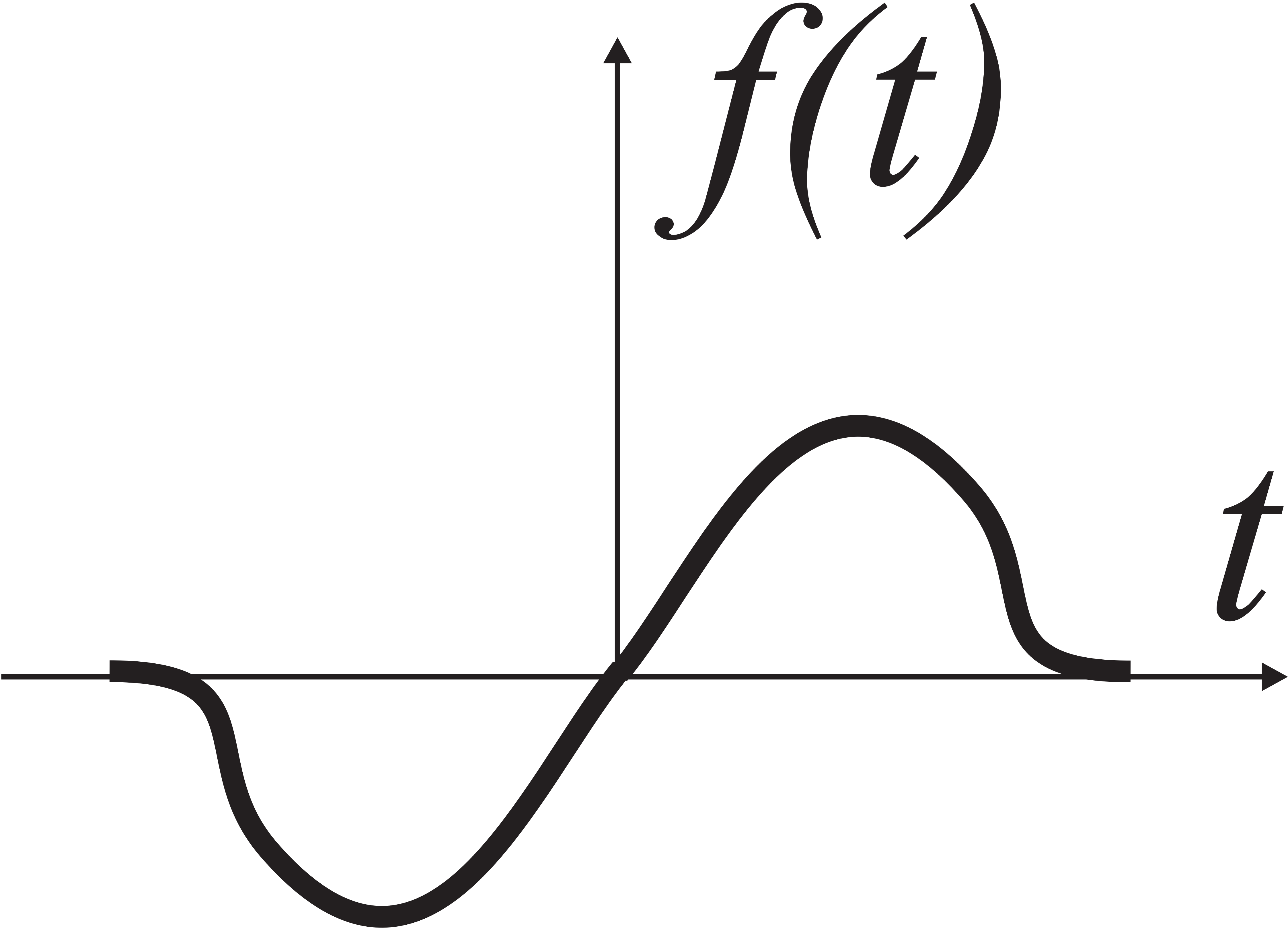


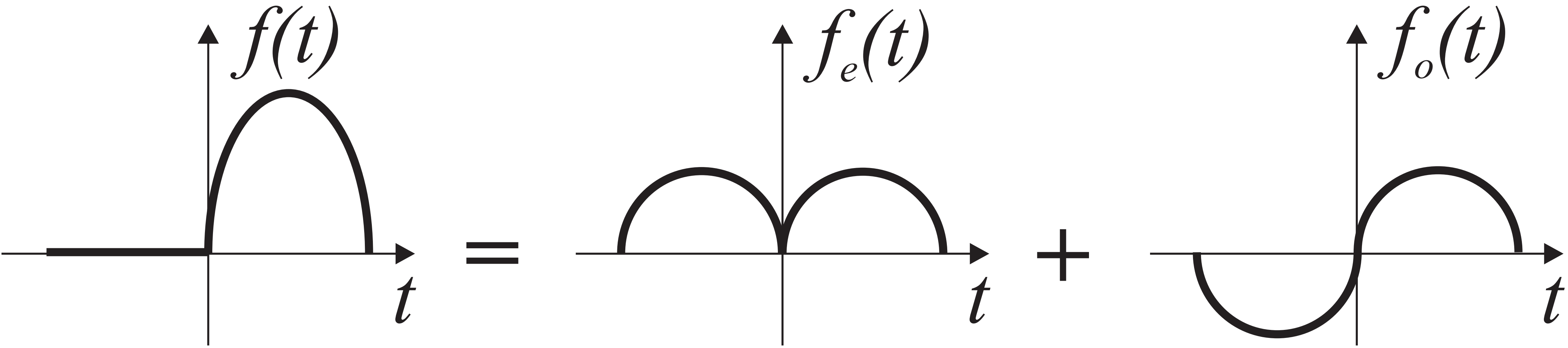
obrázek

povrch

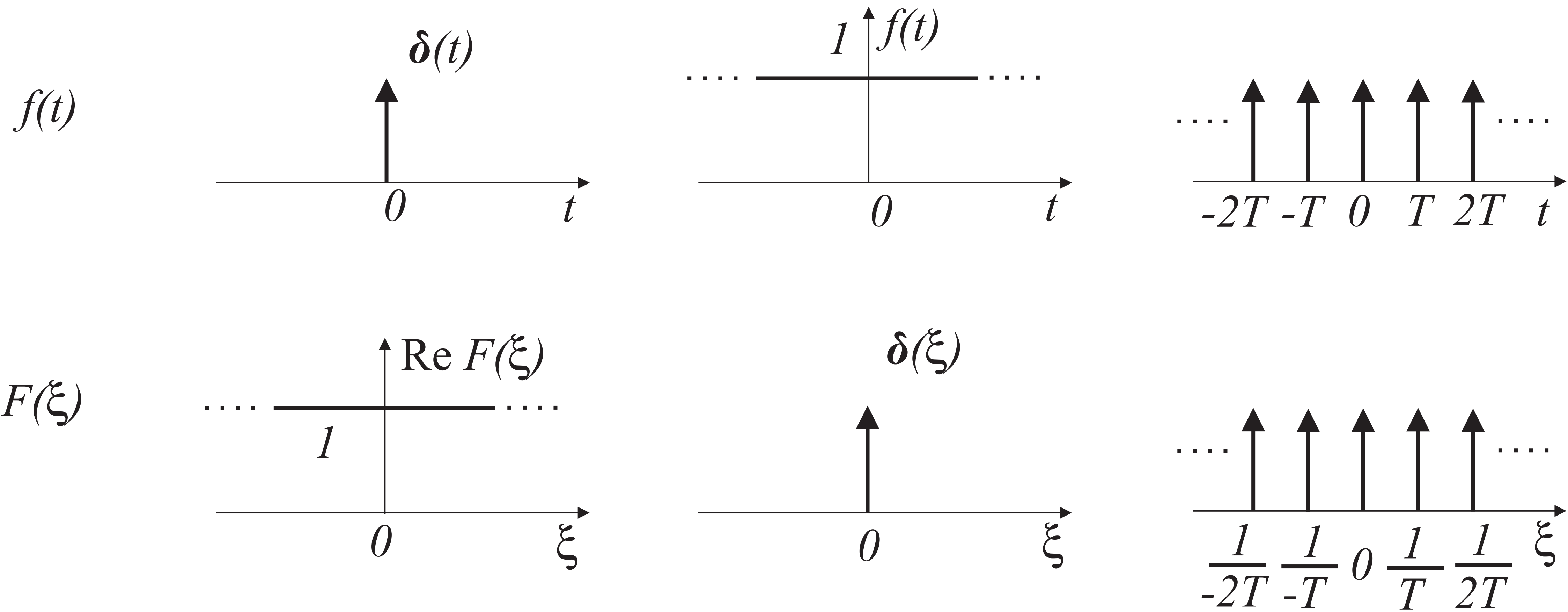

vstupní obraz
prostorový filtr
výstupní obraz
přímá transformace
frekvenční filtr
zpětná transformace


$f(t)$
t

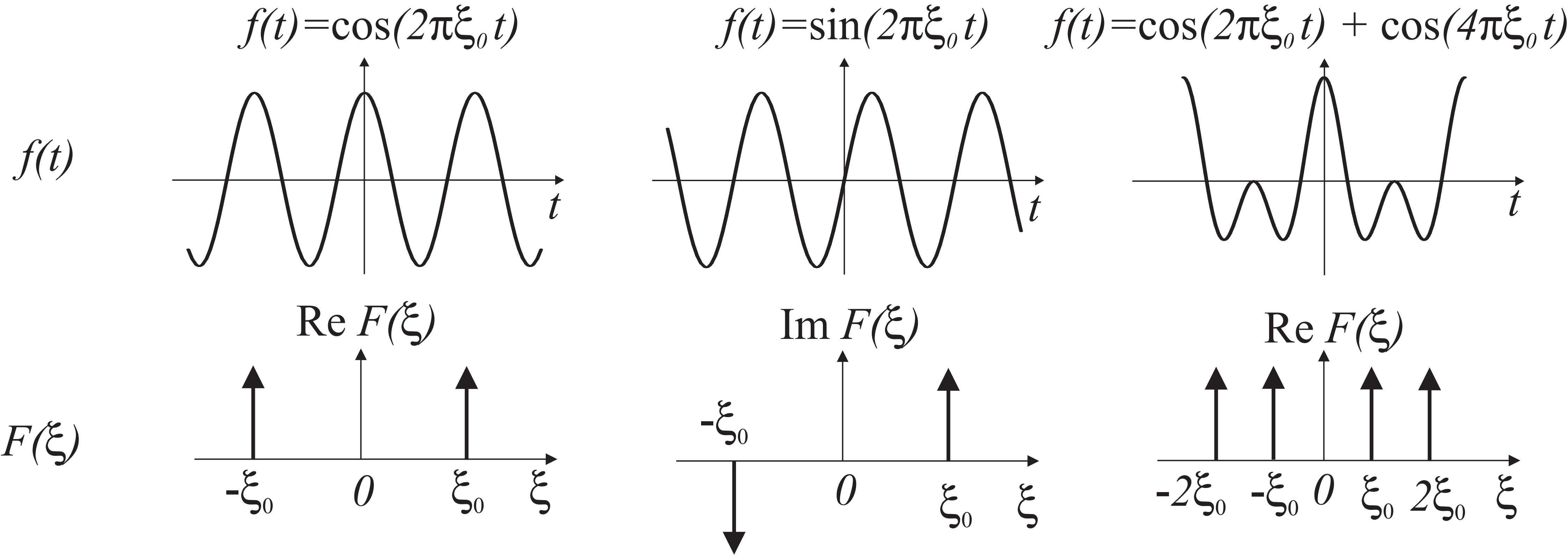

$f(t)$
t



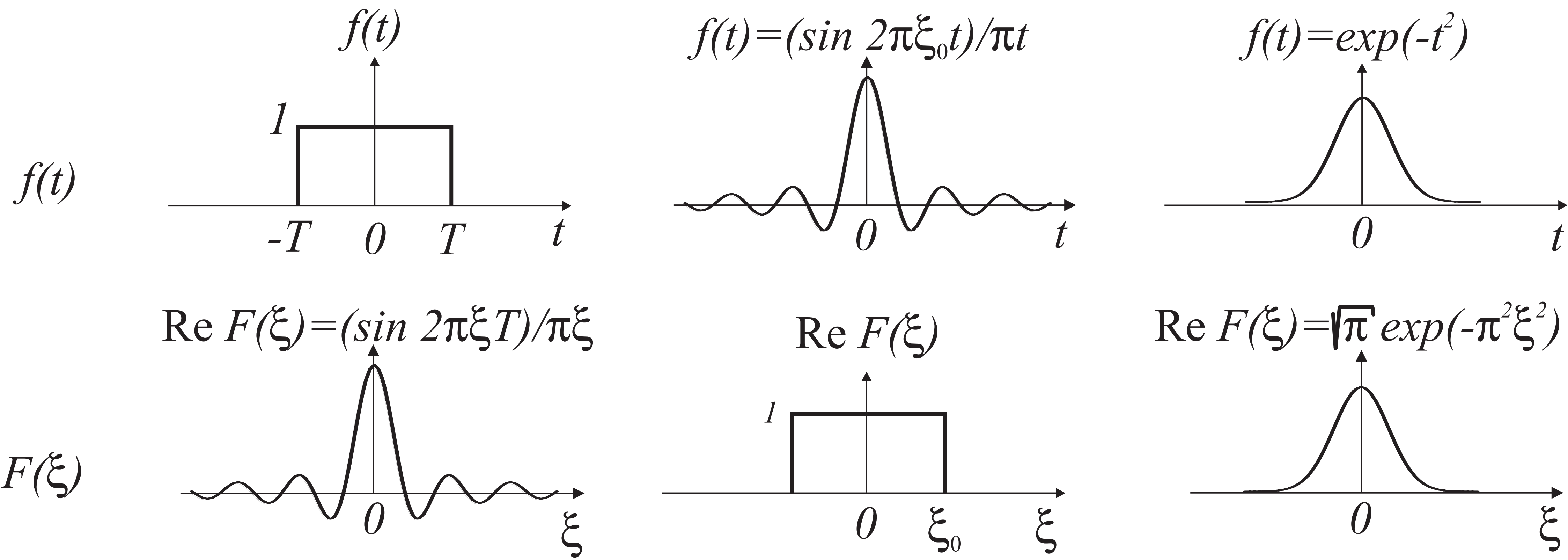
$f(t)$
t
$=$
$f_e(t)$
t
$+$
$f_o(t)$
t



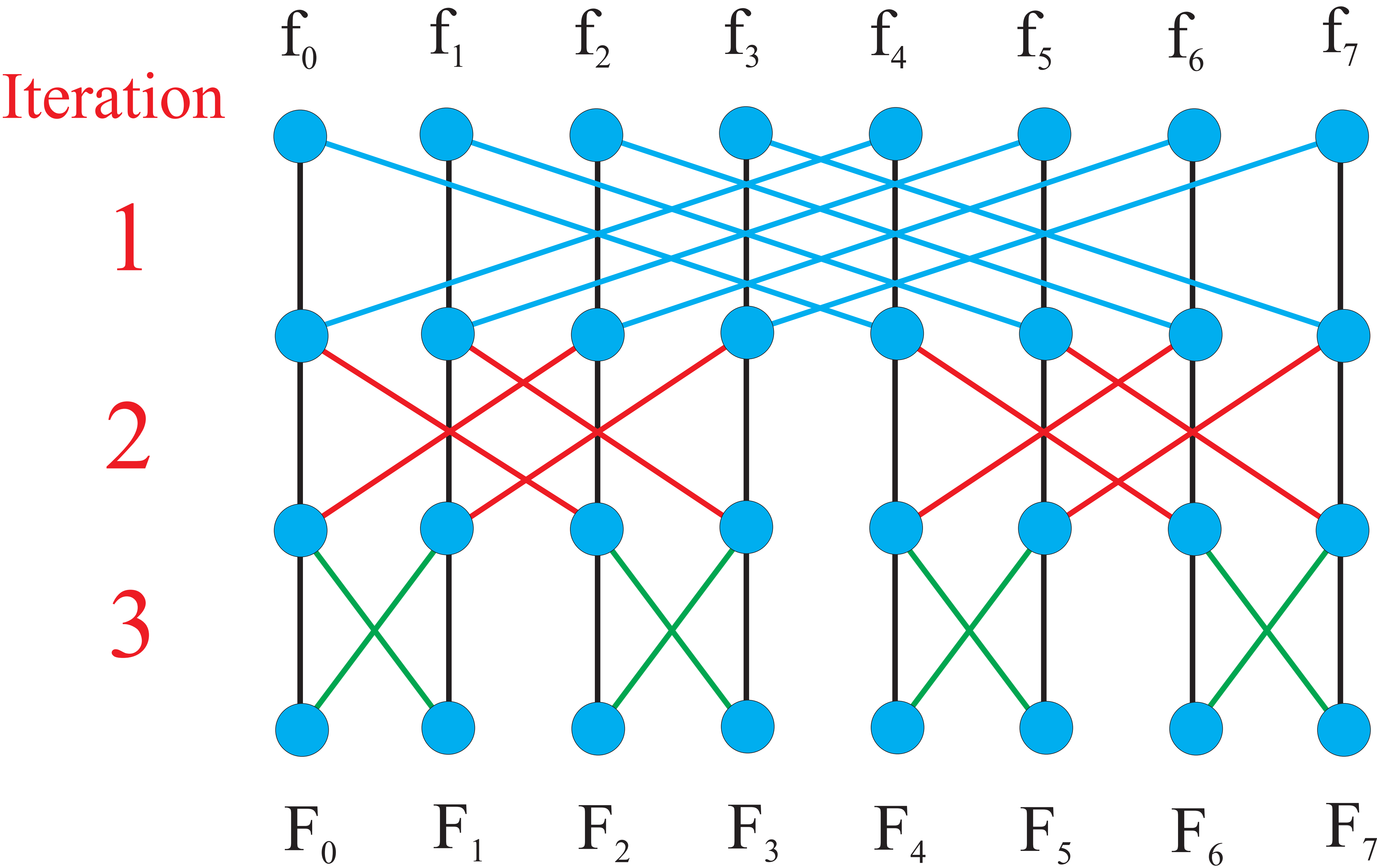
f(t)
F(ξ)
δ(t)
0
t
1
f(t)
0
t
-2T
-T
0
T
2T
t
Re F(ξ)
1
0
ξ
δ(ξ)
0
ξ
1/-2T
1/-T
0
1/T
1/2T
ξ



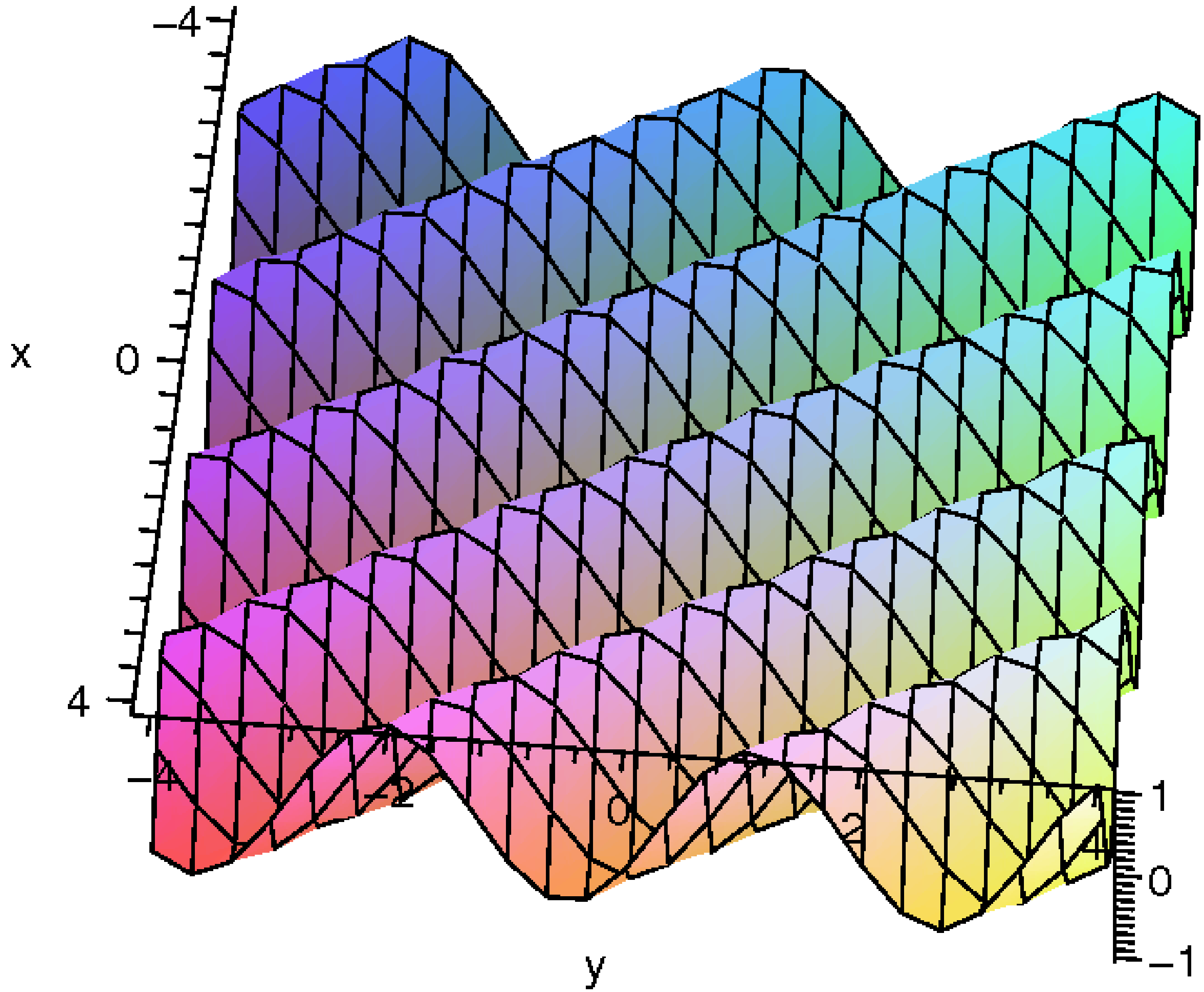
f(t)=cos(2πξ0 t)
f(t)=sin(2πξ0 t)
f(t)=cos(2πξ0 t) + cos(4πξ0 t)
f(t)
t
t
t
Re F(ξ)
Im F(ξ)
Re F(ξ)
F(ξ)
-ξ0
0
ξ0
ξ
-ξ0
0
ξ0
ξ
-2ξ0
-ξ0
0
ξ0
2ξ0
ξ



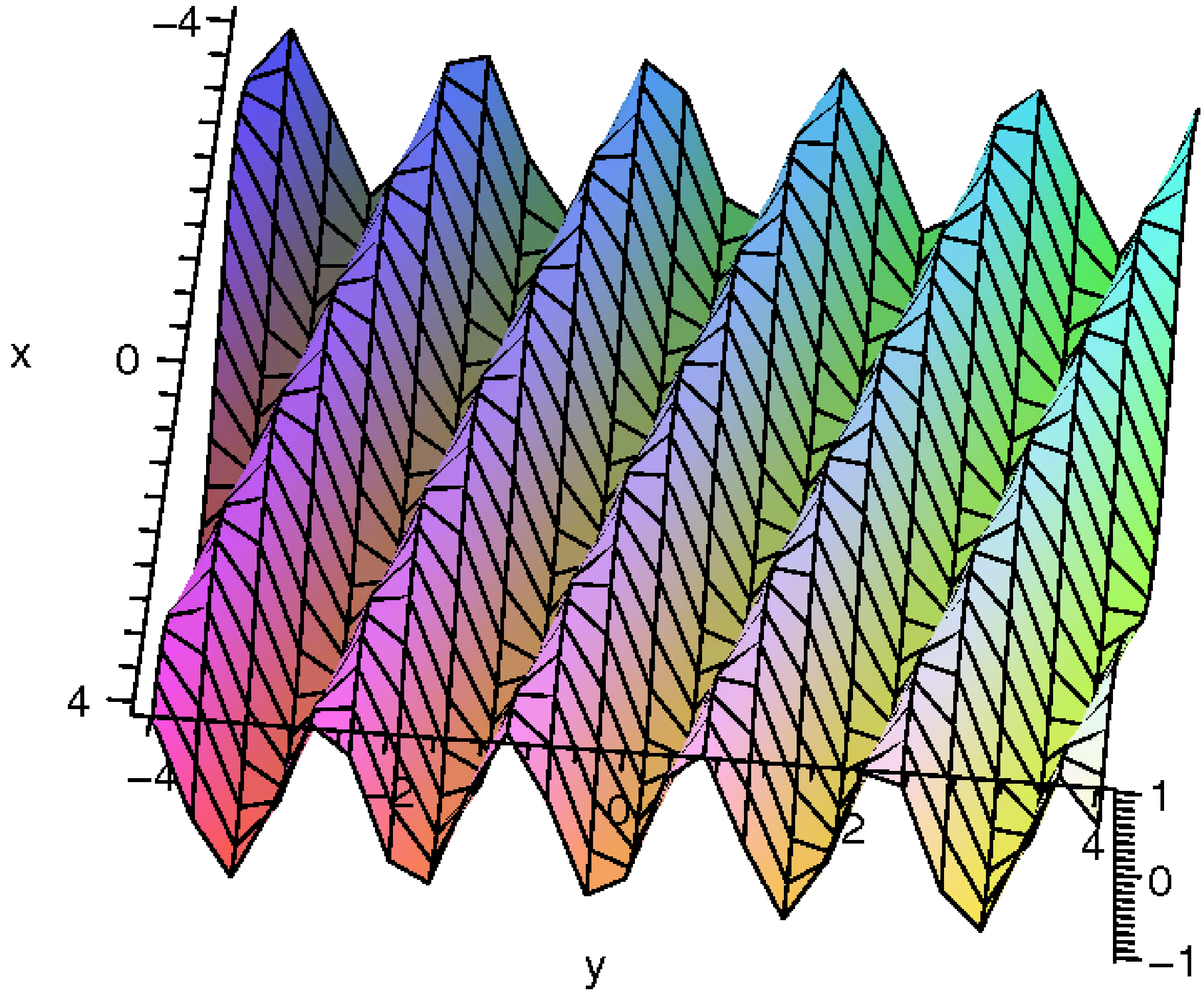
f(t)
F(ξ)
f(t)
1
-T
0
T
t
f(t)=(sin 2πξ₀t)/πt
0
t
f(t)=exp(-t²)
0
t
Re F(ξ)=(sin 2πξT)/πξ
0
ξ
Re F(ξ)
1
0
ξ₀
ξ
Re F(ξ)=√π exp(-π²ξ²)
0
ξ



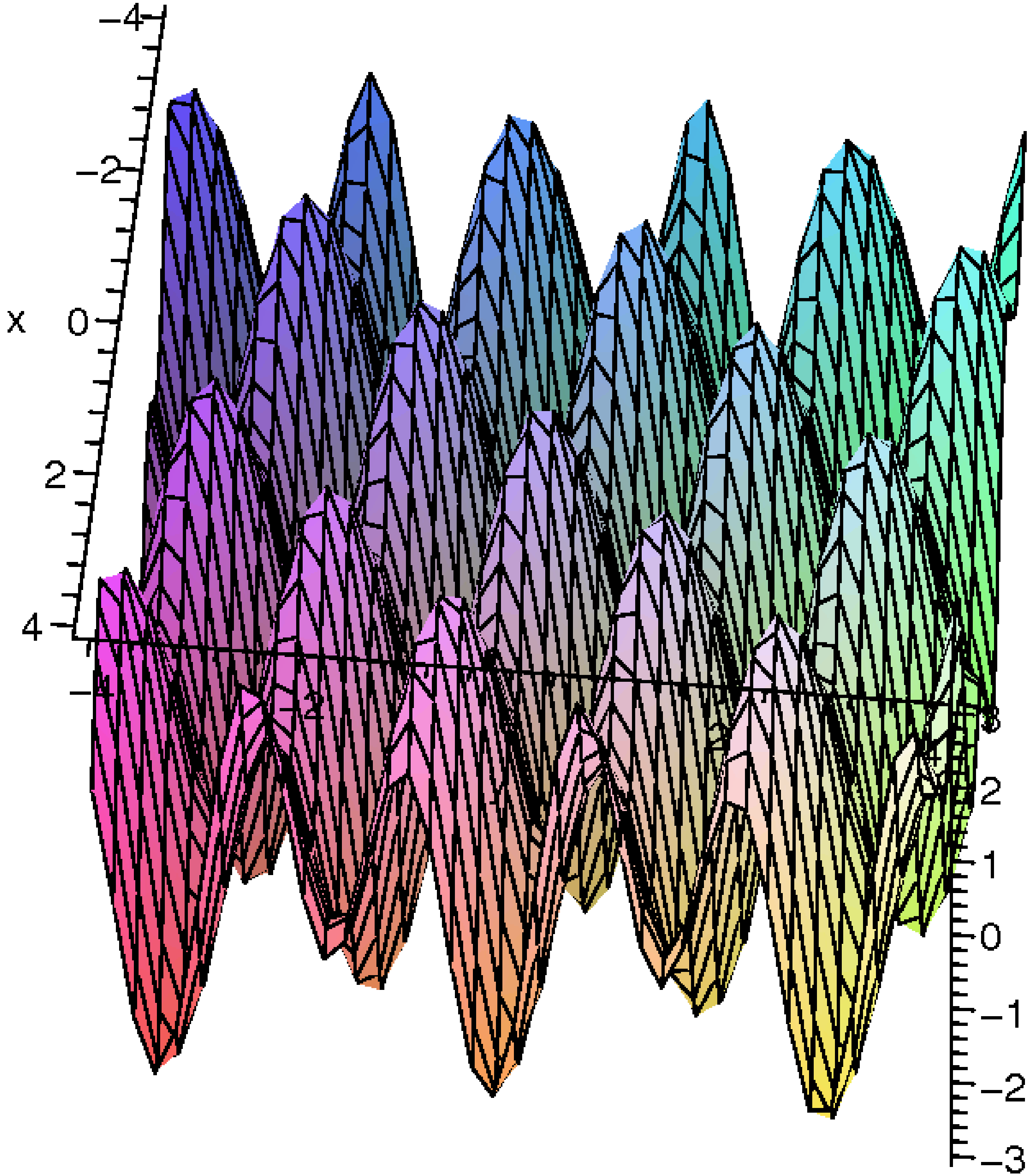
f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7
Iteration
1
2
3
F_0 F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7



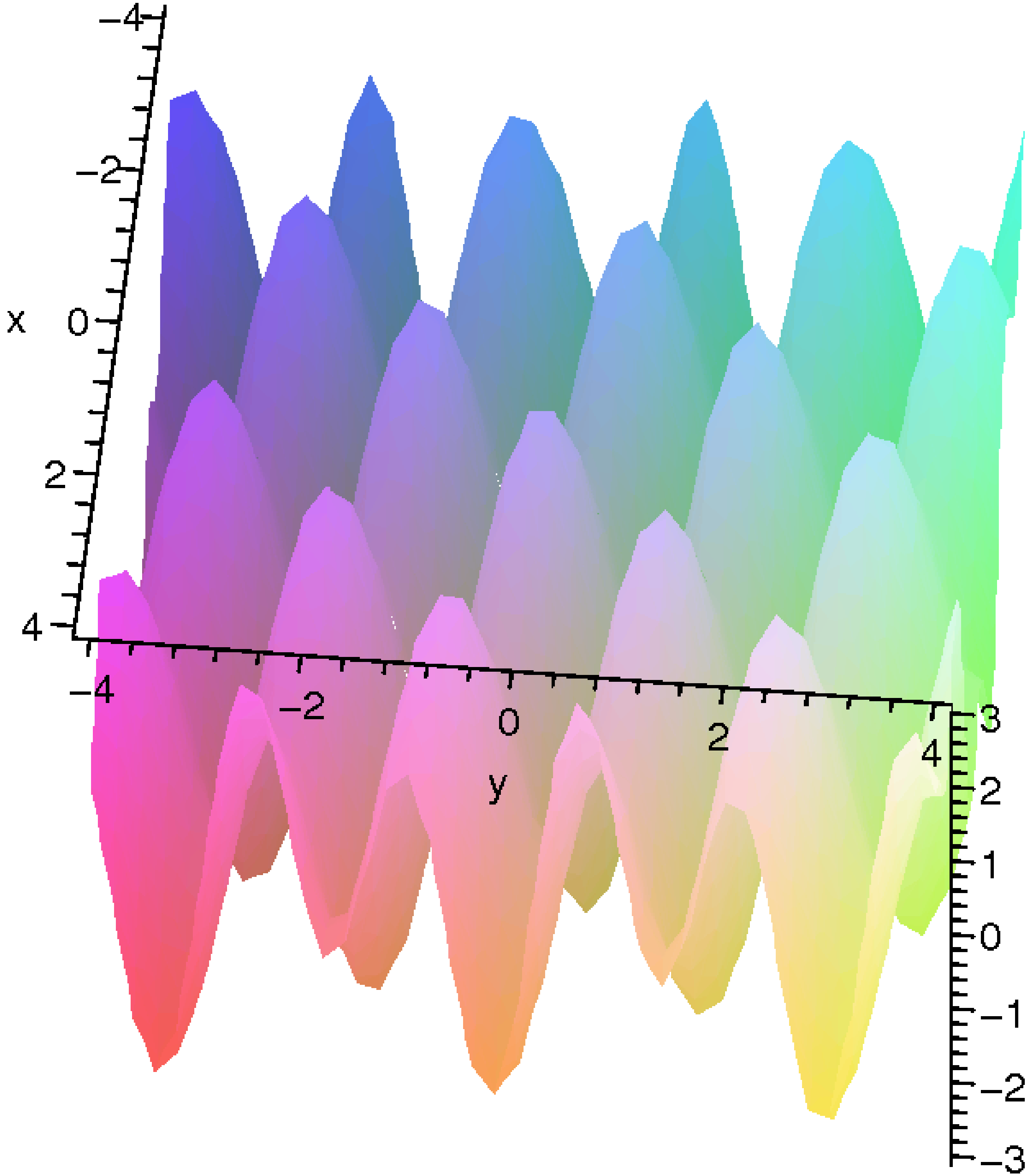
−4
x
0
4
−4
−2
0
2
4
y
1
0
−1

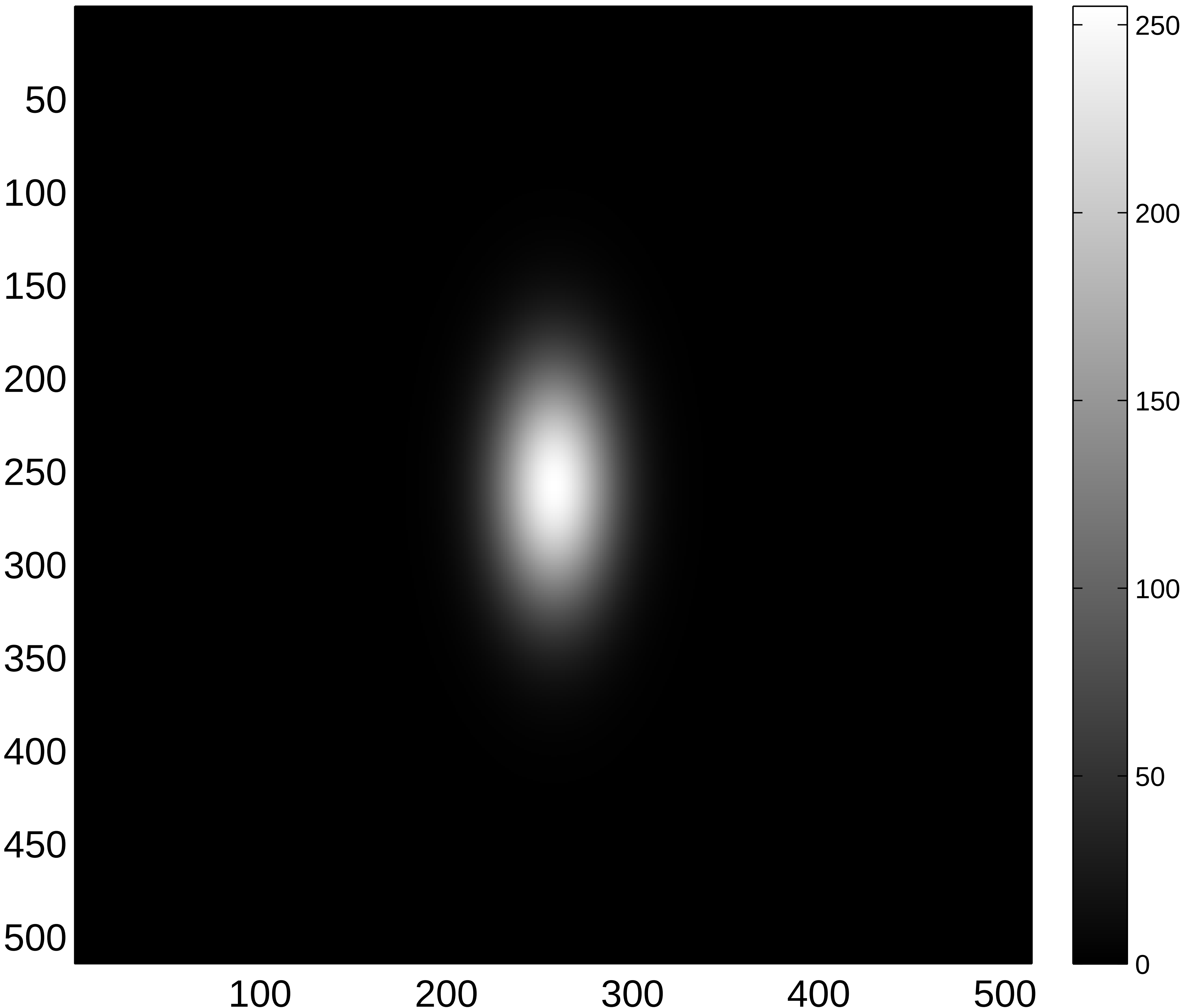


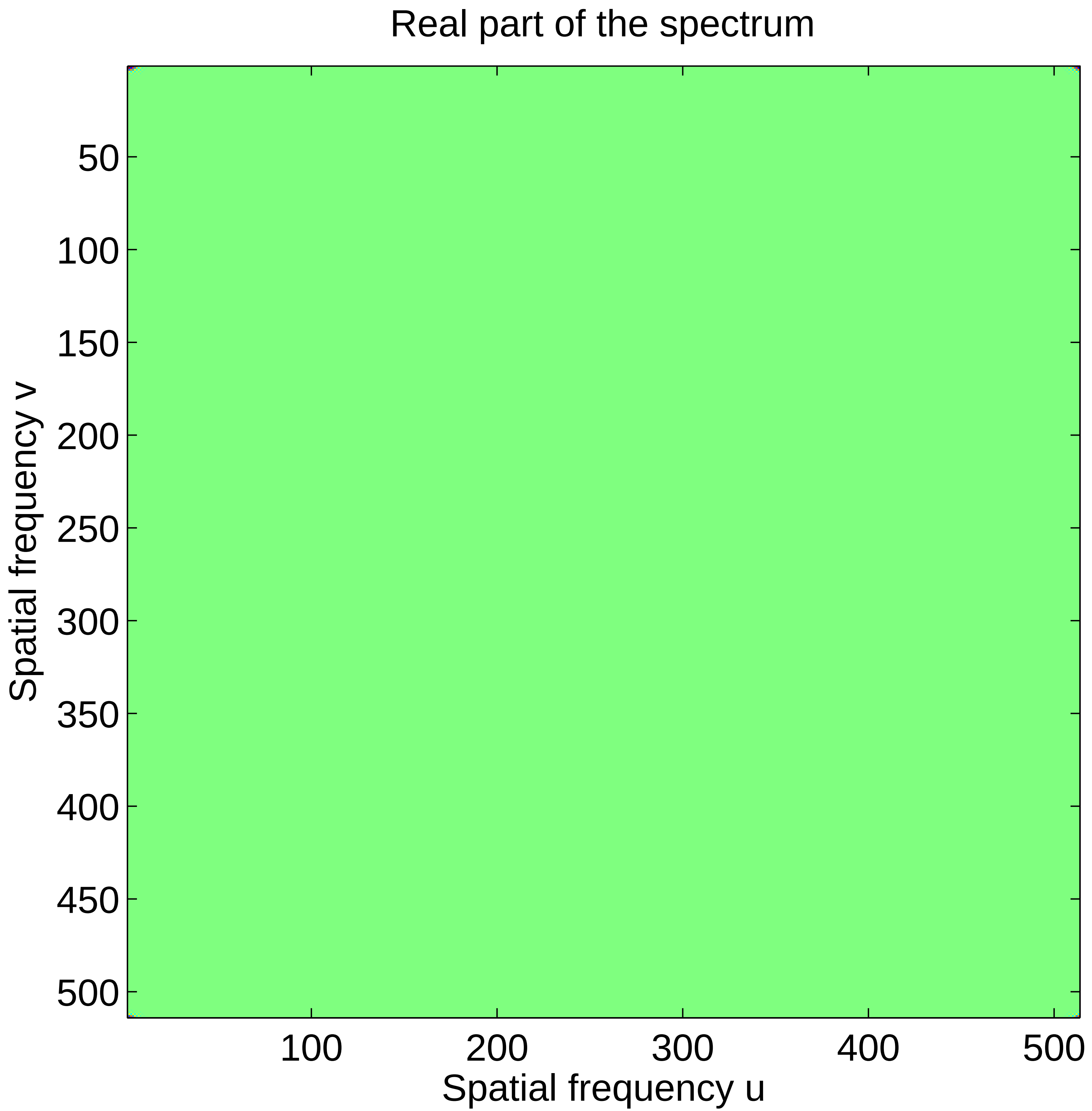
x
−4
0
4
y
−4
−2
0
2
4
1
0
−1

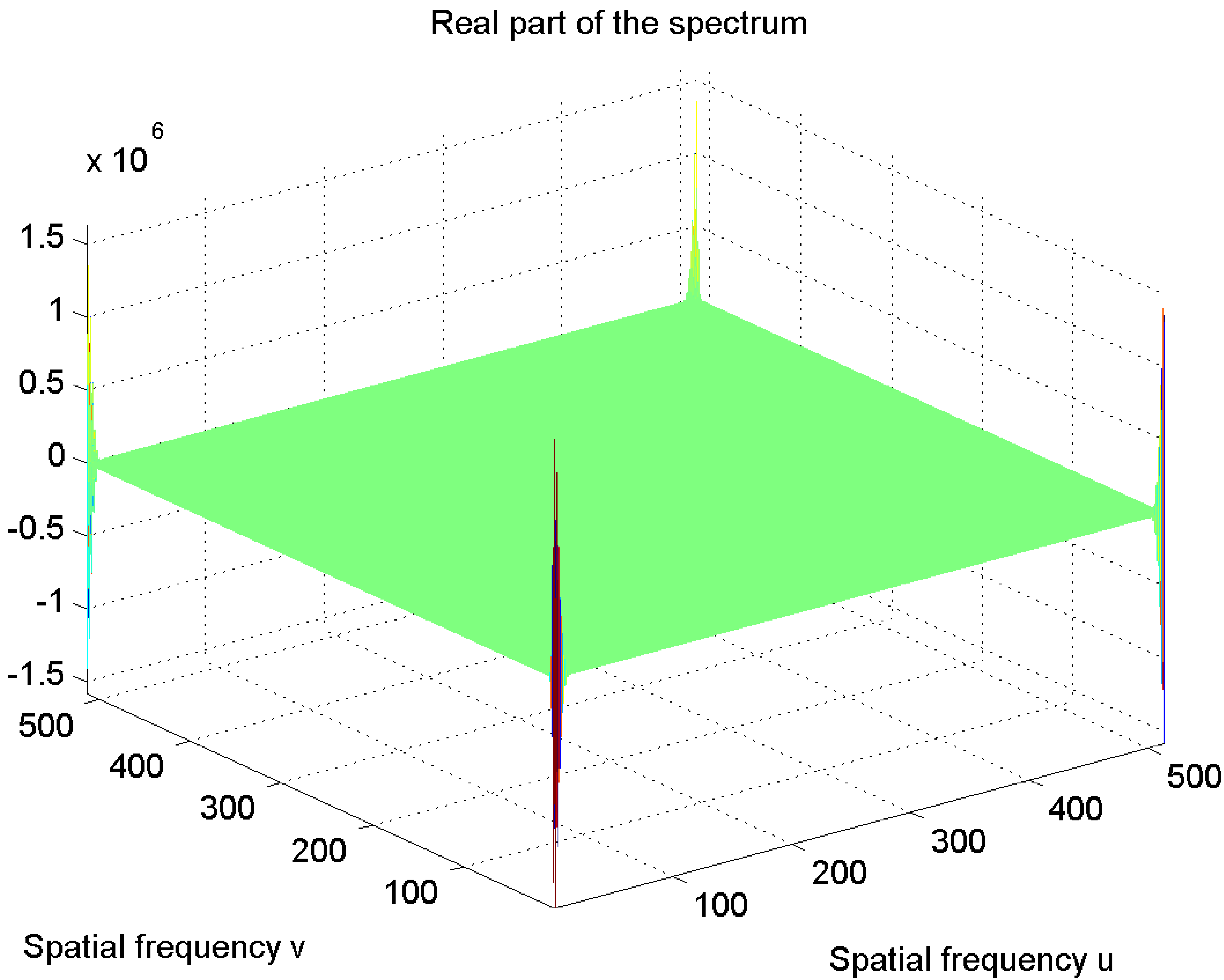


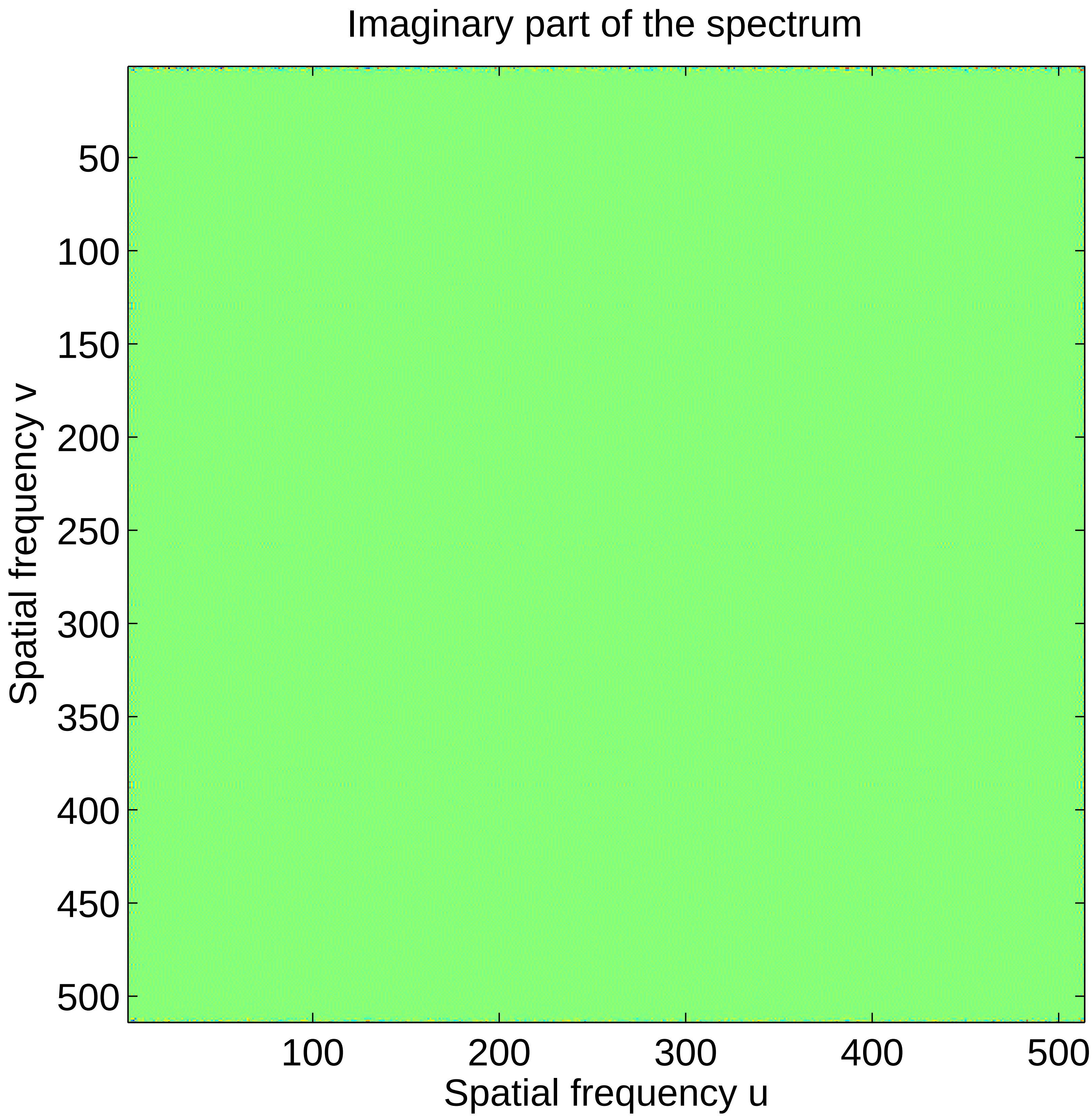
−4
−2
x
0
2
4
−4
−2
2
1
0
−1
−2
−3

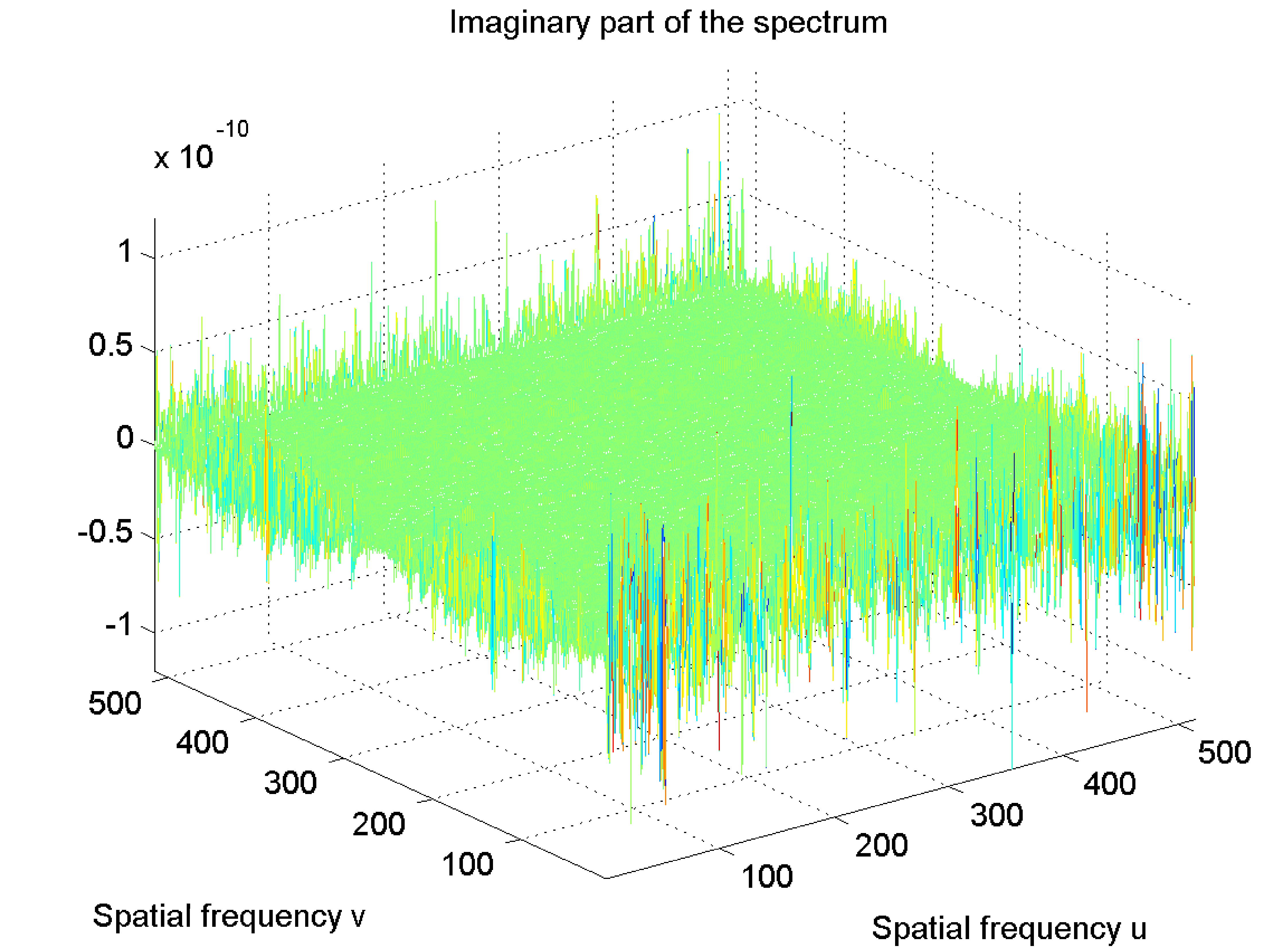

x
y
−4
−2
0
2
4
3
2
1
0
−1
−2
−3

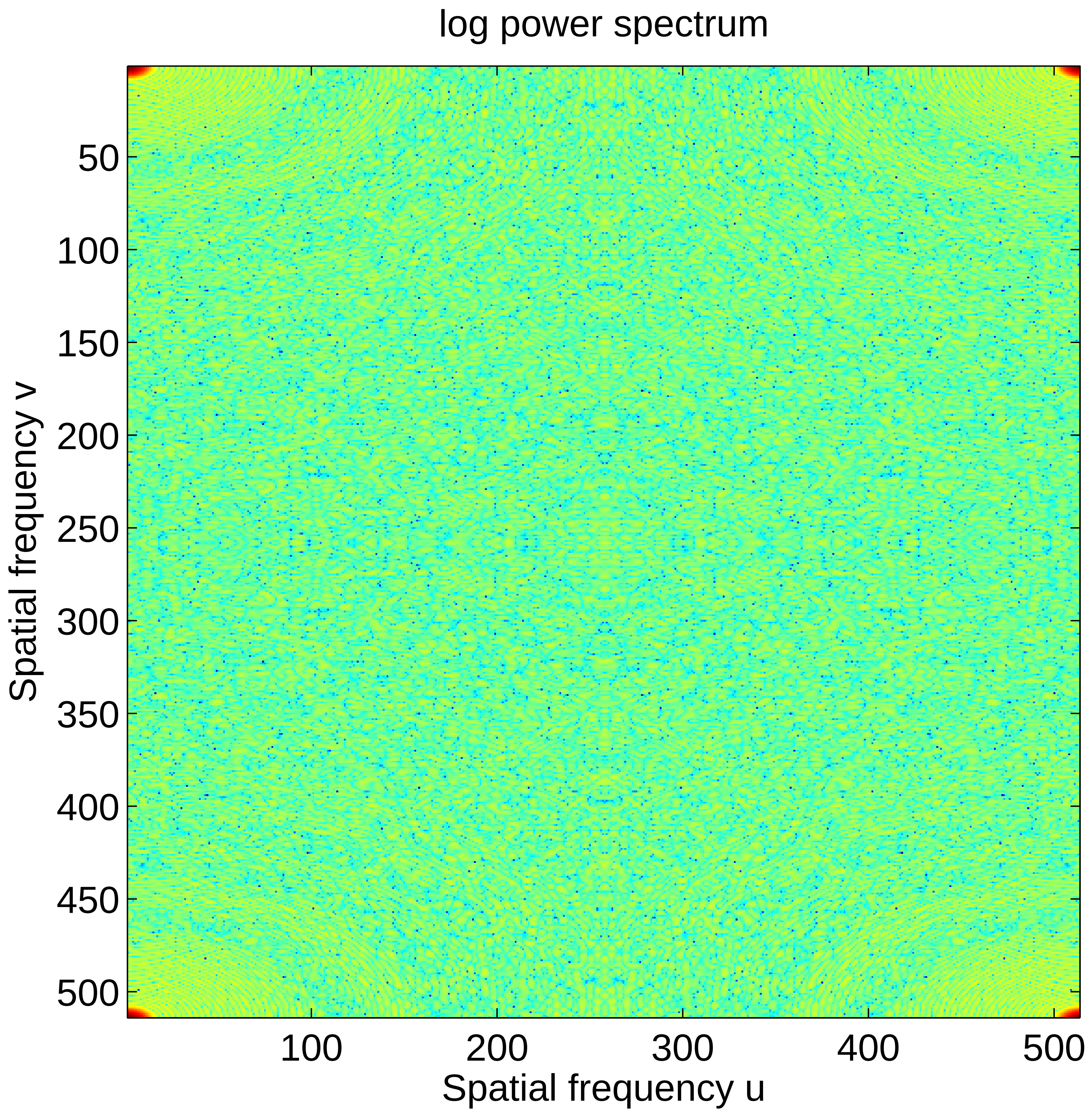

50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
100
200
300
400
500
250
200
150
100
50
0

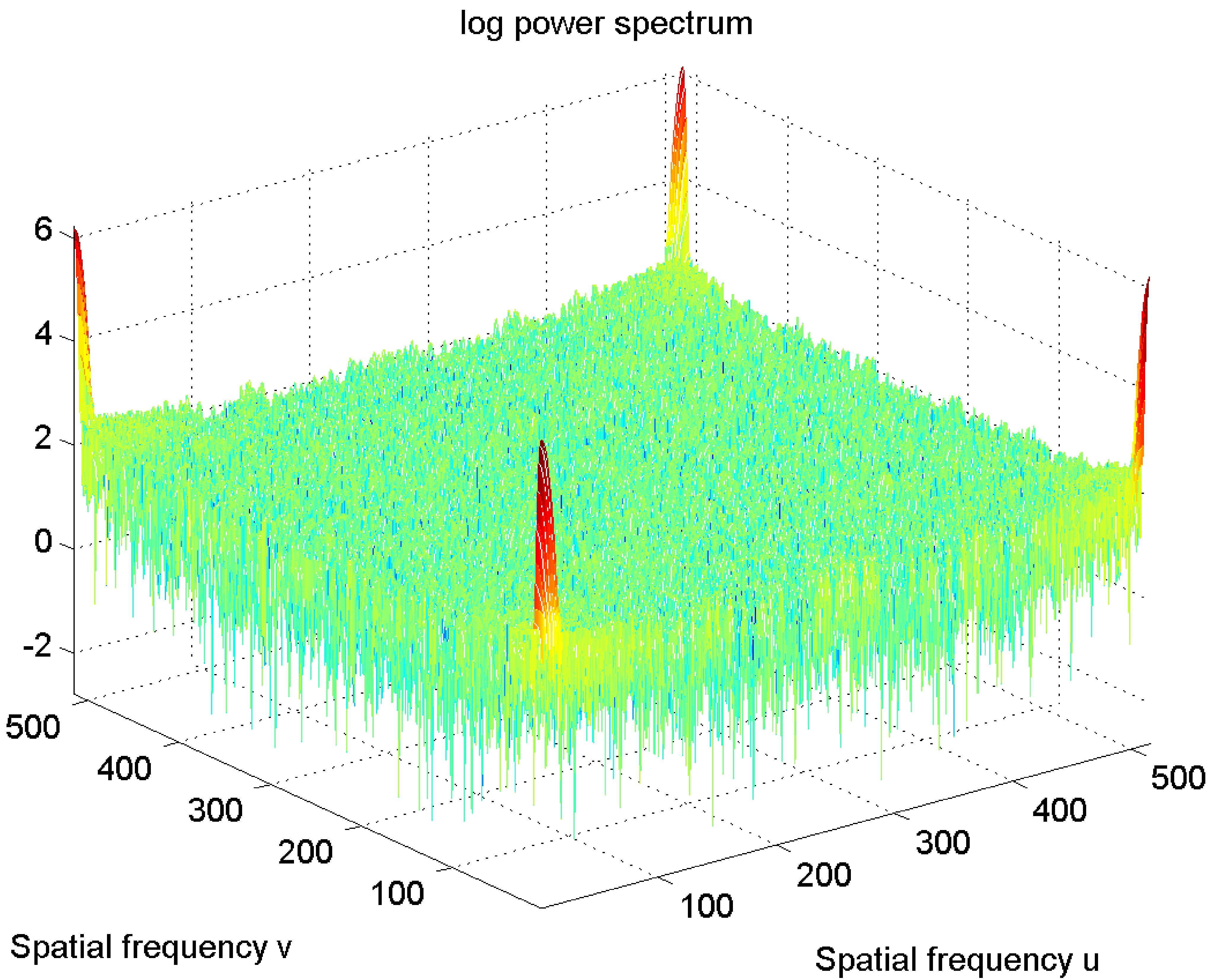

Real part of the spectrum
Spatial frequency v
Spatial frequency u
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
100
200
300
400
500


Real part of the spectrum
x 10^6
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
500
400
300
200
100
Spatial frequency v
100
200
300
400
500
Spatial frequency u

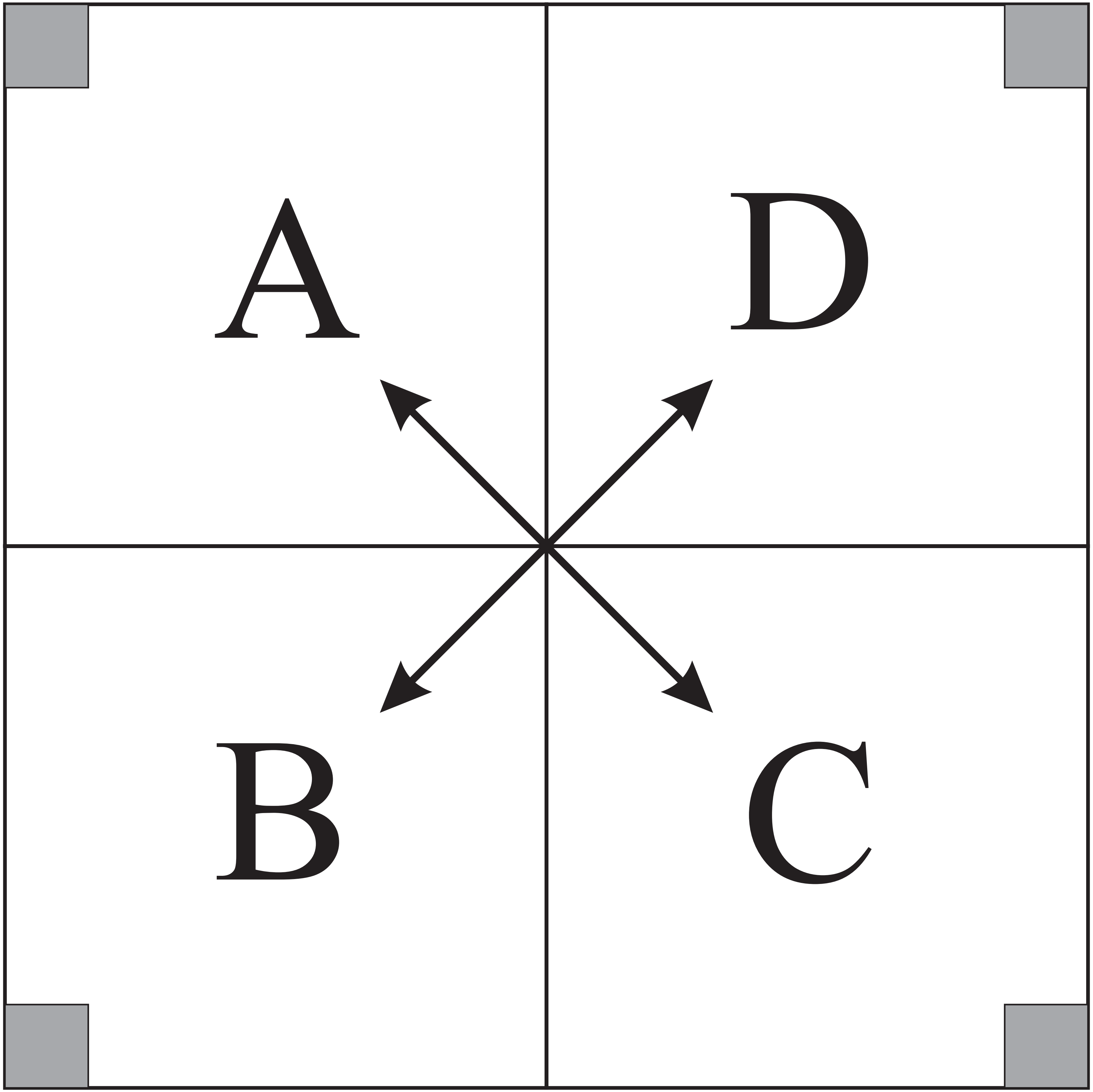

Imaginary part of the spectrum
Spatial frequency v
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
100
200
300
400
500
Spatial frequency u

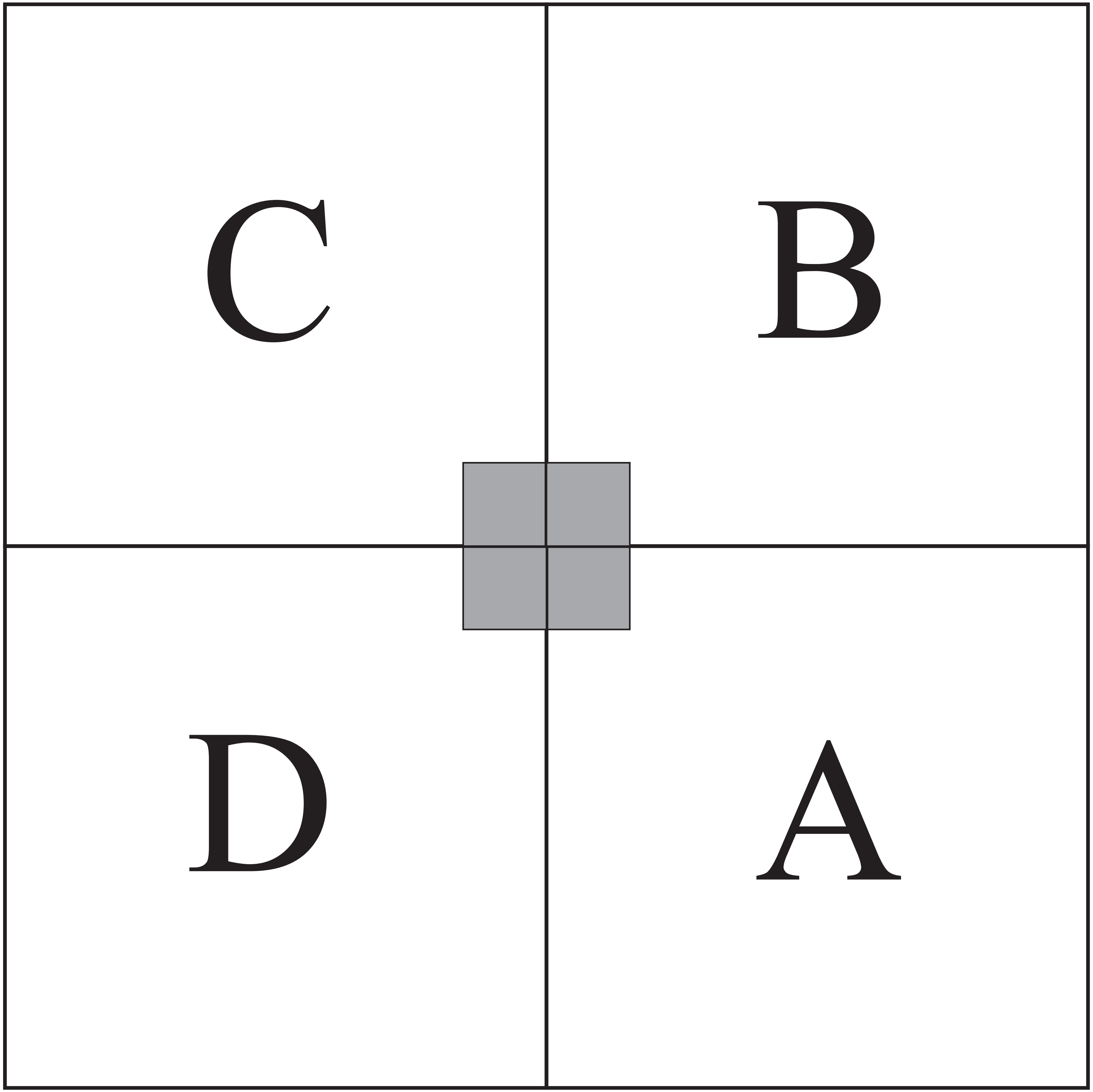

Imaginary part of the spectrum
x 10
-10
1
0.5
0
-0.5
-1
500
400
300
200
100
Spatial frequency v
100
200
300
400
500
Spatial frequency u

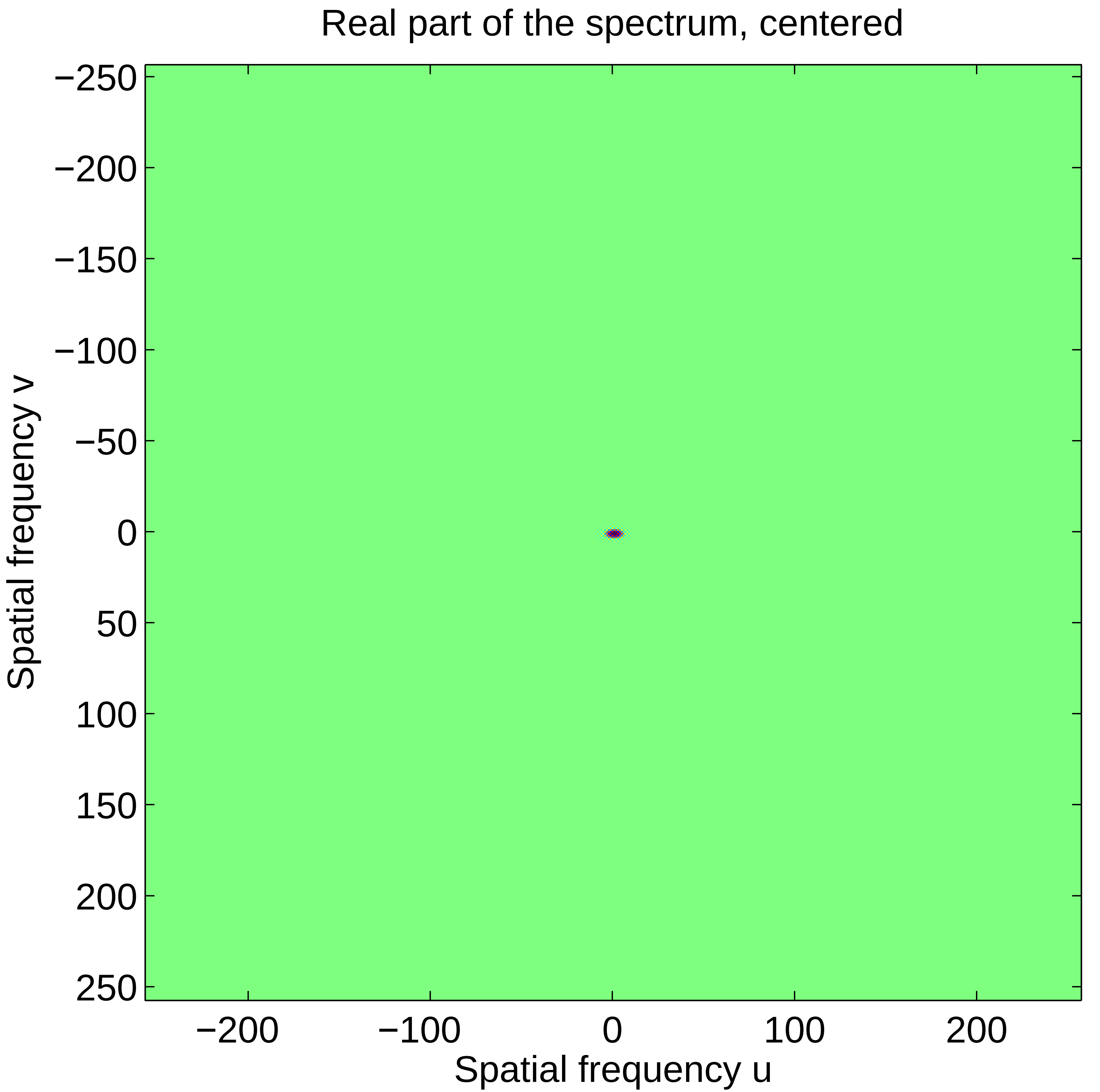

log power spectrum
Spatial frequency v
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
100
200
300
400
500
Spatial frequency u

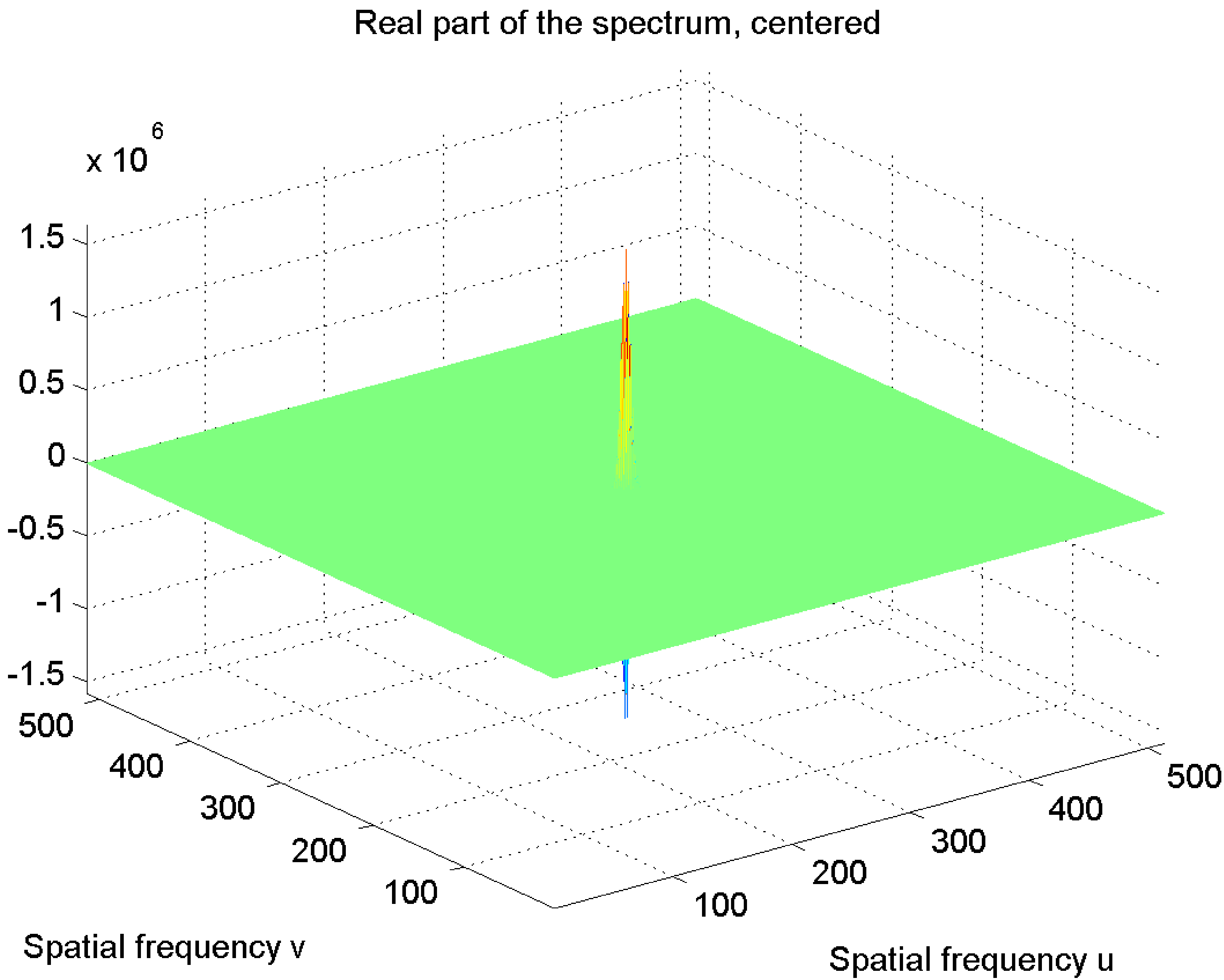


log power spectrum
6
4
2
0
-2
500
400
300
200
100
Spatial frequency v
100
200
300
400
500
Spatial frequency u

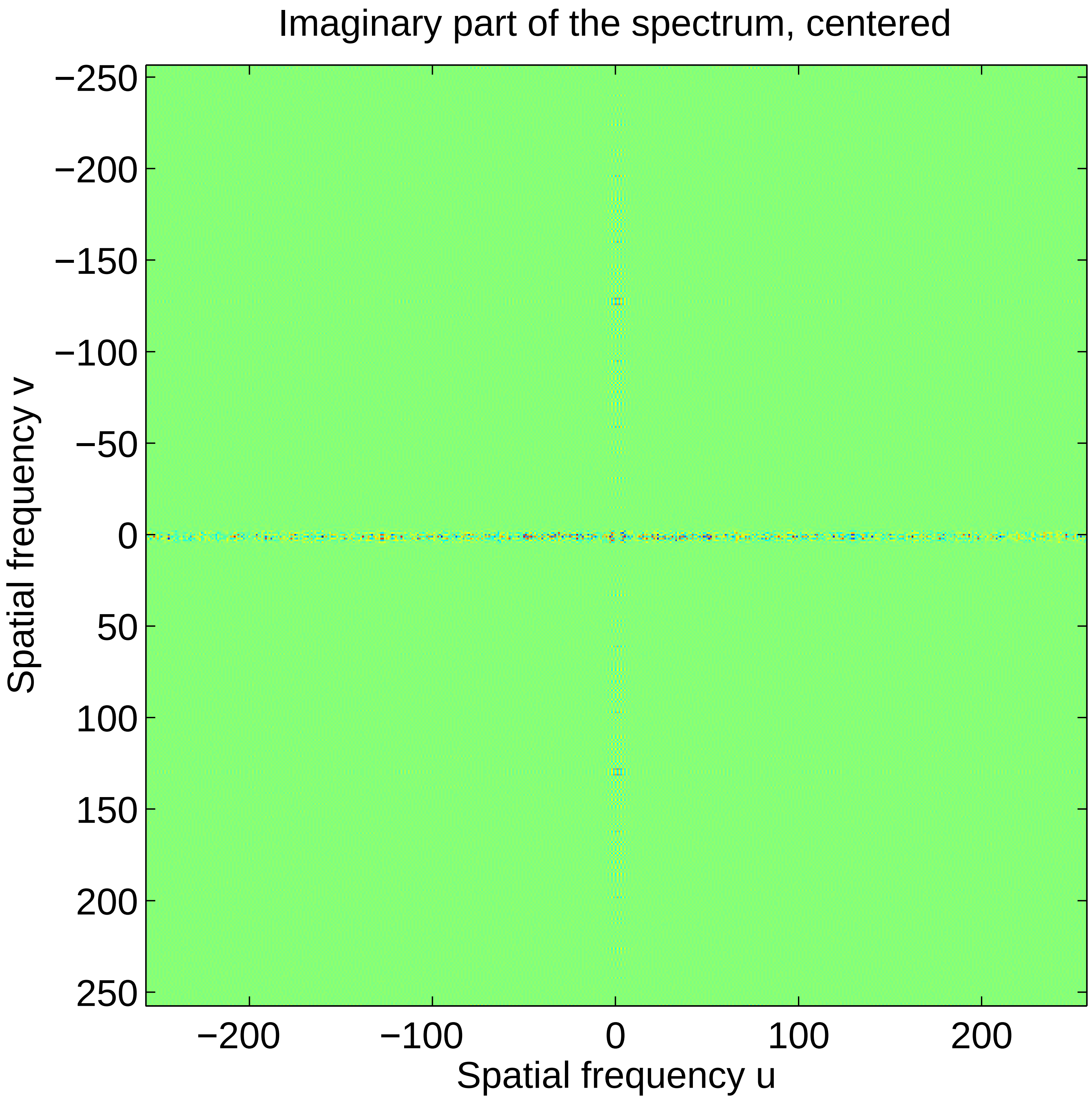

A
D
B
C

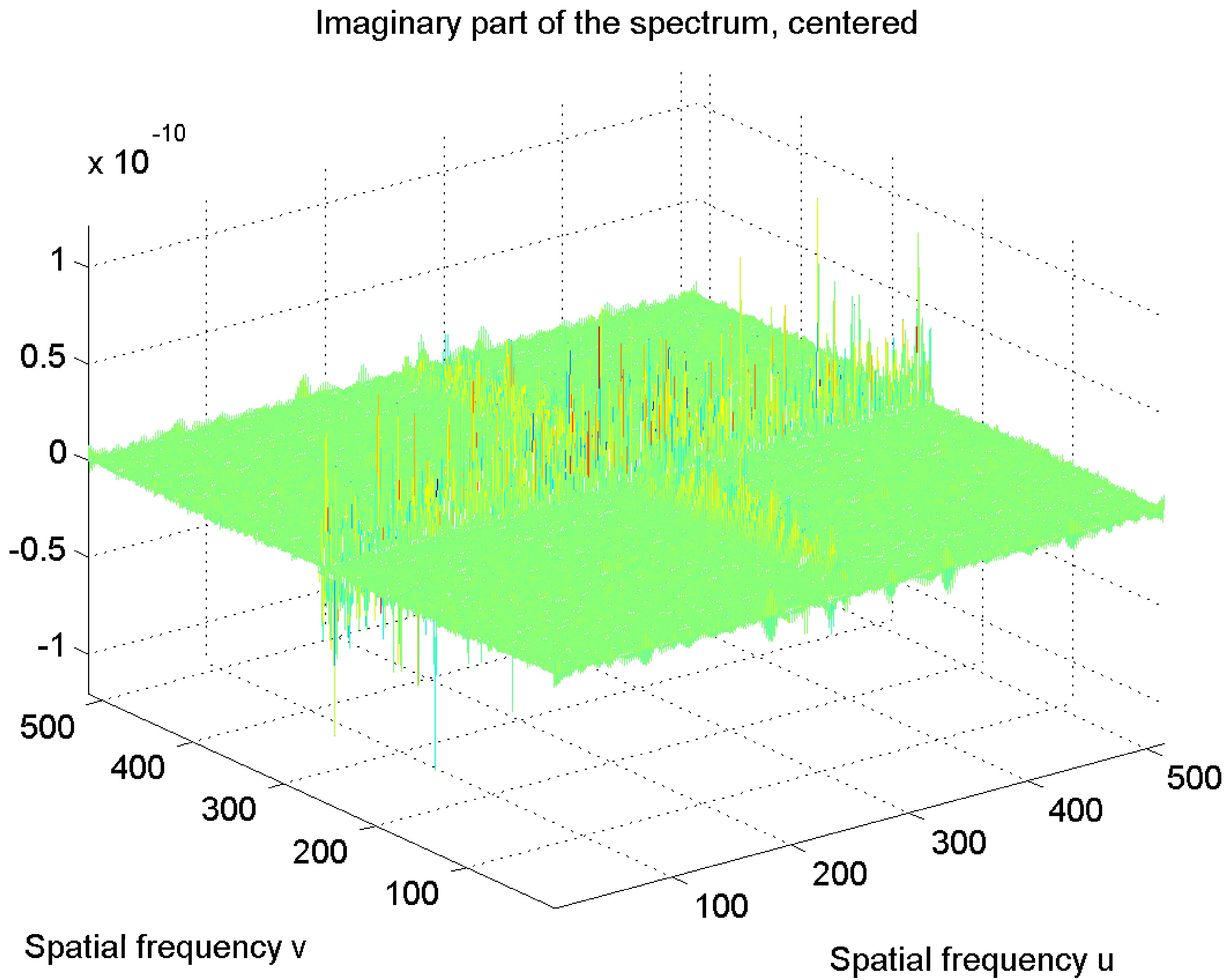

C
B
D
A


Real part of the spectrum, centered
−250
−200
−150
−100
−50
0
50
100
150
200
250
Spatial frequency v
−200
−100
0
100
200
Spatial frequency u

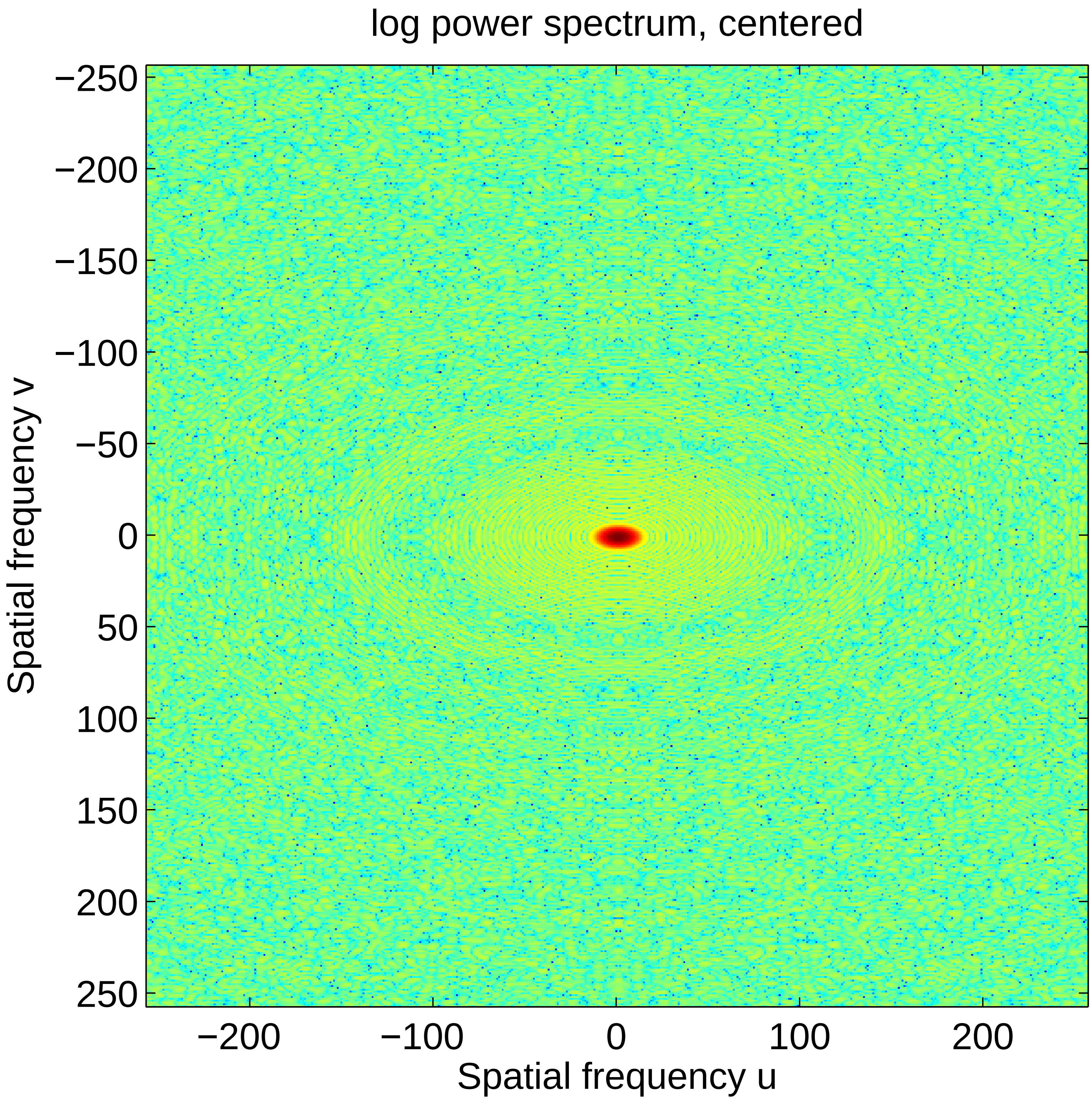


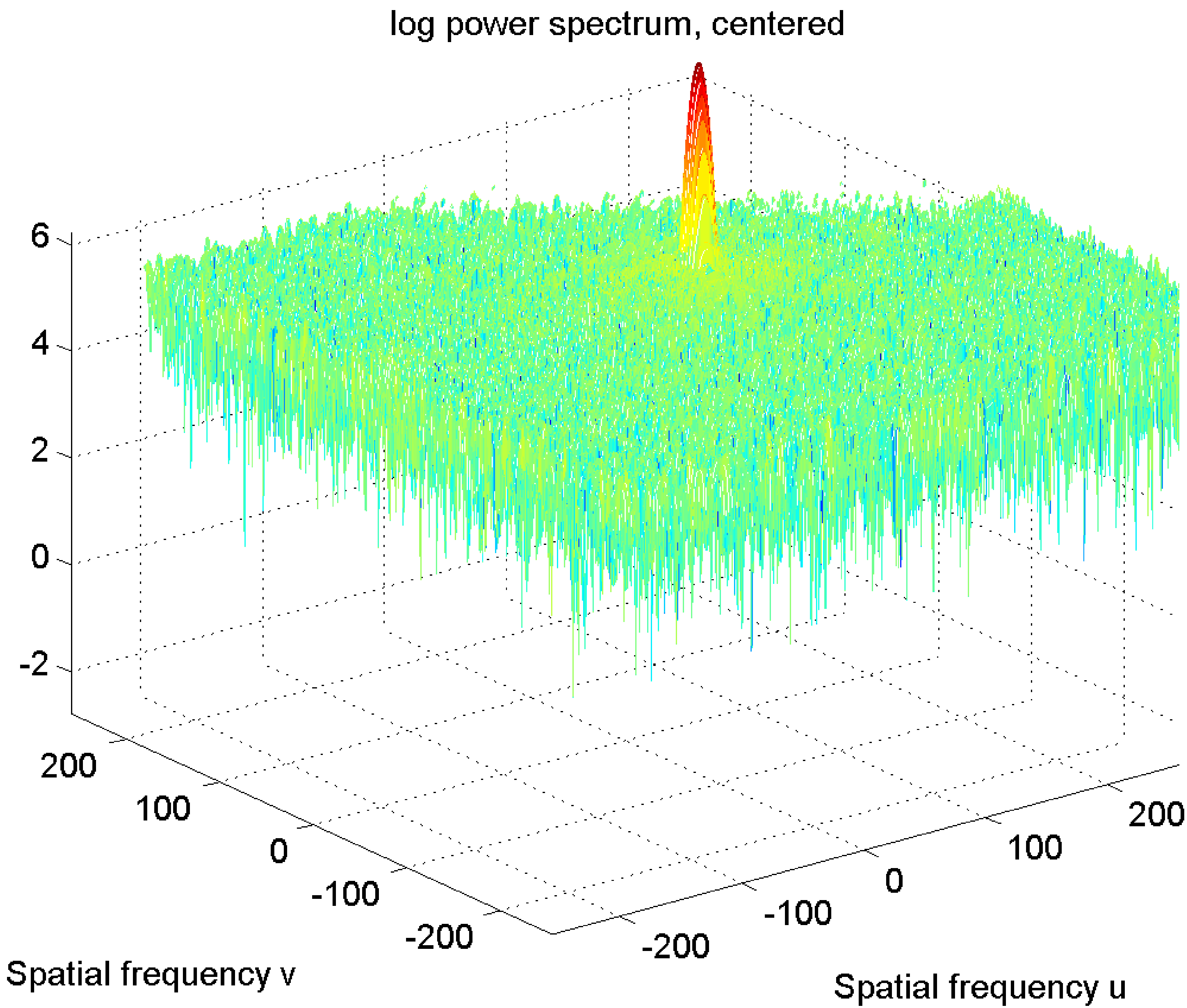
Real part of the spectrum, centered
x 10^6
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
500
400
300
200
100
Spatial frequency v
100
200
300
400
500
Spatial frequency u

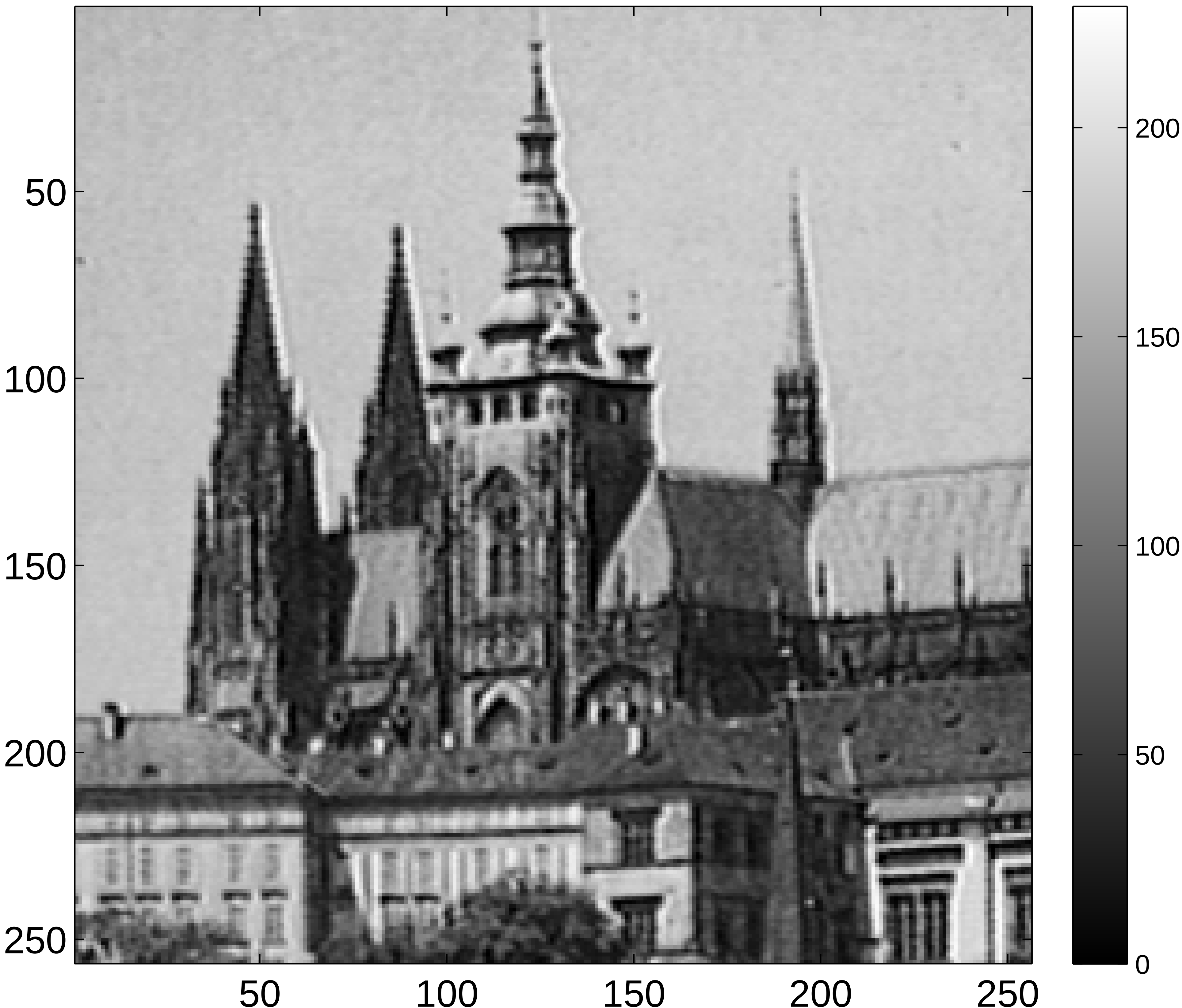

Imaginary part of the spectrum, centered
−250
−200
−150
−100
−50
0
50
100
150
200
250
Spatial frequency v
−200
−100
0
100
200
Spatial frequency u



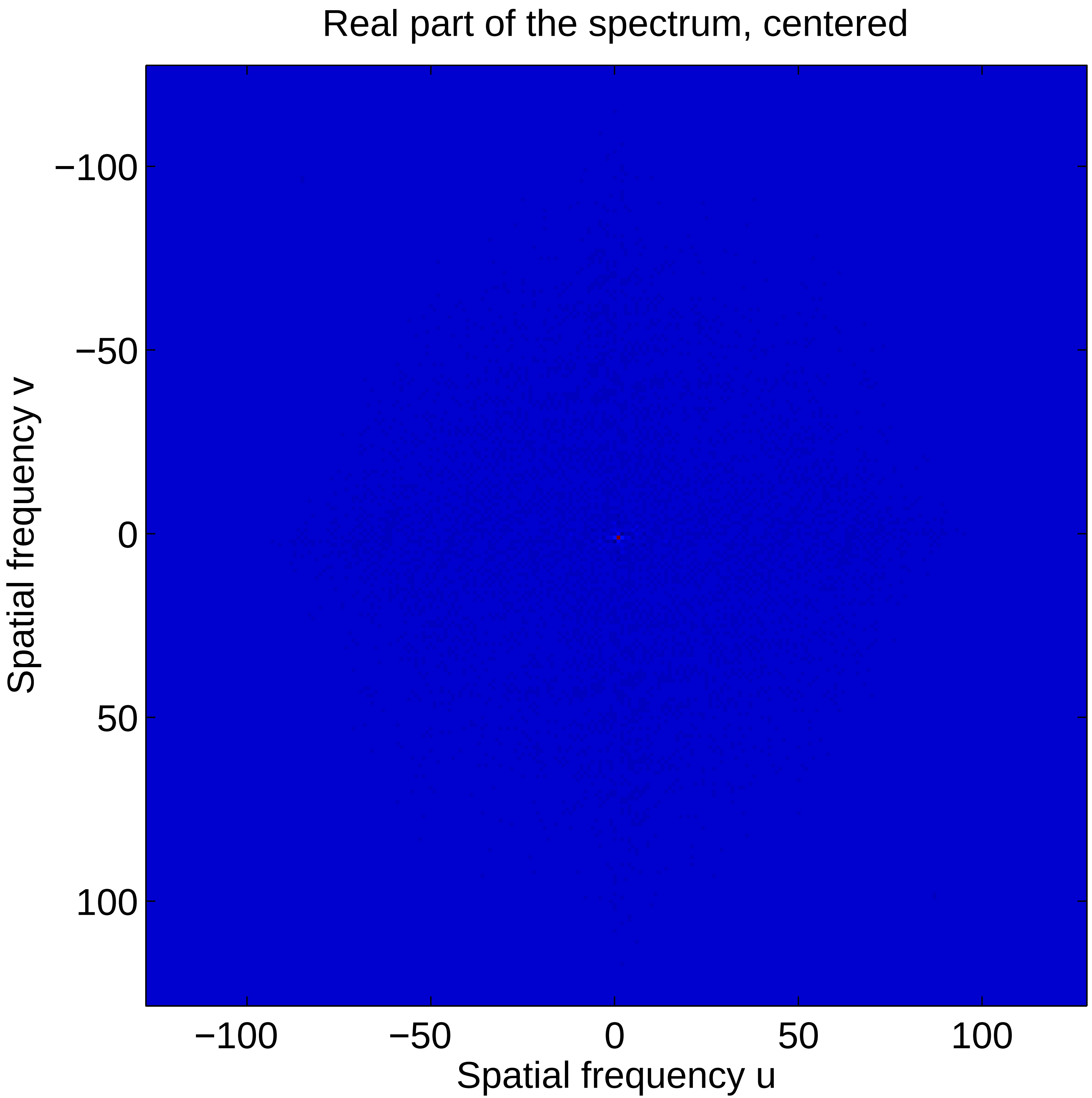
Imaginary part of the spectrum, centered
x 10^-10
1
0.5
0
-0.5
-1
500
400
300
200
100
Spatial frequency v
100
200
300
400
500
Spatial frequency u


log power spectrum, centered
−250
−200
−150
−100
−50
0
50
100
150
200
250
Spatial frequency v
−200
−100
0
100
200
Spatial frequency u

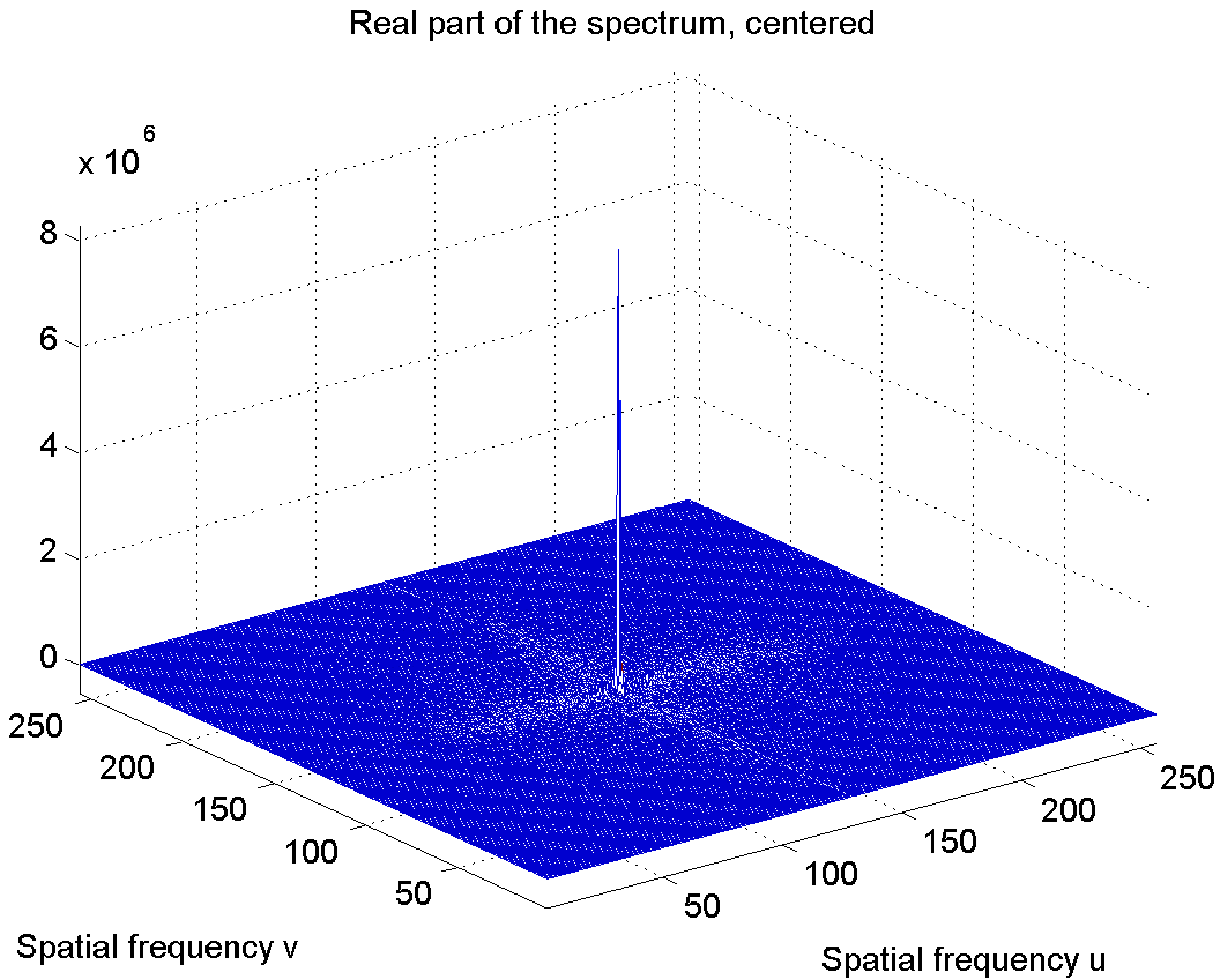

log power spectrum, centered
6
4
2
0
-2
200
100
0
-100
-200
Spatial frequency v
200
100
0
-100
-200
Spatial frequency u

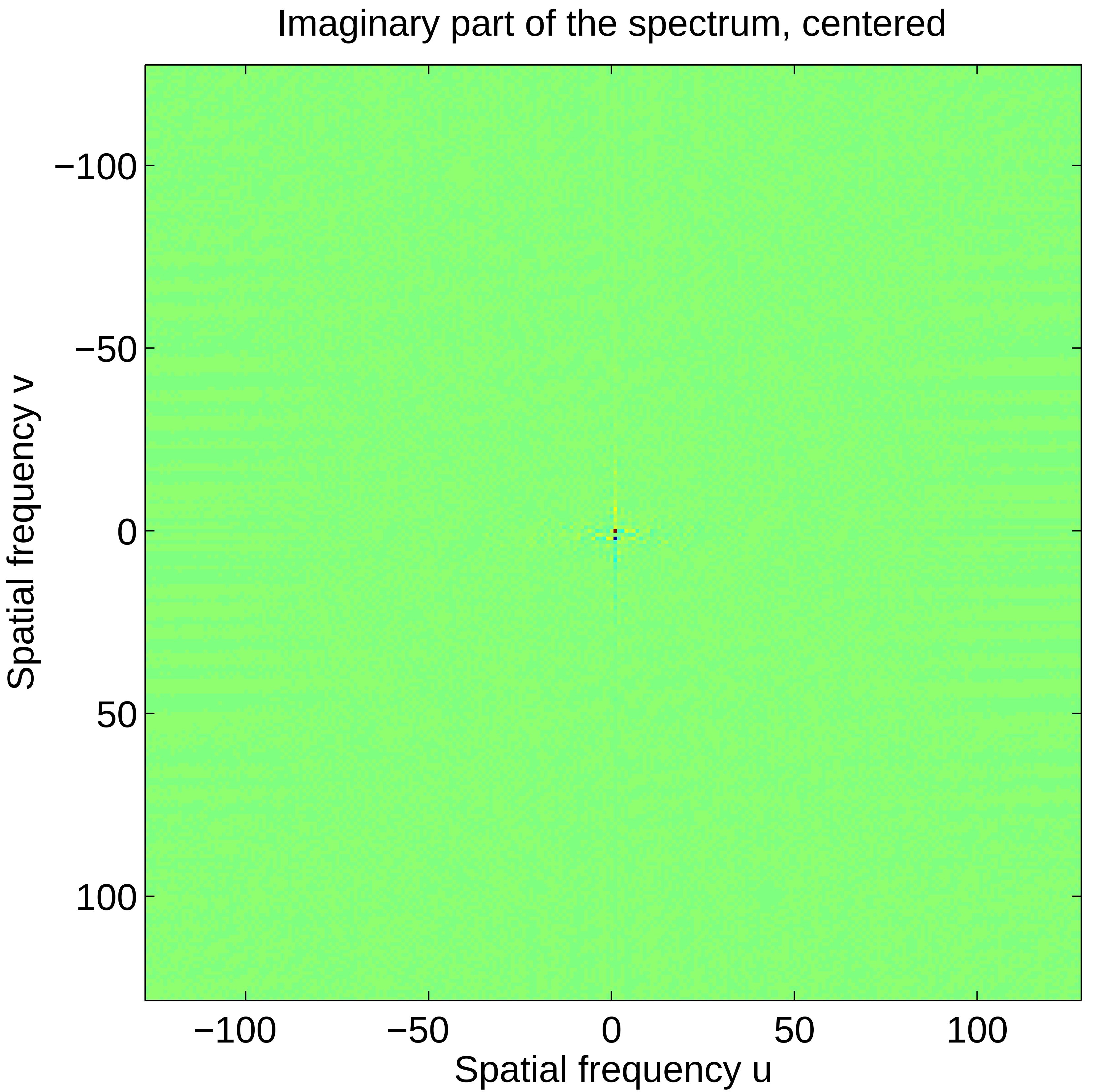


50
100
150
200
250
50
100
150
200
250
200
150
100
50
0

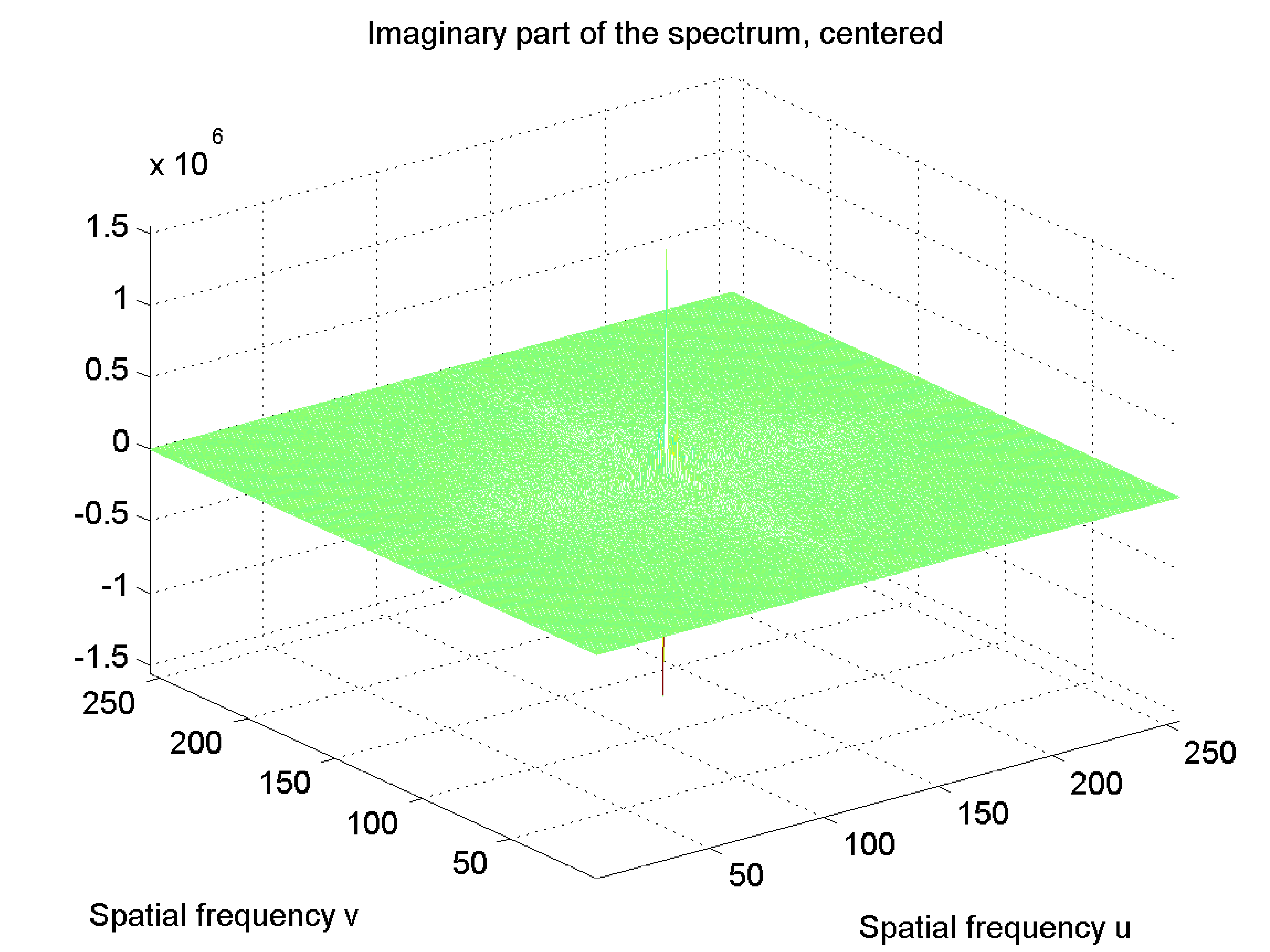


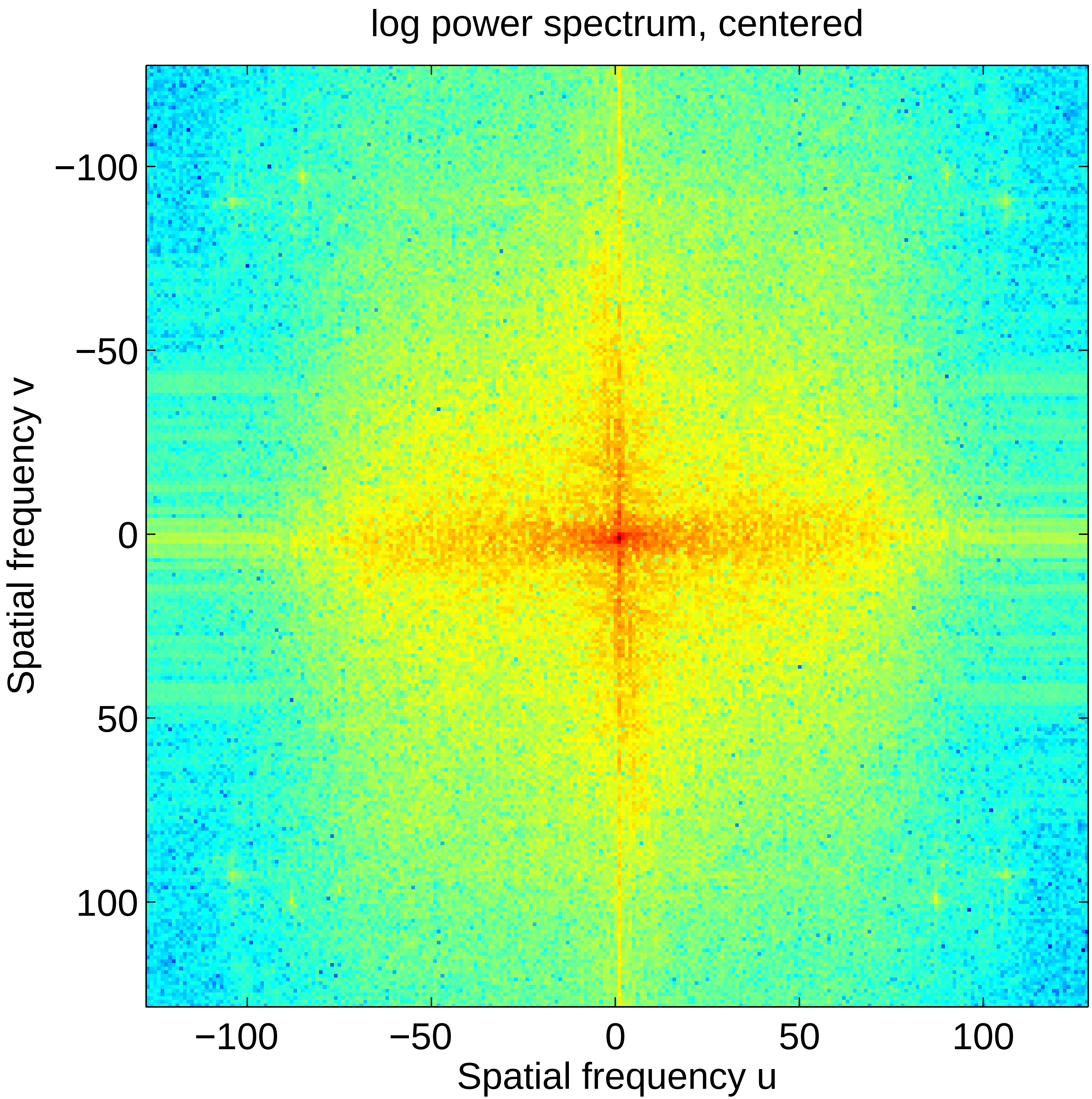
Real part of the spectrum, centered
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency v
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency u

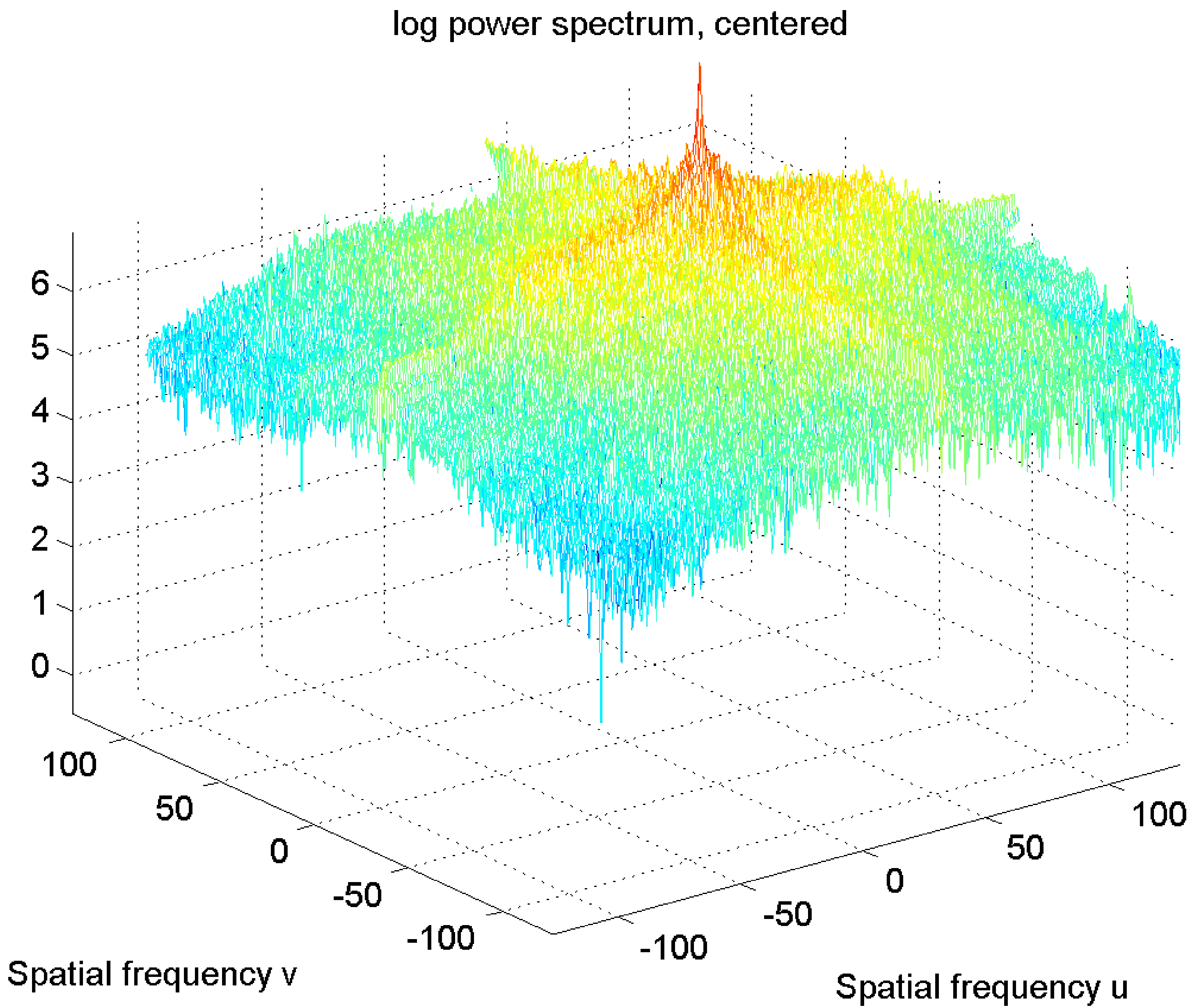

Real part of the spectrum, centered
x 10^6
8
6
4
2
0
250
200
150
100
50
Spatial frequency v
250
200
150
100
50
Spatial frequency u



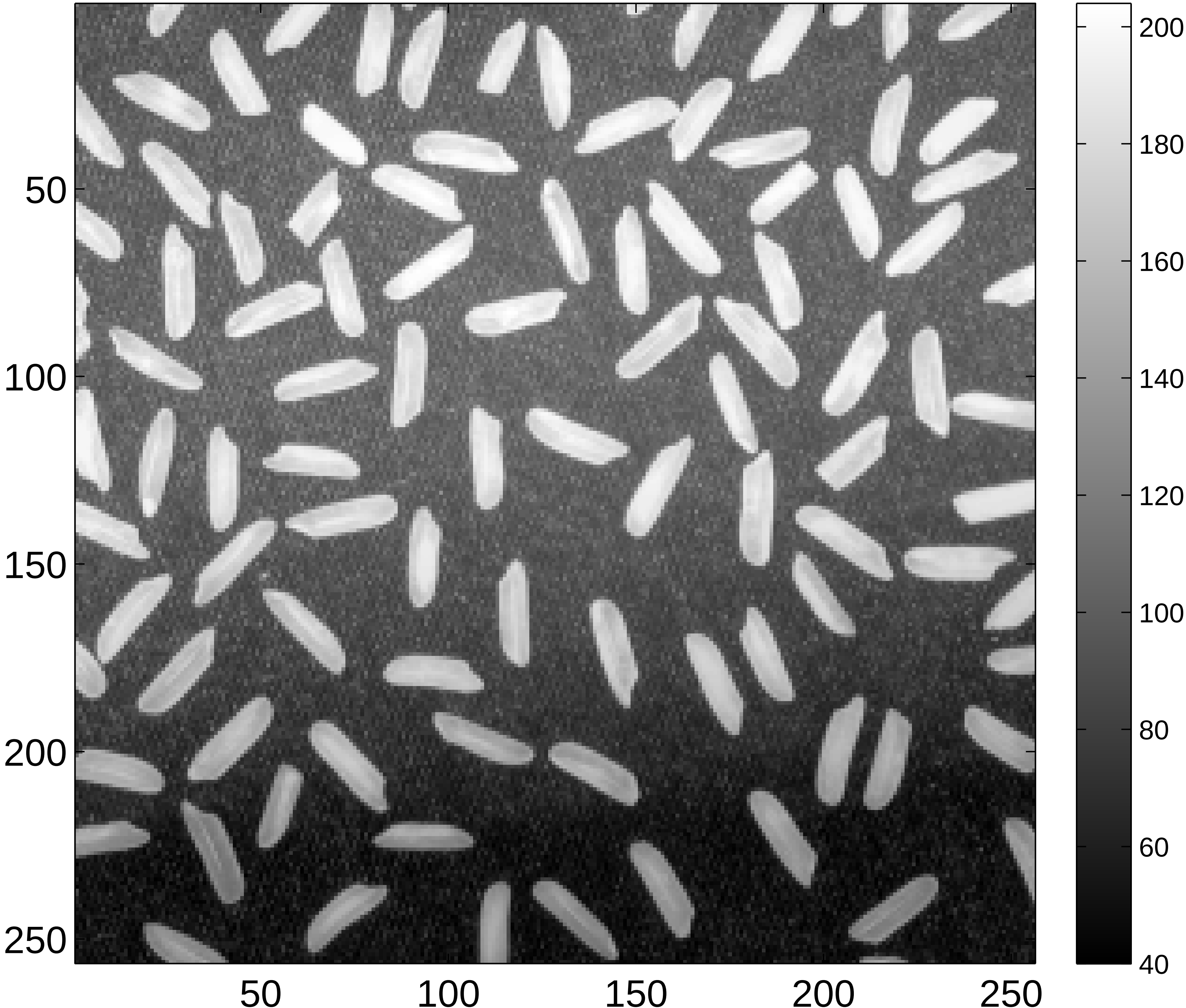
Imaginary part of the spectrum, centered
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency v
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency u


Imaginary part of the spectrum, centered
x 10^6
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
250
200
150
100
50
Spatial frequency v
50
100
150
200
250
Spatial frequency u

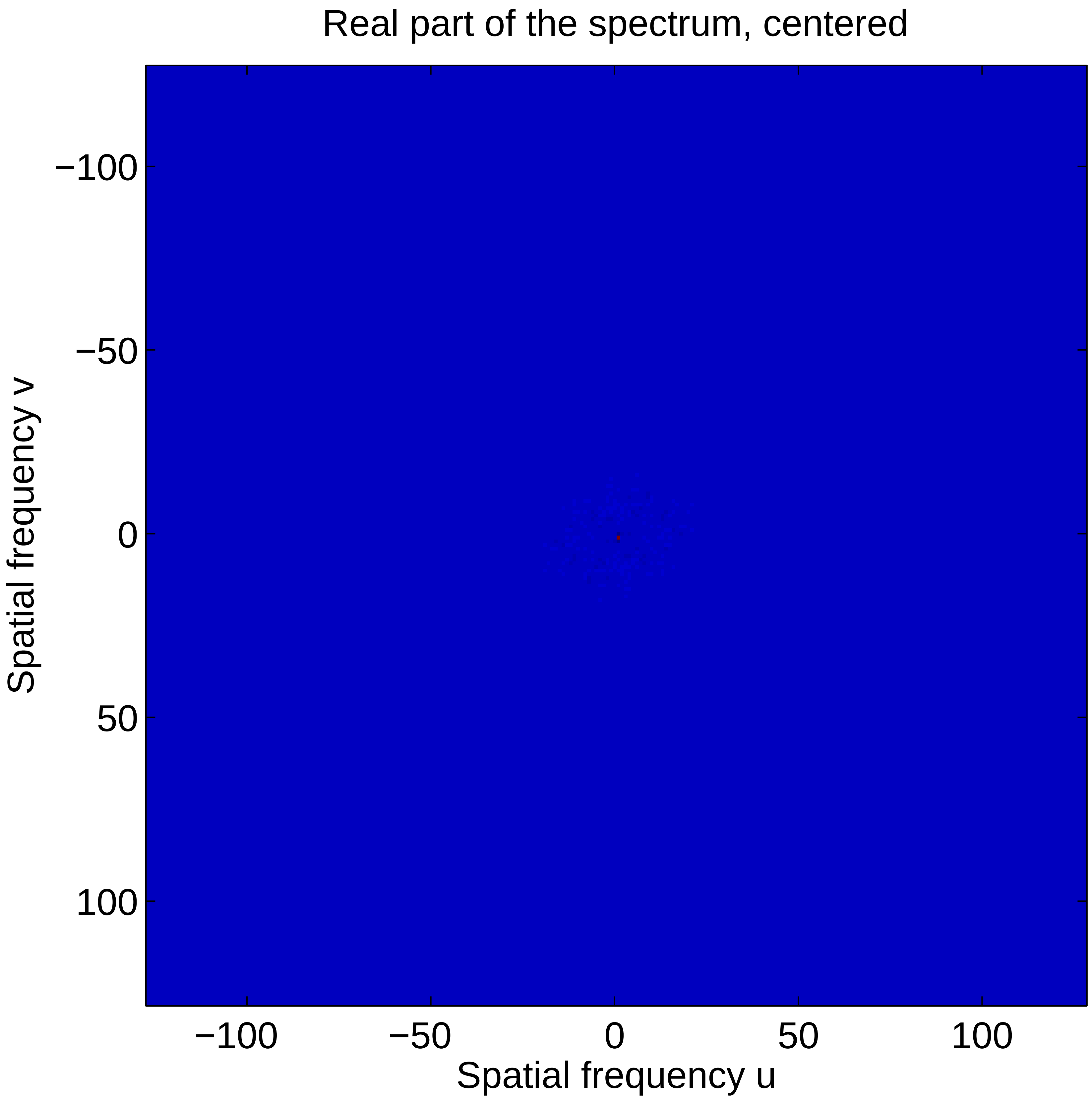

log power spectrum, centered
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency v
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency u

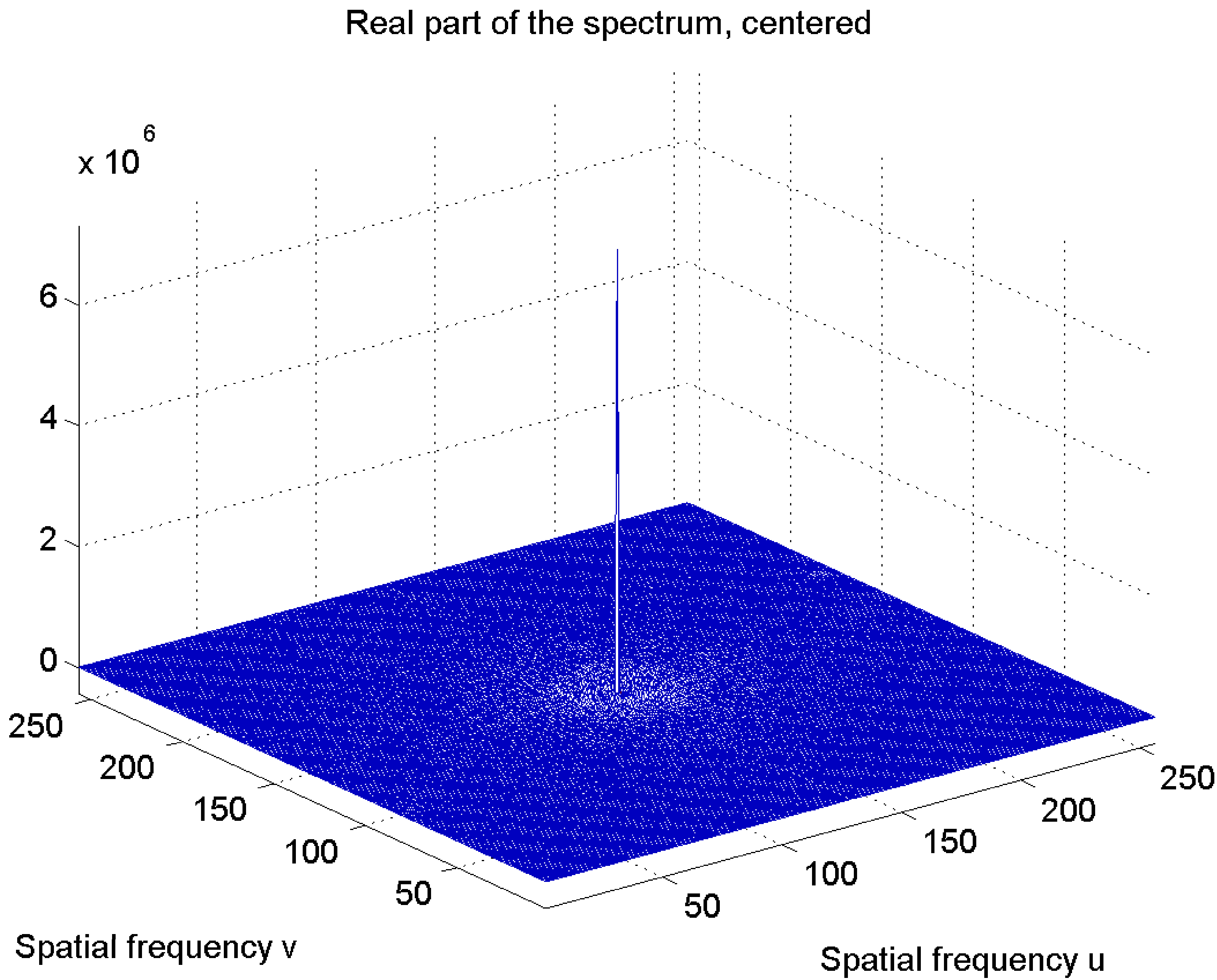


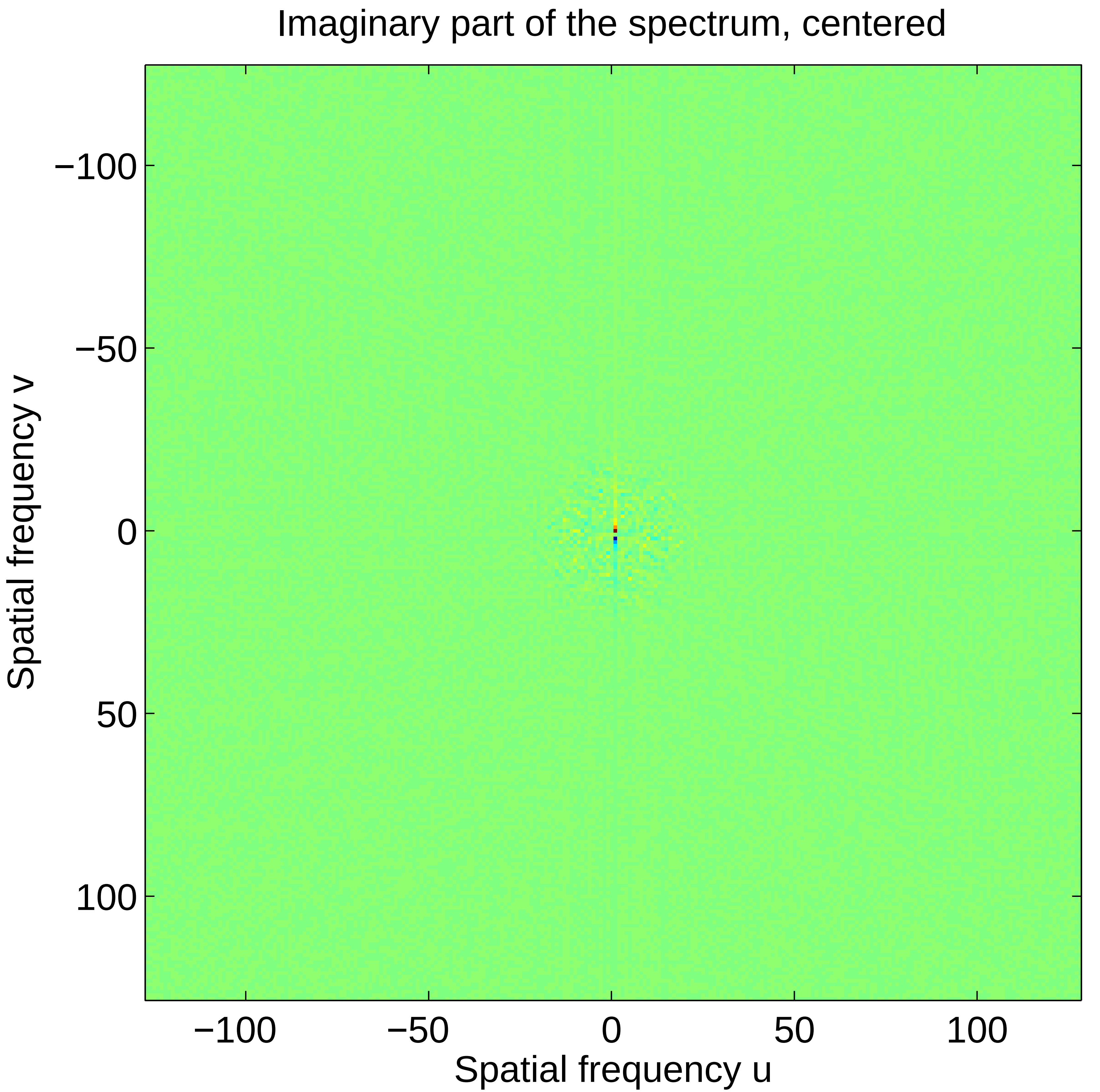
log power spectrum, centered
6
5
4
3
2
1
0
100
50
0
-50
-100
Spatial frequency v
100
50
0
-50
-100
Spatial frequency u

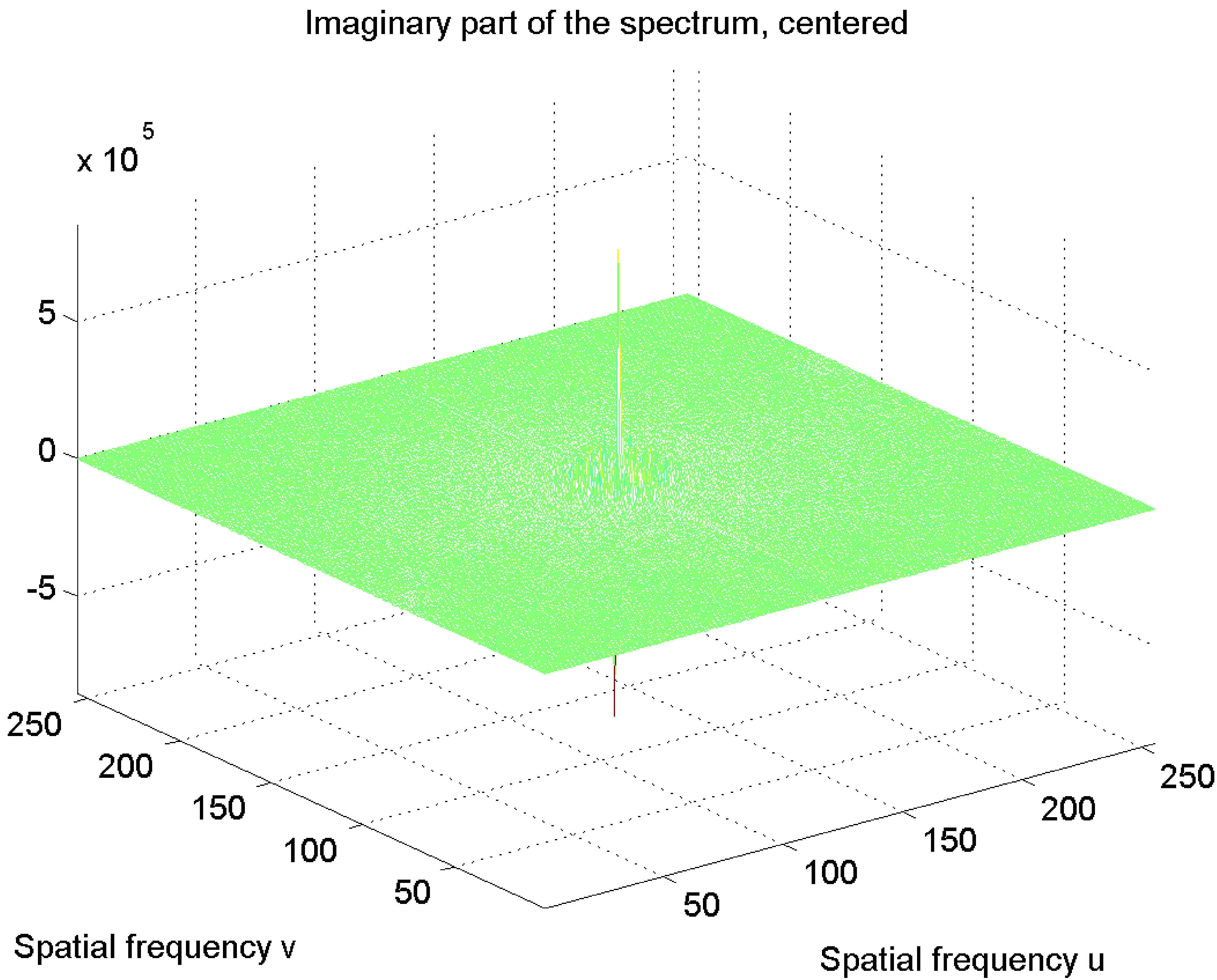


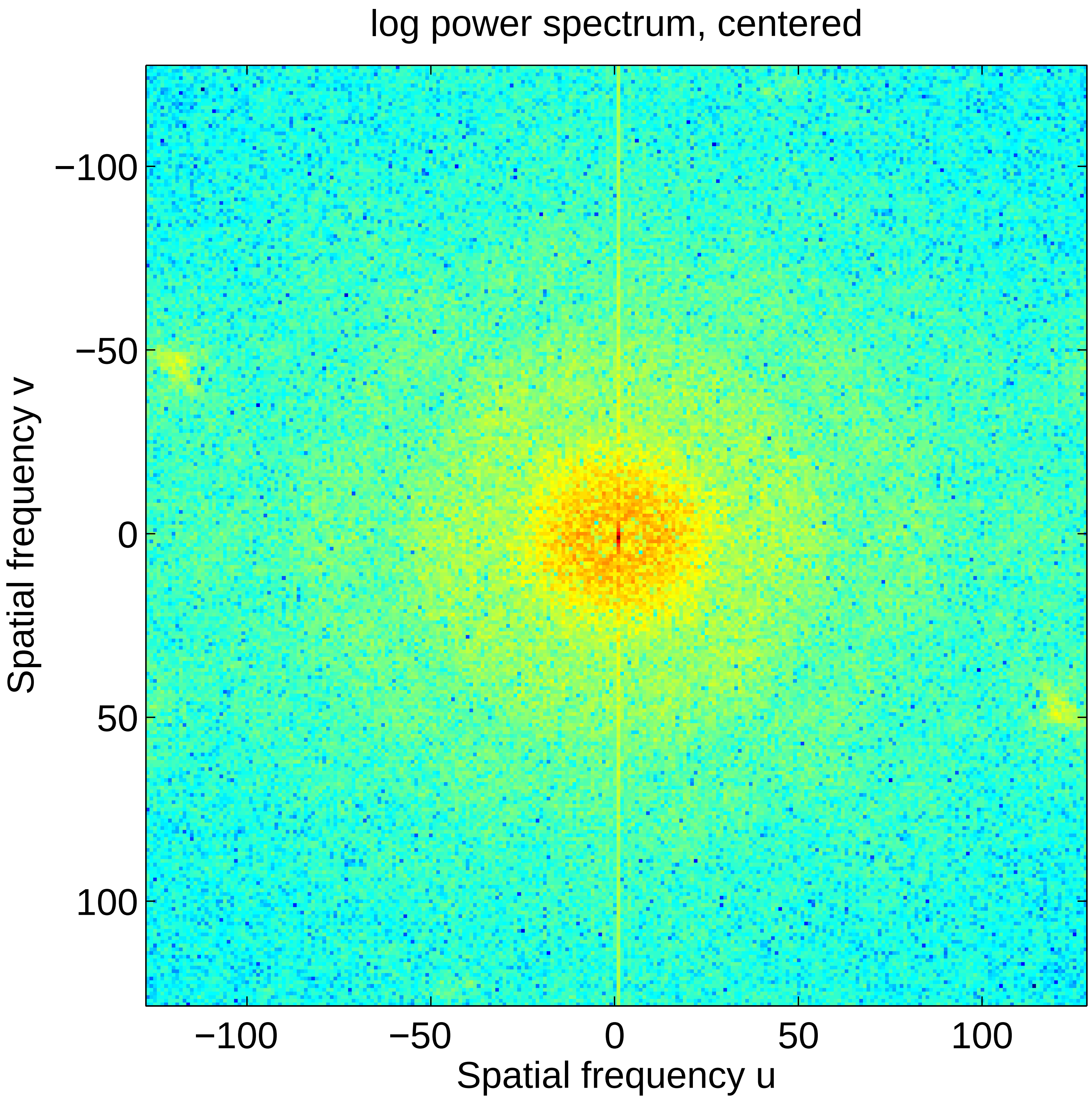
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250
200
180
160
140
120
100
80
60
40


Real part of the spectrum, centered
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency v
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency u

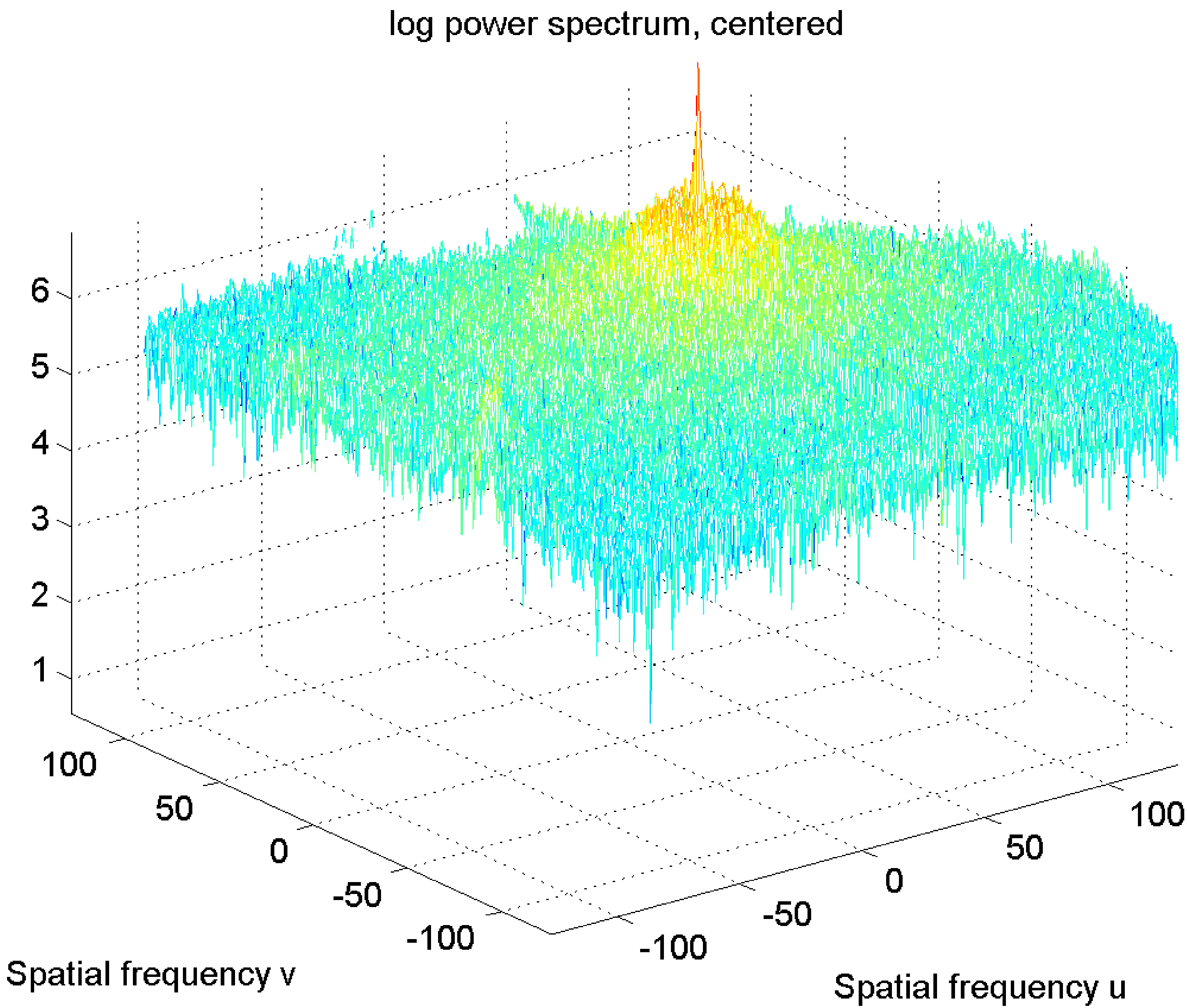

Real part of the spectrum, centered
x 10^6
6
4
2
0
250
200
150
100
50
Spatial frequency v
250
200
150
100
50
Spatial frequency u


Imaginary part of the spectrum, centered
−100
−50
0
50
100
−100
−50
0
50
100
Spatial frequency v
Spatial frequency u


Imaginary part of the spectrum, centered
x 10^5
5
0
-5
250
200
150
100
50
Spatial frequency v
50
100
150
200
250
Spatial frequency u

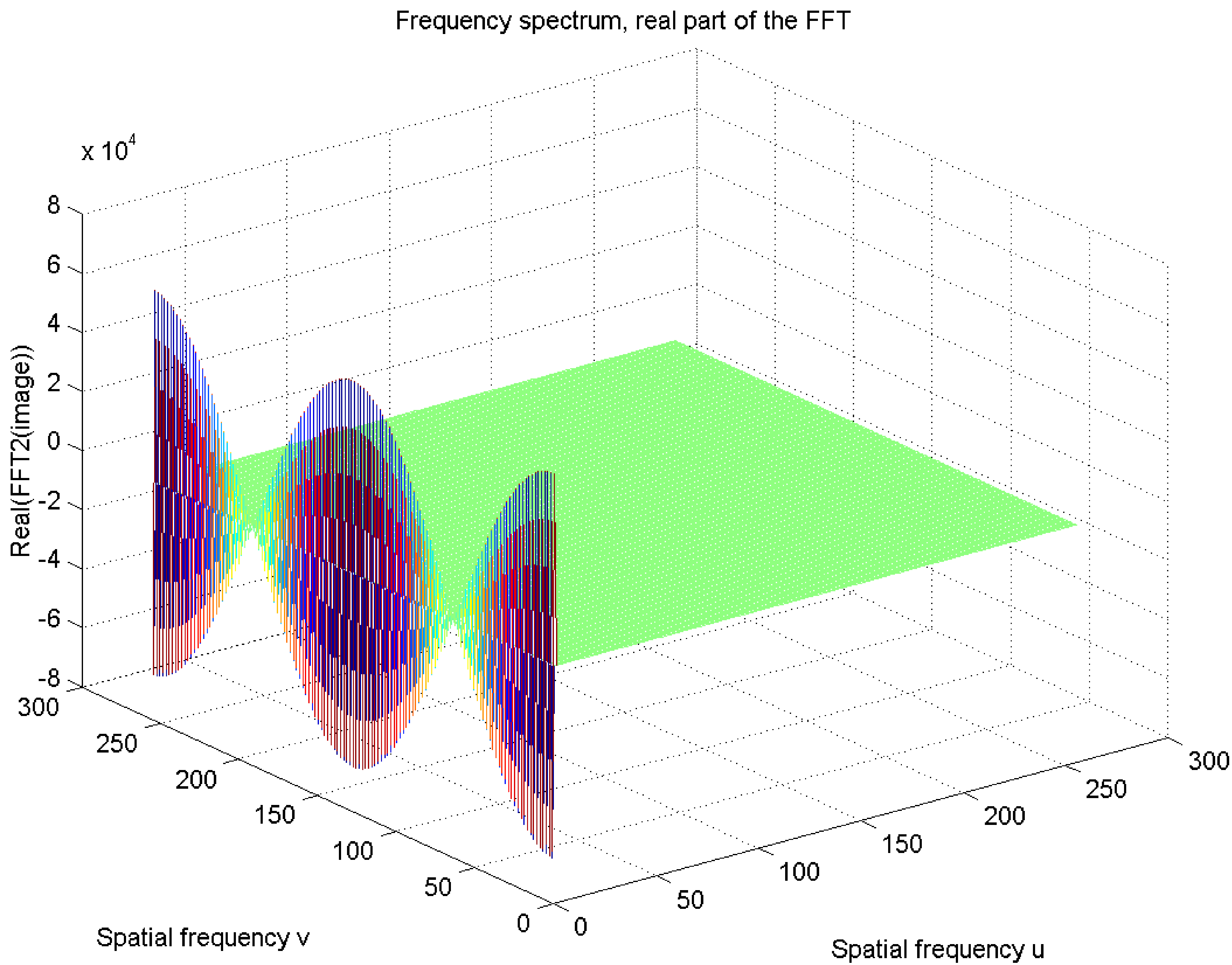


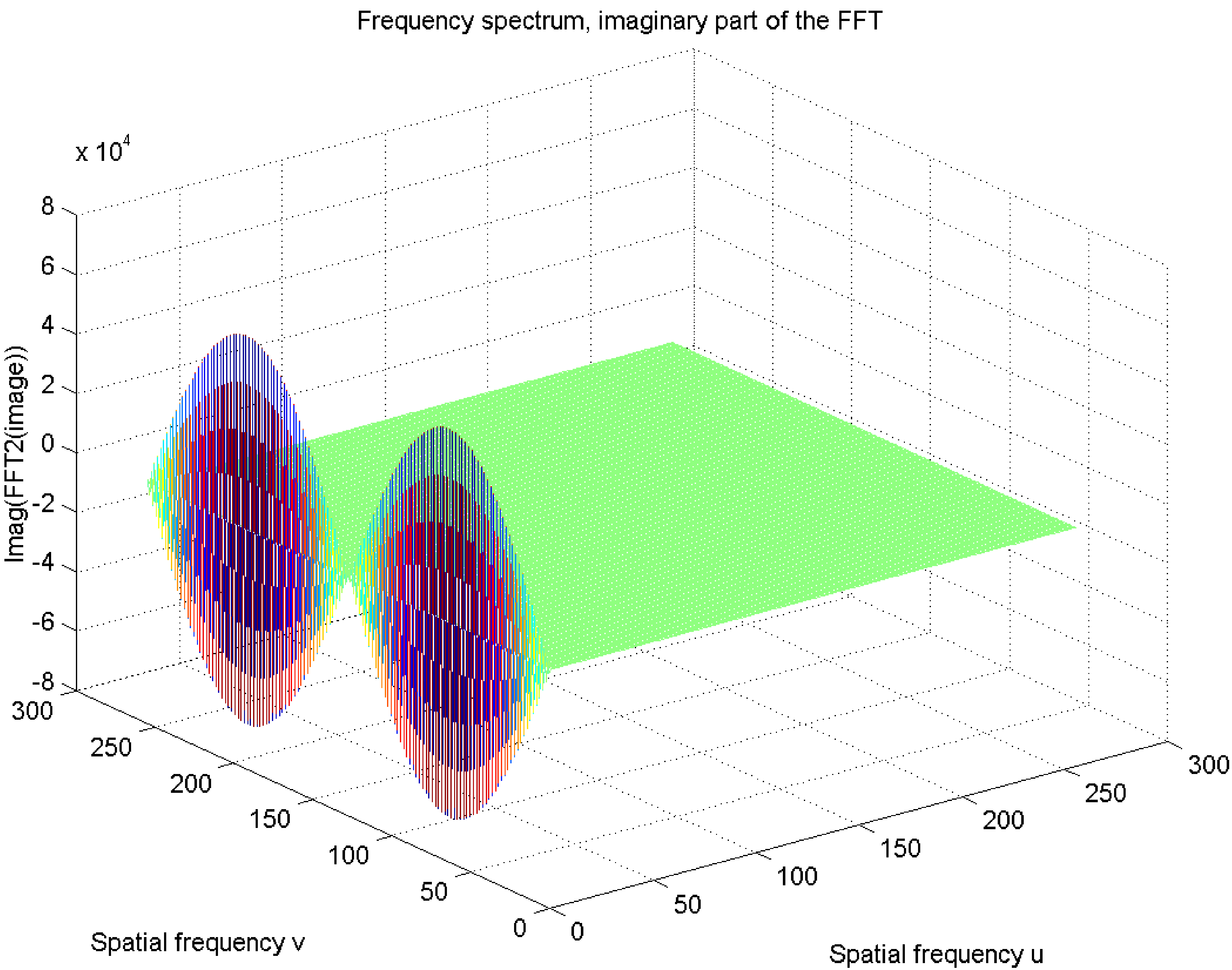
log power spectrum, centered
Spatial frequency v
Spatial frequency u
−100
−50
0
50
100

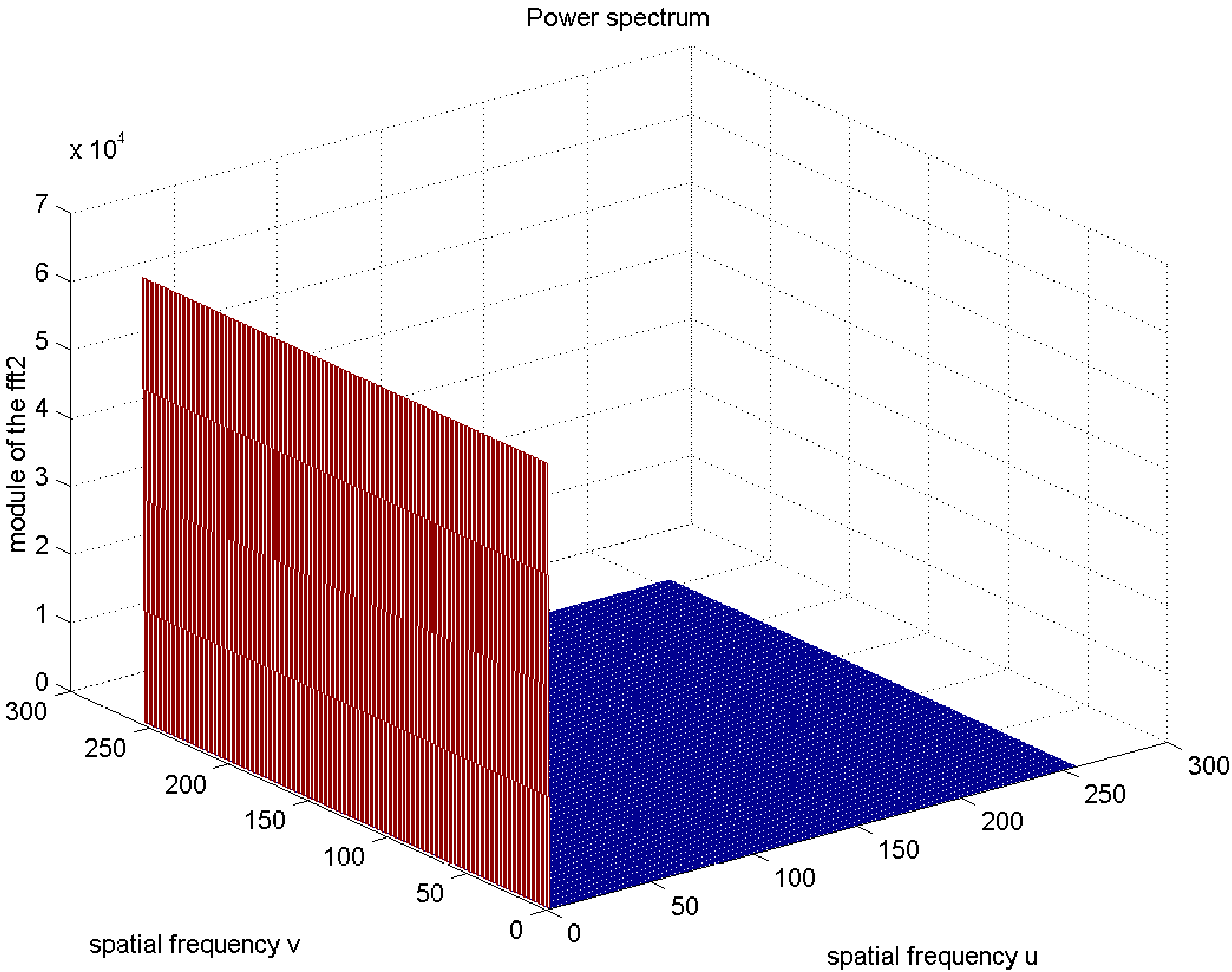

log power spectrum, centered
6
5
4
3
2
1
100
50
0
-50
-100
Spatial frequency v
-100
-50
0
50
100
Spatial frequency u

[redacted]

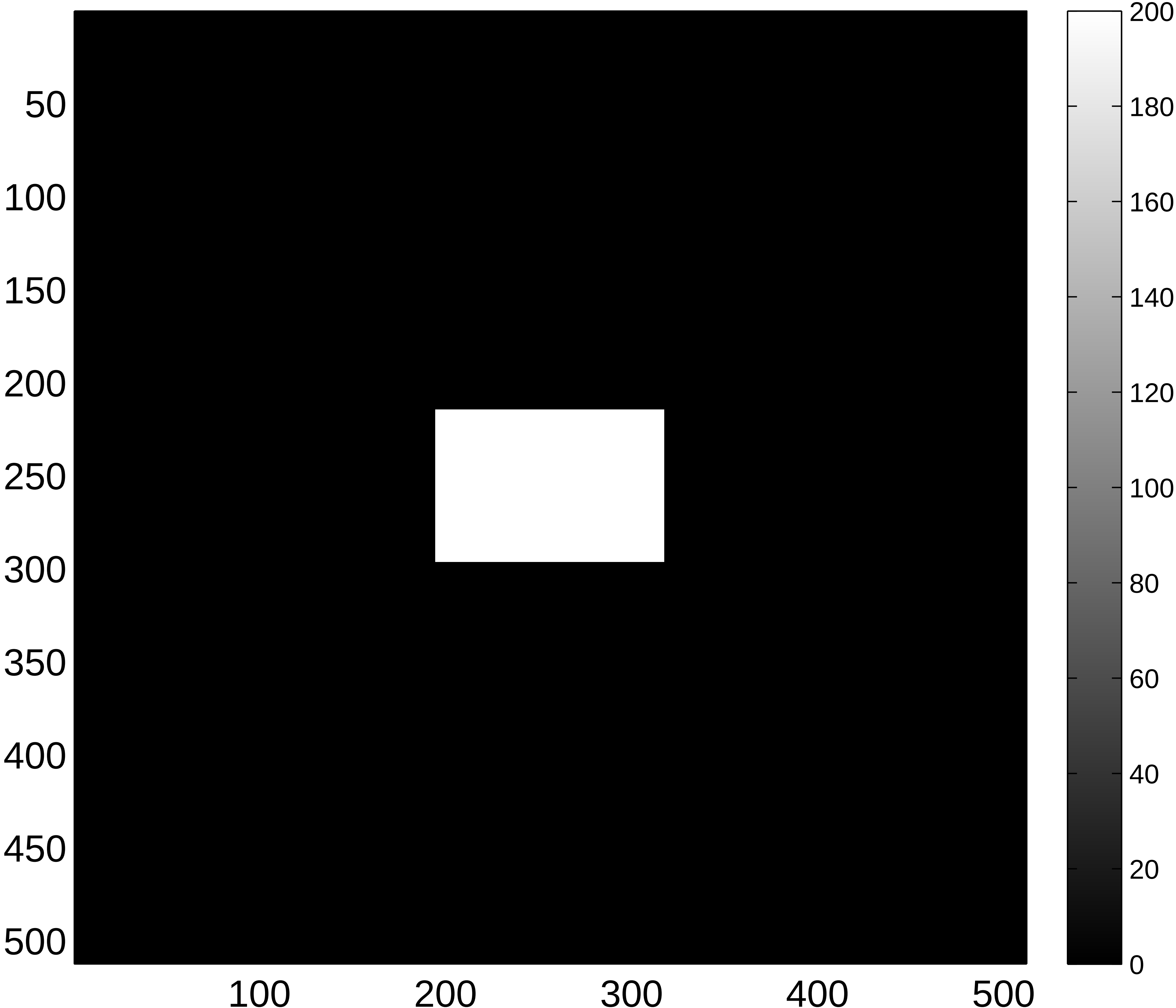
[redacted]

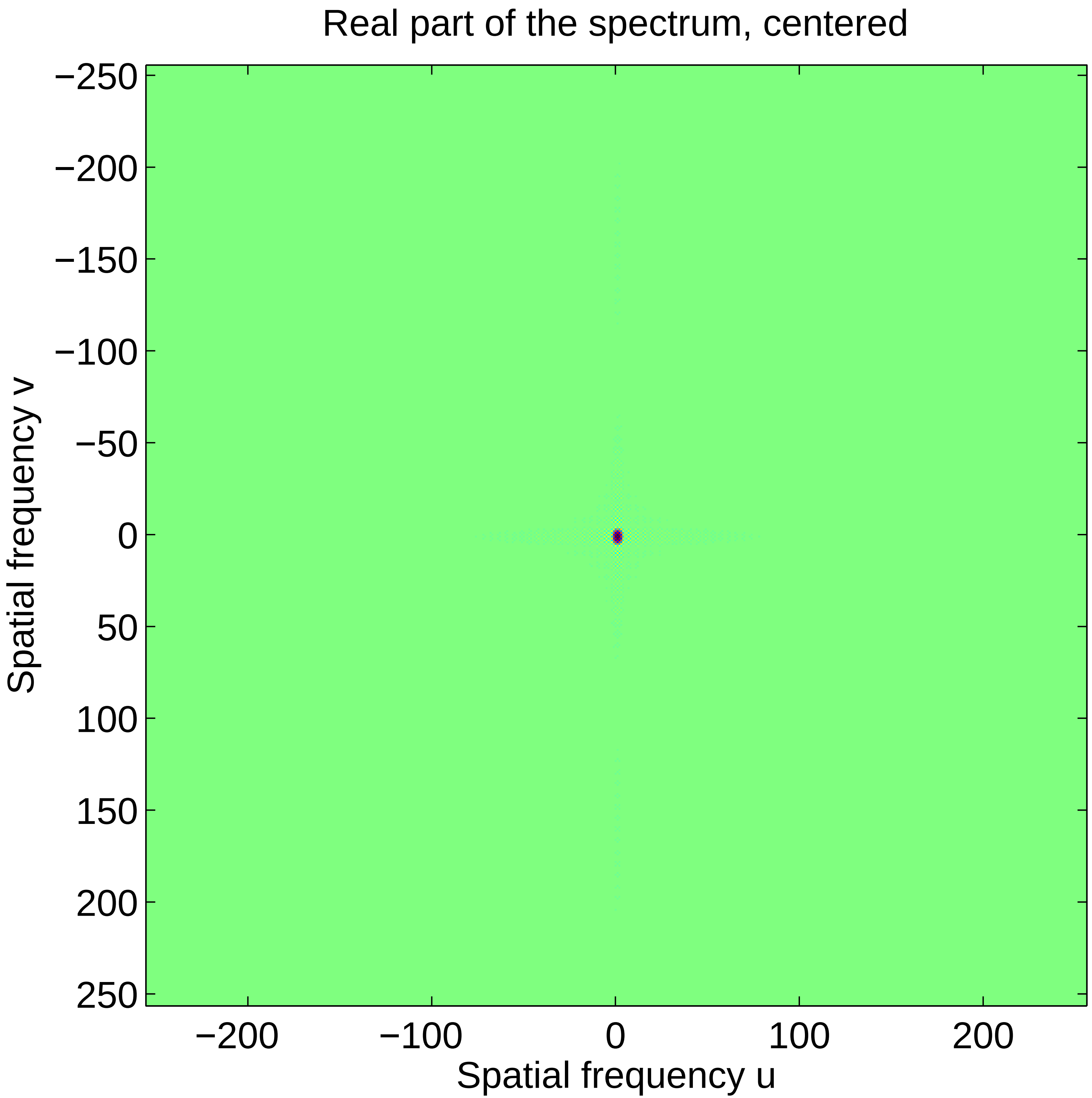

Frequency spectrum, real part of the FFT
x 10^4
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
Real(FFT2(image))
300
250
200
150
100
50
0
Spatial frequency v
0
50
100
150
200
250
300
Spatial frequency u

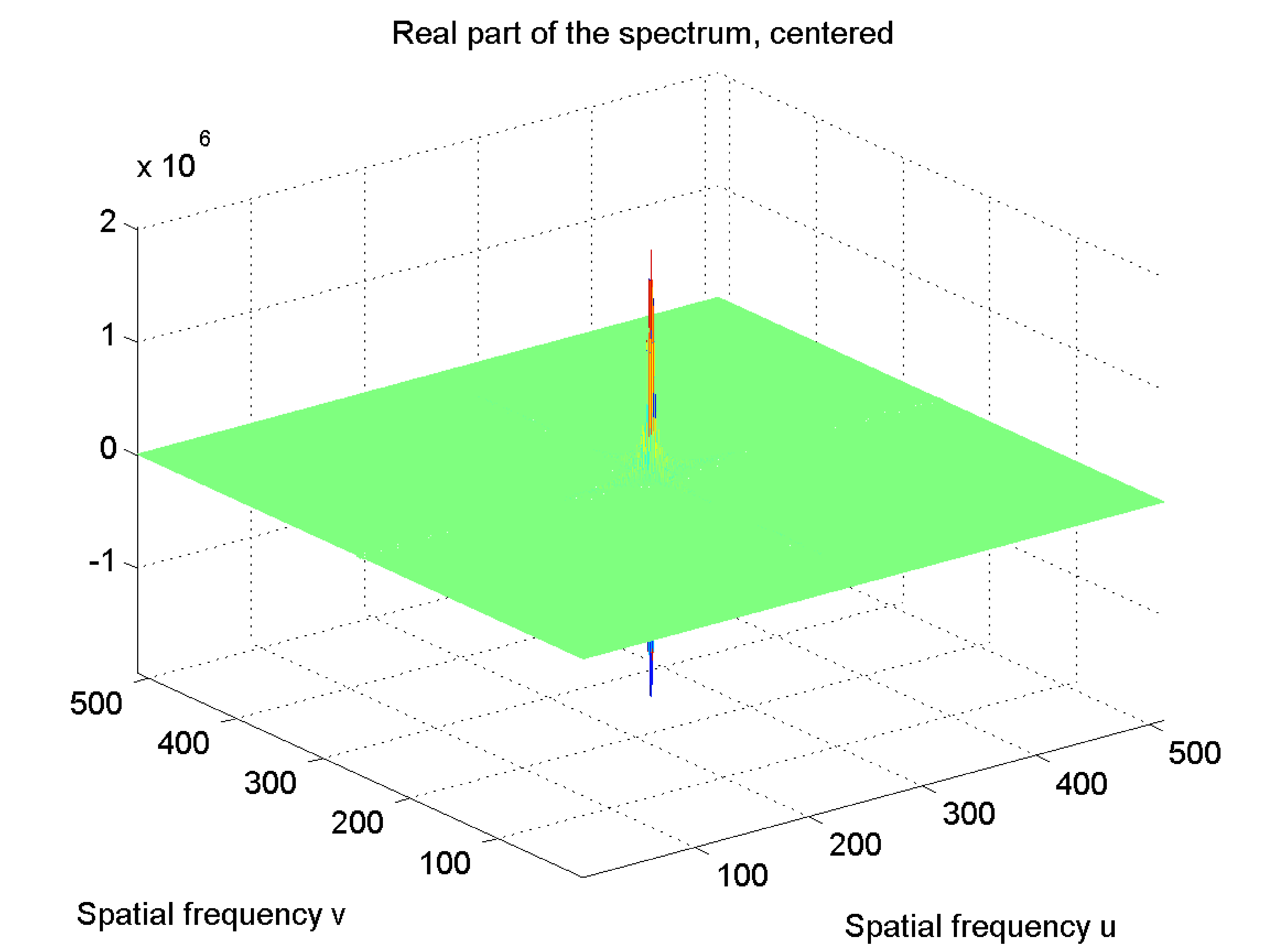

Frequency spectrum, imaginary part of the FFT
x 10^4
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
Imag(FFT2(image))
300
250
200
150
100
50
0
Spatial frequency v
0
50
100
150
200
250
300
Spatial frequency u



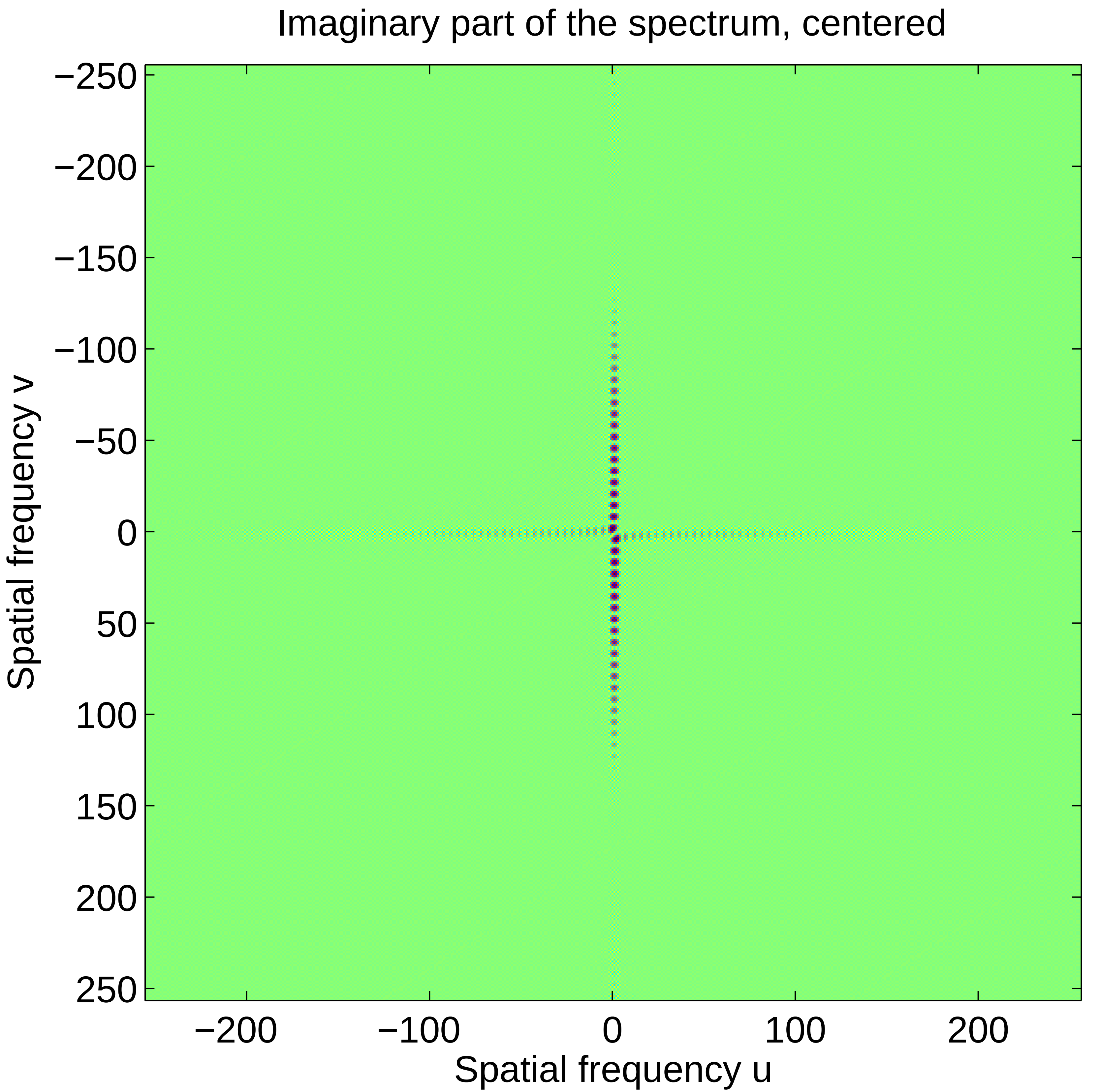
Power spectrum
x 10^4
module of the fft2
0
1
2
3
4
5
6
7
300
250
200
150
100
50
0
spatial frequency v
0
50
100
150
200
250
300
spatial frequency u

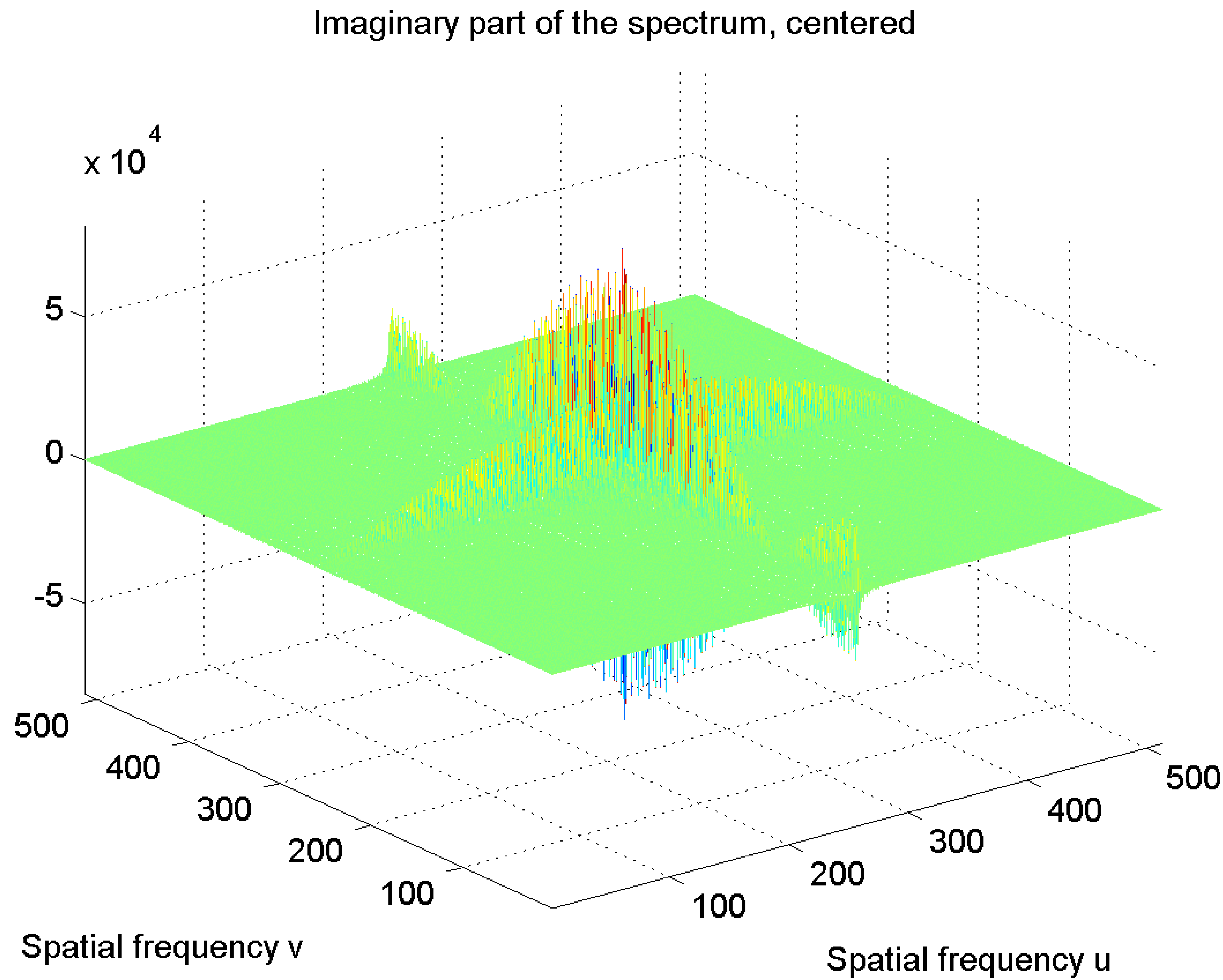

50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
100
200
300
400
500
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0

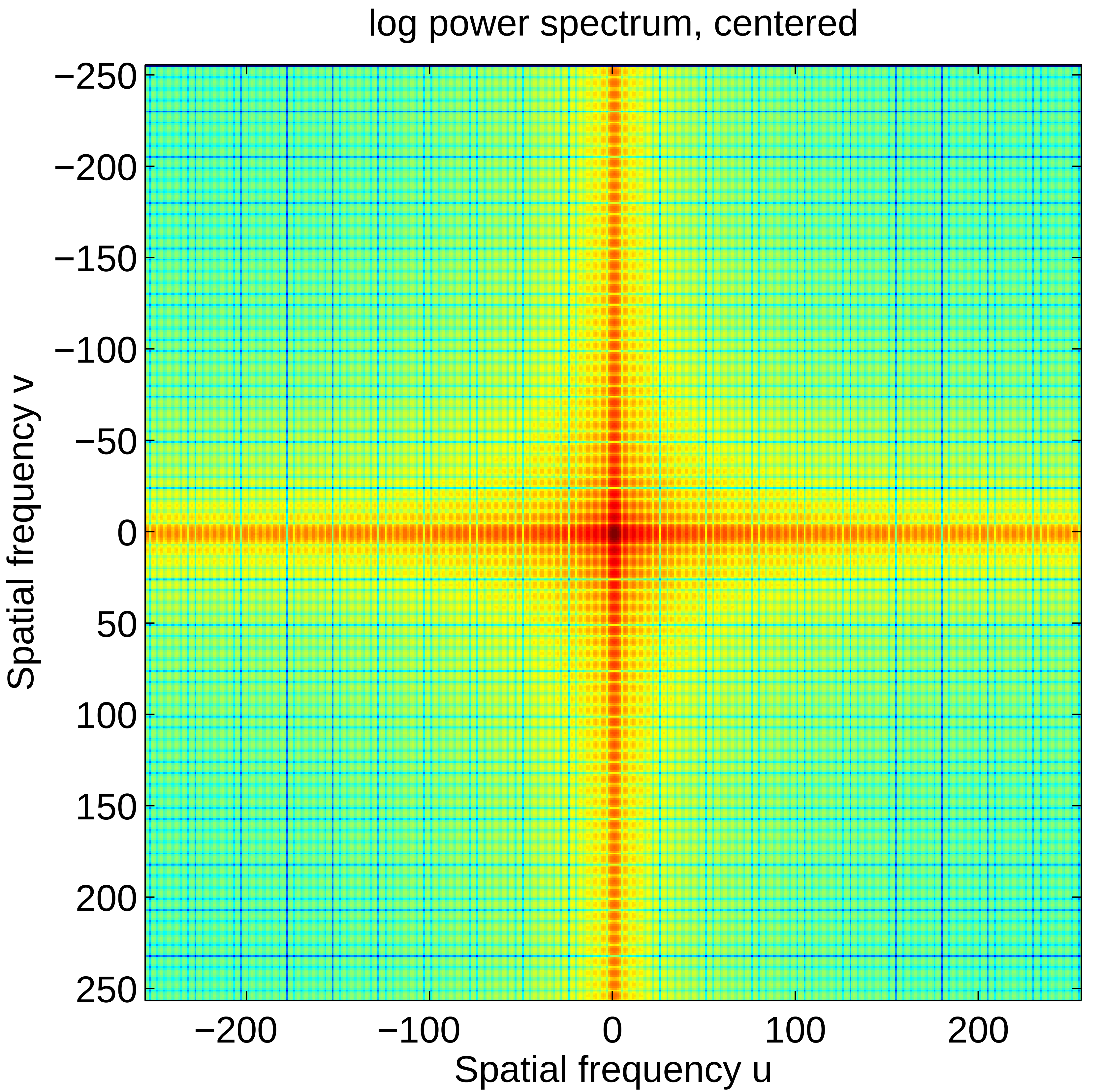

Real part of the spectrum, centered
−250
−200
−150
−100
−50
0
50
100
150
200
250
Spatial frequency v
−200
−100
0
100
200
Spatial frequency u

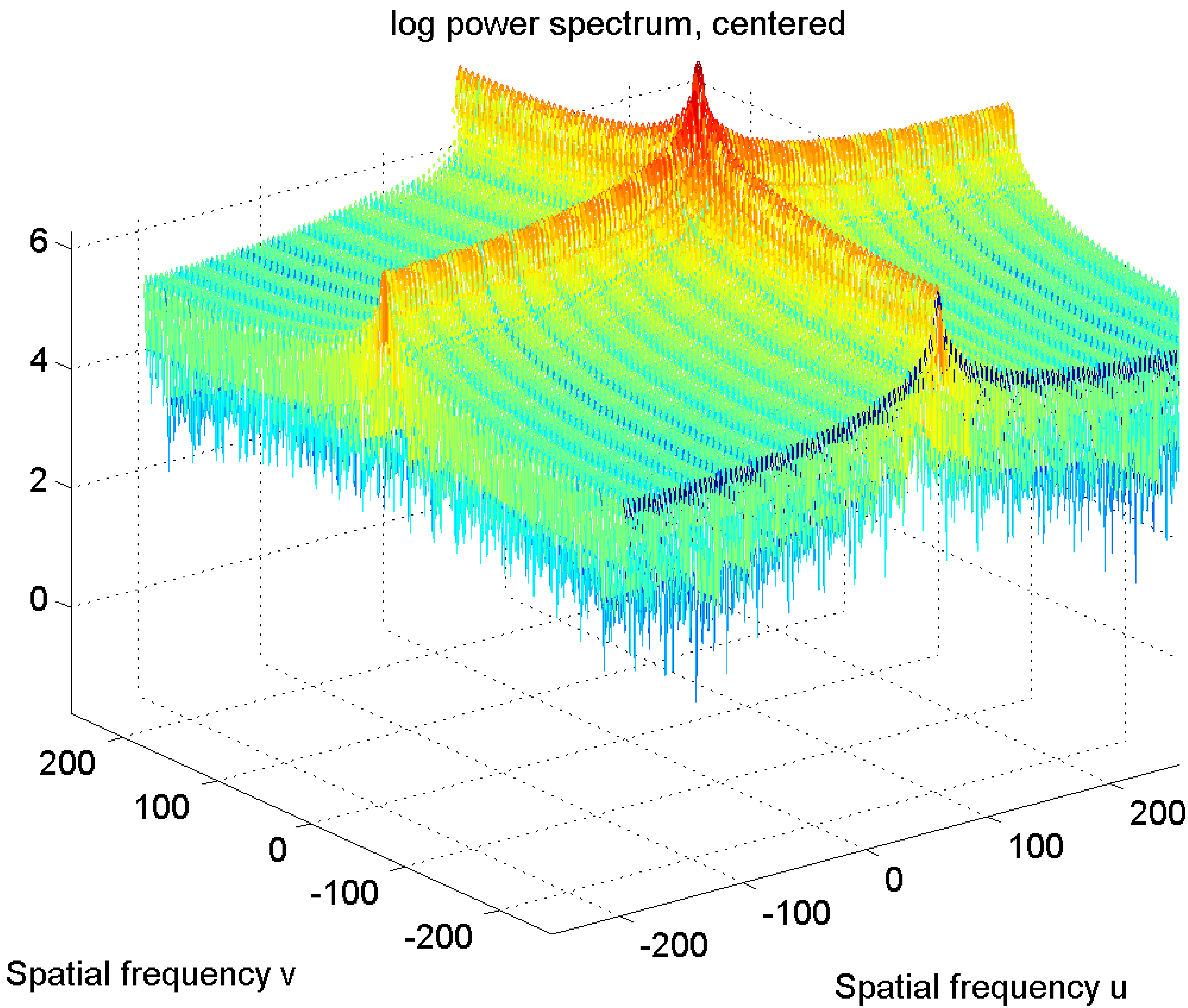


Real part of the spectrum, centered
x 10^6
2
1
0
-1
500
400
300
200
100
Spatial frequency v
100
200
300
400
500
Spatial frequency u


Imaginary part of the spectrum, centered
−250
−200
−150
−100
−50
0
50
100
150
200
250
Spatial frequency v
−200
−100
0
100
200
Spatial frequency u


Imaginary part of the spectrum, centered
x 10^4
5
0
-5
500
400
300
200
100
Spatial frequency v
100
200
300
400
500
Spatial frequency u


log power spectrum, centered
−250
−200
−150
−100
−50
0
50
100
150
200
250
Spatial frequency v
−200
−100
0
100
200
Spatial frequency u


log power spectrum, centered
6
4
2
0
200
100
0
-100
-200
Spatial frequency v
200
100
0
-100
-200
Spatial frequency u