Rozhodování za neurčitosti – jednotlivá rozhodnutí

Jiří Kléma

Katedra počítačů,
FEL, ČVUT v Praze

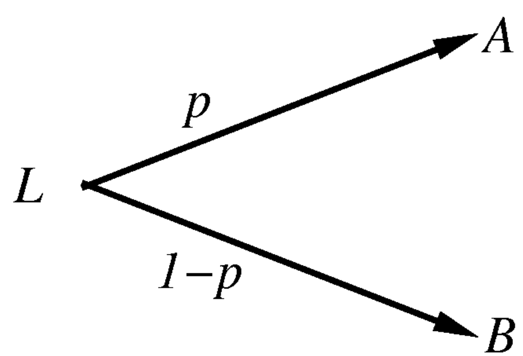
http://cw.felk.cvut.cz/doku.php/courses/a4b33zui/start

Plán přednášky

- Umělí agenti s promyšleným a účelným rozhodováním (**racionální**)
  - jak je definovat,
  - jak se vyrovnat s nejistými výsledky akcí,
  - teorie rozhodování v kombinaci s teorií užitku,
  - pojmy: prémie, loterie, funkce užitku, přednost,
- rozumné a promyšlené rozhodování lidí
  - chovají se lidé při rozhodování rozumně?
  - peníze jako příklad ordinální míry užitku,
- multiatributový užitek
  - v obecném případě nelze odděleně hodnotit každý stav,
  - přednost a užitek se odvozuje od příznaků/atributů,
- hodnota informace
  - kdy se vyplatí vynaložit úsilí na její získání.

Formalizace světa, základní pojmy

- agent rozlišuje mezi **stavy** světa $\{s_1, \ldots, s_n\}$,
- každý stav světa lze ohodnotit **prémií** $\{A, B, \ldots\}$,
- stavy světa agent ovlivňuje provedením **akcí** $\{a_1, \ldots, a_m\}$,
  - akce jsou stochastické, nelze předem jednoznačně určit výsledný stav,
  - **loterie** $L_a = [p, A; (1-p), B]$
    - akce a vede s pstí p do stavu s prémií A, s $p - 1$ do stavu s prémií B,
  - loterie bez prvku náhody odpovídá přímo prémii,
- racionalita: cílem agenta je zvolit akci vedoucí k nejvyšší prémii.



Přednosti

- Jaký je význam prémie?
  - v obecném případě nemusí být číselná,
  - stačí symbolické prémie s relacemi **přednosti** (preferences)

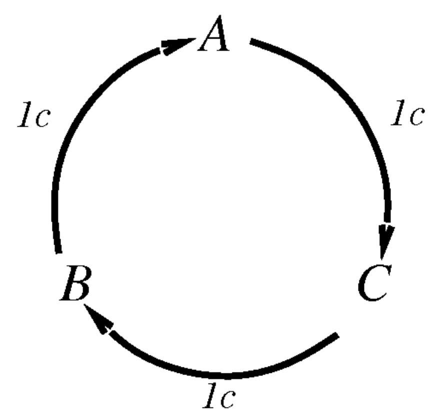
    $A \succ B$ ... A má přednost před B,

    $A \sim B$ ... A a B jsou nerozlišitelné,

    $A \succeq B$ ... B nemá přednost před A,
- relace přednosti rozumného agenta musí splnit jistá **omezení** (constraints)
  - uspořádatelnost: $(A \succ B) \vee (B \succ A) \vee (A \sim B)$,
  - tranzitivitu: $(A \succ B) \wedge (B \succ C) \Rightarrow (A \succ C)$,
  - spojitost: $A \succ B \succ C \Rightarrow \exists p\ [p, A;\ 1-p, C] \sim B$,
  - nahraditelnost: $A \sim B \Rightarrow [p, A;\ 1-p, C] \sim [p, B; 1-p, C]$,
  - monotónnost: $A \succ B \Rightarrow (p > q \Leftrightarrow [p, A;\ 1-p, B] \succ [q, A;\ 1-q, B])$,
  - rozložitelnost: $[p, A;\ 1-p, [q, B;\ 1-q, C]] \sim [p, A;\ (1-p)q, B;\ (1-p)(1-q), C]$.

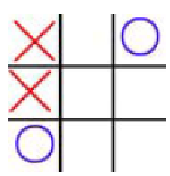
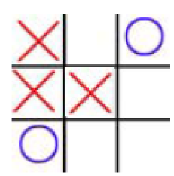
Tranzitivita přednosti jako nutná podmínka rozumnosti

- Porušení omezení vede k nerozumnému chování,
- příklad: agent s netranzitivní předností přijde o všechny své peníze
  - mějme agenta s přednostmi $A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$,
  - agent smění svou prémii C za cizí B a přidá (libovolně) malý doplatek c,
  - následně smění svou prémii B za cizí A a opět přidá c,
  - po směně A za cizí C s doplatkem je ve výchozím stavu chudší o $3c$.



Maximalizace středního užitku

- von Neumann-Morgensternův teorém
  - pro přednosti splňující omezení existuje reálná funkce **užitku** (utility) U
    $U(A) \geq U(B) \Leftrightarrow A \succeq B$
    (zachováme uspořádání prémií),
    $U([p_1, S_1; \ldots; p_n, S_n]) = \sum_i p_i U(S_i)$
    (užitek loterie vyčíslíme jako střední užitek),
- princip maximalizace středního užitku
  - z více akcí (tj. i loterií) volíme tu, která maximalizuje střední užitek,
- (explicitní) zavedení užitku není nutnou podmínkou racionality
  - např. strategie agenta jako vyhledávací tabulka.

Stav	**Optimální akce**
	

Od předností k funkci užitku

- Fce užitku mapuje prémie (a tím i stavy) na reálná čísla
  - musí zachovat jejich lineární uspořádání dané přednostmi,
  - lze najít nekonečné množství funkcí vedoucích k identickému chování,
  - u deterministických prostředí (bez loterií) jde o jedinou podmínku

    $A \prec B \sim C \preceq D$ lze převést na U_1, U_2 s identickým chováním agenta

	A	B	C	D
U_1	1	2	2	3
U_2	-1	2	2	1000

  - u loterií je chování agenta neměnné při lineární transformaci fce užitku

    $\forall k_1 > 0 \; U_2(x) = k_1 U_1(x) + k_2$,
  - U_1 a U_2 z tabulky výše nejsou lineárně převoditelné

    a také mj. zaměňují přednosti loterií $[0.5, A; 0.5, B]$ a $[0.9, A; 0.1, D]$,

Od předností k funkci užitku

- stadardizace zavedením normalizovaného užitku
  - nejlepší možný užitek $u_\top = 1.0$, nejhorší katastrofa $u_\perp = 0.0$,
  - mezilehlou prémii A ohodnotíme užitkem p tak, aby
    $A \sim [p, u_\top; (1-p), u_\perp]$.
- ilustrace: nekonečný užitek a vězňův paradox.

Lidé jako “racionální” agenti řízení penězi

- Petrohradský paradox (Bernoulli, 1738)
- kolik jste ochotni zaplatit jako vstupní poplatek za následující hru?
  - protihráč opakovaně hází standardní mincí dokud nepadne první hlava,
  - n je počet hodů, získáte 2^n Kč, hra tím končí,

Lidé jako “racionální” agenti řízení penězi

- Petrohradský paradox (Bernoulli, 1738)
- kolik jste ochotni zaplatit jako vstupní poplatek za následující hru?
  - protihráč opakovaně hází standardní mincí dokud nepadne první hlava,
  - n je počet hodů, získáte 2^n Kč, hra tím končí,
- měli byste být ochotni vložit jakoukoli konečnou sumu
  - použijeme von Neumann-Morgensternův teorém
    $U(phrad) = U([p(h_1), U(h_1); p(h_2), U(h_2); \ldots]) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} 2^i = \infty$
- to je ale racionální pro málokoho
  - Bernoulli paradox vyřešil tím, že užitek peněz transformoval logaritmicky
    $U(k) = \log_2 k$
    $U(phrad) = U([p(h_1), U(h_1); \ldots]) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \log_2 2^i = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots = 2$
  - zpětnou transformací získáváme cenu hry: $2 = \log_2 k \Rightarrow k = 4$ Kč.

Lidé jako "racionální" agenti řízení peněz

- experiment Tverskyho a Kahnemana (1982)
- volte mezi loteriemi L_1 a L_2, následně mezi loteriemi L_3 a L_4

Volba 1	Volba 2
$L_1 = [0.8, 80000Kc; 0.2, 0]$	$L_3 = [0.2, 80000Kc; 0.8, 0]$
$L_2 = [1, 60000Kc]$	$L_4 = [0.25, 60000Kc; 0.75, 0]$

Lidé jako “racionální” agenti řízení peněz

- experiment Tverskyho a Kahnemana (1982)
- volte mezi loteriemi L_1 a L_2, následně mezi loteriemi L_3 a L_4

Volba 1	Volba 2
$L_1 = [0.8, 80000Kc; 0.2, 0]$	$L_3 = [0.2, 80000Kc; 0.8, 0]$
$L_2 = [1, 60000Kc]$	$L_4 = [0.25, 60000Kc; 0.75, 0]$

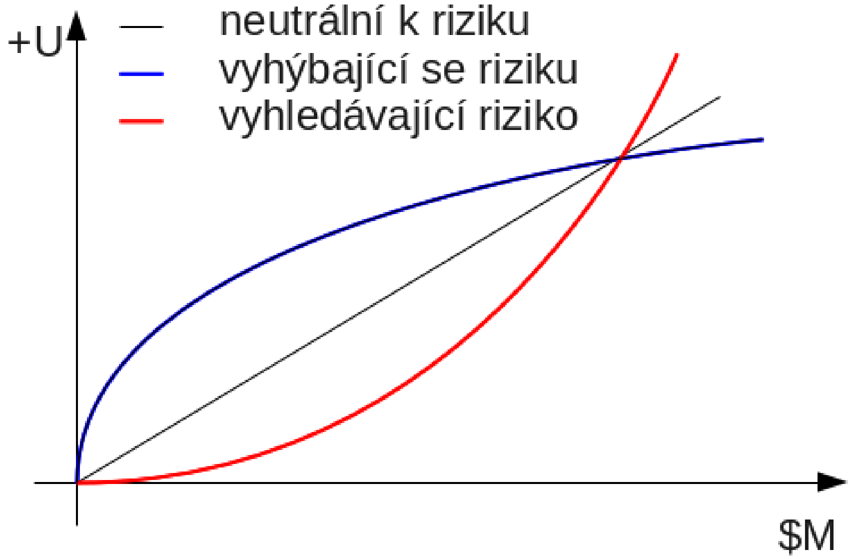
- většina lidí upřednostní loterii L_2 před L_1 a L_3 před L_4
  - z hlediska racionality podivné, za předpokladu $U(0Kc) = 0$ platí současně
    volba 1: $0.8U(80000Kc) < U(60000Kc)$,
    volba 2: $0.8U(80000Kc) > U(60000Kc)$,
  - neexistuje žádná funkce užitku konzistentní s oběma volbami,
- možný závěr
  - lidé jsou iracionální, snaží se vyhnout riziku u pravděpodobných událostí,
  - a naopak riskují hodně u málo pravděpodobných událostí.

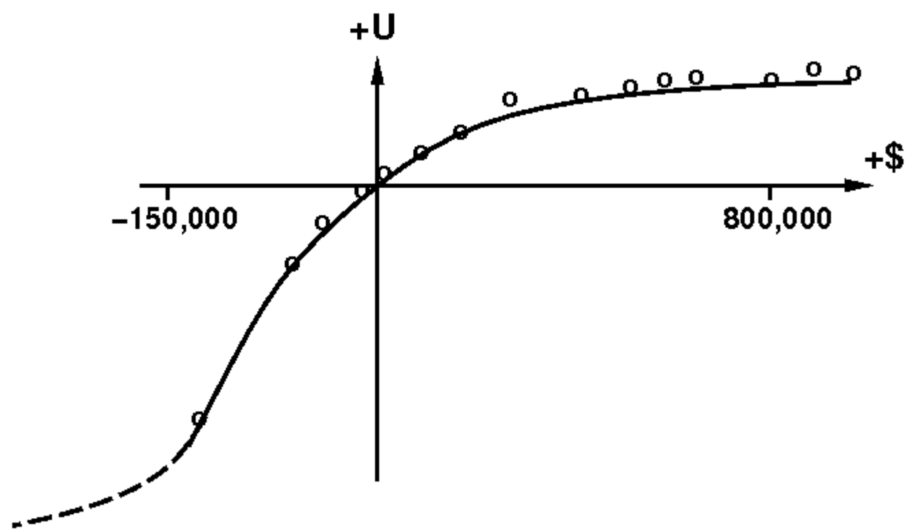
Lidé jako “racionální” agenti řízení penězi

- peníze nejsou přímou funkcí užitku
  - jejich použití lidmi často nemaximalizuje střední užitek
    $U([p_1, S_1; \ldots; p_n, S_n]) \neq \sum_i p_i U(S_i)$
  - obvykle pozorujeme snahu vyhnout se riziku, tedy loterii
    $U([p_1, S_1; \ldots; p_n, S_n]) < \sum_i p_i U(S_i)$
- **křivka užitku**
  - nelineárně převádí peníze na užitek,
  - hledáme pst p, pro kterou daná osoba nerozlišuje mezi cenou x a loterií $[p, \$M; (1-p), \$0]$, $\$M$ je velké.

Lidé jako “racionální” agenti řízení peněz

- křivka užitku



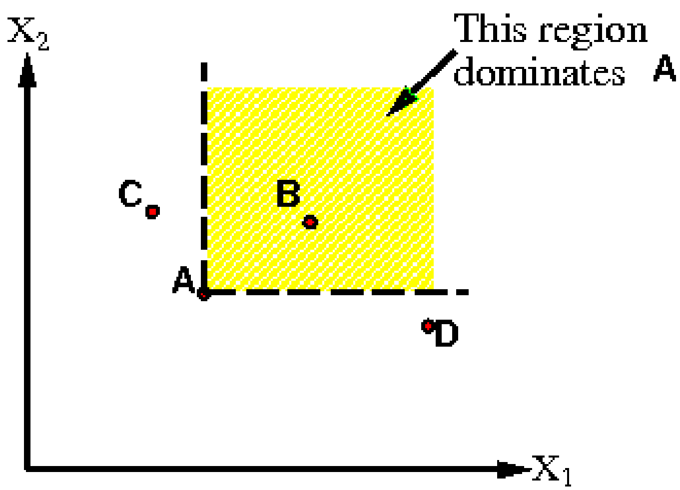


Vícepříznakové funkce užitku

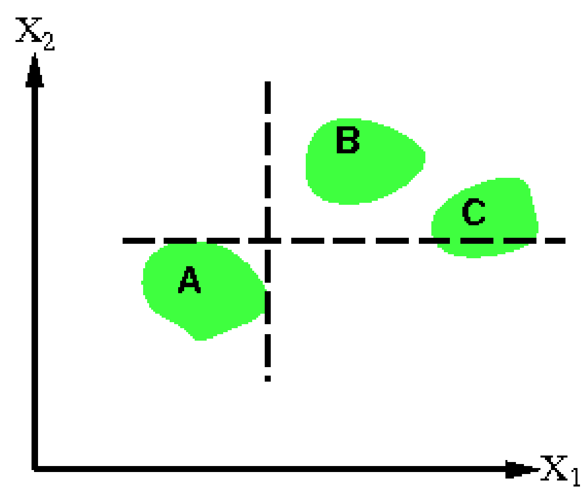
- Často nelze přímo přiřadit prémii každému stavu
  - stavů může být (nekonečně) mnoho, lze je ale obvykle popsat příznaky (bezpečnost, hlučnost, cena při výběru místa pro nové letiště),
- funce užitku má pak parametry příznaky namísto stavu
  - $U(X_1, \ldots, X_n) \rightarrow n$ atributů s m hodnotami definuje m^n stavů,
  - vyčíslení užitku zjednodušíme předpoklady **pravidelností** v přednostech
    * monotonicity předností při změně jediného příznaku $x \geq y \Rightarrow U(X_1, \ldots, X_i = x, \ldots, X_n) \geq U(X_1, \ldots, X_i = y, \ldots, X_n)$,
    * různých typů nezávislosti mezi příznaky ve vlivu na přednosti definice stavů: $A \sim (x_1, y_1)$, $B \sim (x_2, y_1)$, $C \sim (x_1, y_2)$, $D \sim (x_2, y_2)$ přednosti při nezávislosti: $(A \succ B \Rightarrow C \succ D) \wedge (A \succ C \Rightarrow B \succ D)$
  - pravidelnosti v přednostech mohou odpovídat zjednodušené fci užitku
    * $U(x_1, \ldots, x_n) = f[f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)]$,
    * f je obvykle jednoduchá, např. sčítání.

Ostrá dominance

- předpoklad: U monotónně rostoucí ve všech příznacích,
- ostrá dominance stavu B před stavem A
  - $\forall i \; X_i(B) \geq X_i(A) \Rightarrow f_i(X_i(B)) \geq f_i(X_i(A)) \Rightarrow U(B) \geq U(A)$
- př.: jedno místo pro nové letiště je bezpečnější, méně hlučné i drahé než jiné,
- jen zřídka použitelná v praxi
  - použitelnost snižuje mj. nejistota při odhadu hodnot příznaků.



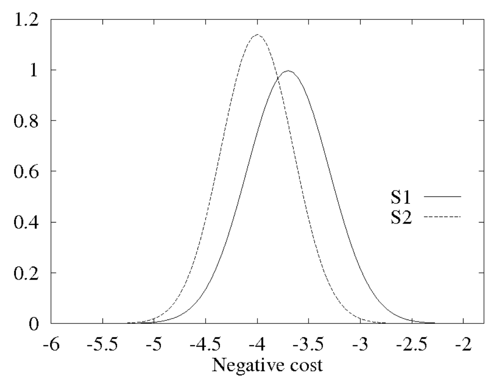
Deterministic attributes

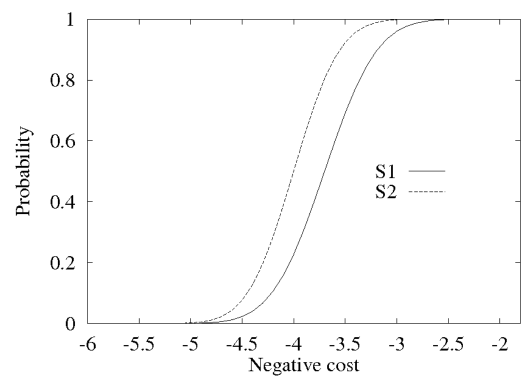


Uncertain attributes

Stochastická dominance

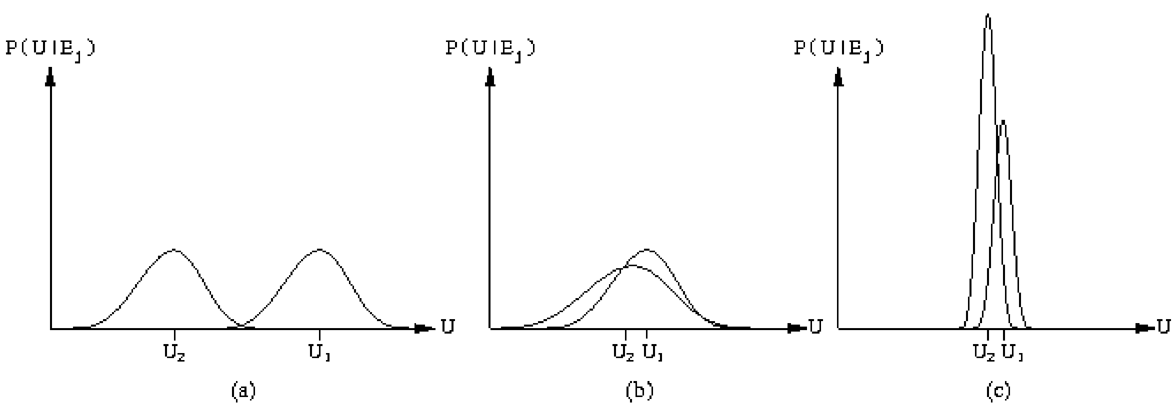
- mezi stavy nesrovnáváme nejhorší a nejlepší možnou hodnotu příznaku,
- vycházíme ze srovnání kumulativních distribučních funkcí příznaků,
- distribuce p_1 stochasticky dominuje distribuci p_2 tehdy, pokud
  - $\forall t \ \int_{-\infty}^{t} p_1(x)dx \leq \int_{-\infty}^{t} p_2(x)dx$,
- pro U monotónně rostoucí s x pak nutně platí, že
  - $\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)U(x)dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x)U(x)dx$,
- pro více atributů vyžadujeme stochastickou dominanci stavu na všech atributech,
- př.: letiště na místě 1 3.7 ± 0.4mld, na místě 2 4.0 ± 0.35mld – volíme 1.





Hodnota informace

- Zřídkakdy jsou informace agenta úplné
  - jaké otázky má agent klást?
  - otázka $\rightarrow$ informace s hodnotou, ale i náklady (za test, čas experta apod.),
  - agent řadí otázky dle rozdílu hodnota $-$ náklady,
  - záporně hodnocené otázky neklade a volí akci na základě dané informace,
  - typicky je krátkozraký – neuvažuje interakce mezi otázkami.
- Jak vyčíslit hodnotu informace?
  - má informace potenciál změnit stávající plán?
  - může být nový plán výrazně lepší než ten stávající?



Hodnota informace – obecné vyjádření

- současná pozorování E, současná nejlepší akce α
  možné výsledky akce S_i, možné další pozorování E_j
- očekávaný užitek bez zjištění E_j:
  $EU(\alpha|E) = \max_a \sum_i U(S_i)\ P(S_i|E,a)$
- budeme-li znát $E_j = e_{jk}$, pak můžeme volit jinou akci $\alpha_{e_{jk}}$
- očekávaný užitek při zjištění E_j:
  $EU(\alpha_{e_{jk}}|E, E_j = e_{jk}) = \max_a \sum_i U(S_i)\ P(S_i|E, a, E_j = e_{jk})$
- při rozhodování o hodnotě informace neznáme skutečnou hodnotu E_j
  očekávaný zisk musíme počítat přes všechny stavy náhodné proměnné E_j
  $VPI_E(E_j) = \left(\sum_k P(E_j = e_{jk}|E) EU(\alpha_{e_{jk}}|E, E_j = e_{jk})\right) - EU(\alpha|E)$
- k dotazu dojde, pokud: $\exists E_j\ VPI_E(E_j) > Cost(E_j)$.

Hodnota informace – investiční příklad

:: Existují tři typy investiční příležitosti (I): akcie (a), smíšený fond (f) a státní dluhopisy (d). Ziskovost investice závisí na tom, zda trhy (T) porostou ($\uparrow$), zůstanou na stejné úrovni (resp. budou růst s inflací, $\rightarrow$) nebo klesnou ($\downarrow$). Na základě hodnot v tabulce určete hodnotu informace o chování trhů.

T	$Pr(T)$	U(a,T)	U(f,T)	U(d,T)
$\uparrow$	0.5	1500	900	500
$\rightarrow$	0.3	300	600	500
$\downarrow$	0.2	-800	-200	500

Hodnota informace – investiční příklad

T	$Pr(T)$	U(a,T)	U(f,T)	U(d,T)
$\uparrow$	0.5	1500	900	500
$\rightarrow$	0.3	300	600	500
$\downarrow$	0.2	-800	-200	500

$$
\begin{aligned}
EU(\alpha|\{\}) &= \max_{I\in\{a,f,d\}} \sum_{T\in\{\uparrow,\rightarrow,\downarrow\}} U(IT)\ Pr(T) = \\
&= \max\Big(\frac{1500}{2} + .3\times 300 - \frac{800}{5}, \frac{900}{2} + .3\times 600 - \frac{200}{5}, 500\Big) = \\
&= \max(680, 590, 500) = 680 \\
EU(\alpha_\uparrow|\{\uparrow\}) &= \max_{I\in\{a,f,d\}} U(I,\uparrow) = 1500\ \ (EU(\alpha_\rightarrow|\{\rightarrow\}) = 600, EU(\alpha_\downarrow|\{\downarrow\}) = 500) \\
VPI_{\{\}}(T) &= \Big(\sum_{T\in\{\uparrow,\rightarrow,\downarrow\}} Pr(T) EU(\alpha_T|T)\Big) - EU(\alpha|\{\}) = \\
&= .5\times 1500 + .3\times 600 + 0.2\times 500 - 680 = 1030 - 680 = 350
\end{aligned}
$$

Shrnutí

- racionální agent volí akci, která vede k nejlepšímu očekávanému výsledku,
- může se přitom opírat o tři teorie
  - pravděpodobnosti – jak nakládat s pozorováními v nejistém světě,
  - užitku – jak popsat o co usilovat, jak by mohl vypadat cíl,
  - rozhodování – jaké akce volit na základě stochastického modelu a cílů,
- jak definovat funkci užitku, k čemu ji lze využít
  - složitější světy, popis stavů atributy, rozhodnutí o dominanci,
  - kdy získávat informaci, na jakou informaci se zaměřit,
- lidé jsou pouze "přibližně" racionální
  - ve složitém světě musí rozhodovat i na základě instinktů, heuristik,
    - automatický systém rozhoduje rychle, ale velmi přibližně,
    - reflexivní systém se blíží ideální racionalitě,
- UI: obor modelující ideální racionální agenty vs agenty chovající se jako lidé.

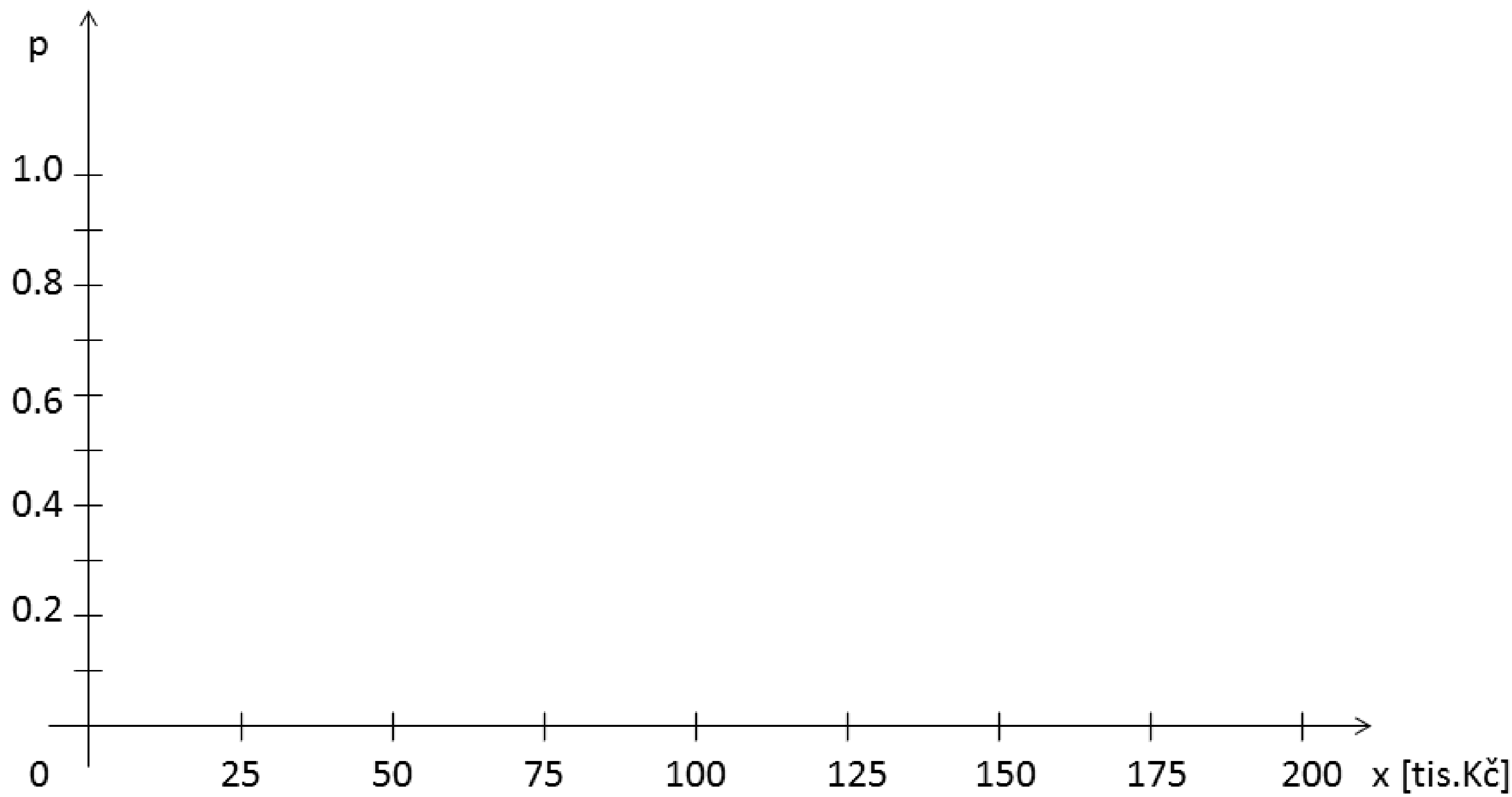
Doporučené doplňky – zdroje přednášky

:: Četba

- Russell, Norvig: **AI: A Modern Approach**, Rational Decisions
  - kapitola 16, http://aima.eecs.berkeley.edu/slides-pdf/chapter16.pdf
  - kniha online on Google books: http://books.google.com/books?id=8jZBksh-bUMC,

Experimentální ZUI užitek

- Pro každé x přizpůsobte p tak, aby
  - polovina kurzu volila loterii $[p, 200000Kc; 1-p, 0]$ a druhá polovina x,
- jak průběh souvisí s ochotou riskovat?



Užitek a pojištění

- Na konkávní křivce lze ukázat důvod pro pojištění.