

Temporální logika

1/8

VZ 2009



Temporální operátory \circ, \square, \diamond se (anglicky) nazývají

- \circ *nexttime* nebo jen *next*,
- \square *always* nebo *henceforth* a
- \diamond *sometime*.

Formule $\circ A, \square A$ a $\diamond A$ se (anglicky) čtou

- $\circ A$: *nextA*, česky *příště A*,
- $\square A$: *alwaysA*, česky *vždy A*
- $\diamond A$: *sometimeA*, česky *někdy A*

Preference $\neg, \circ, \square, \diamond$ váží silněji než $\vee, \wedge, \rightarrow$ a \equiv má nejslabší prioritu.

2/8

VZ 2009



Temporální operátory a přirozený jazyk

- α nechť znamená „Měsíc obíhá Zemi“,
- β nechť znamená „Měsíc vychází“,
- γ nechť znamená „Měsíc zapadá“.

- $\diamond\beta$, která vyjadřuje tvrzení „Měsíc někdy vyjde“,
- $\square\diamond\beta$ s významem „Měsíc bude vycházet znovu a znovu“,
- $\square(\beta \rightarrow \diamond\gamma)$ s významem „vždy po východu měsíce bude někdy následovat jeho západ“.

3 / 8

VZ 2009



Formální systém LTL

Pro libovolné formule A, B jsou následující formule **axiomy LTL**:

- (**Taut**) tvoří instance všech tautologií výrokové logiky,
- (**LTL 1**) vyjadřuje $\neg\circ A \leftrightarrow \circ\neg A$,
- (**LTL 2**) představuje $\circ(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\circ A \rightarrow \circ B)$,
- (**LTL 3**) značí $\square A \leftrightarrow (A \wedge \circ\square A)$.

Odvozovací pravidla LTL:

- (**modus ponens**) umožňuje z formulí A a $A \rightarrow B$ odvodit B ,
- (**next**) představuje postup odvození $\circ A$ z formule A ,
- (**indukce**) dovoluje z formulí $A \rightarrow B$ a $A \rightarrow \circ A$ odvodit $A \rightarrow \square B$

4 / 8

VZ 2009



Popis komplexního systému – dobře fungující úřad

- Jeli požadavek podán, pak bude někdy doručen na správné místo
□(**požadavek** → ◇**doručen**),
- Je-li požadavek doručen, pak jeho zpracování bude zahájeno hned v následujícím okamžiku
□(**doručen** → ○**zpracováván**),
- Zpracováváný požadavek bude jednou vyřízen (hotov) a pak už zůstane hotov (nebude se znovu otevírat)
□(**zpracováván** → ◇□**hotov**).

Uvedené formule charakterizují chování komplexního systému, označíme je jako program **P** pro tento systém. Zdá se, že nemůže nastat situace, ve které by systém stále vysílal stejný požadavek, ale ten by nebyl nikdy hotov. Lze se o tom přesvědčit? Na přednášce ukážeme, že formule □ **požadavek** & □**-hotov** nemůže platit, čili tato formule je s uvedeným programem **P** nekonzistentní.

5 / 8

VZ 2009



Nejprve postupujeme pozitivně a použijeme tato obecně platná tvrzení:

- a) □ $A \rightarrow \Diamond A$,
- b) ○ $A \rightarrow \Diamond A$,
- c) □ $(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$,
- d) ◇ $(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$,
- e) ◇◇ $A \leftrightarrow \Diamond A$.

6 / 8

VZ 2009



Každý požadavek bude někdy vyřízen!

i. $\Box(\text{požadavek} \rightarrow \Diamond \text{doručen})$,
 ii. $\Box(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván})$,
 iii. $\Box(\text{zpracováván} \rightarrow \Diamond \text{hotov})$.

- $\Box \text{požadavek} \rightarrow \Box \Diamond \text{doručen}$, podle i., c) a (mp)
- $\Box \Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \Diamond \text{doručen}$ podle a)
- $\Box(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván}) \rightarrow \Diamond(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván})$,
podle a)
- $\Diamond(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván})$, (mp) na 3. a ii
- $\Diamond(\text{doručen} \rightarrow \circ \text{zpracováván}) \rightarrow (\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \circ \text{zpracováván})$,
podle d)
- $(\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \circ \text{zpracováván}) \rightarrow (\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \Diamond \text{zpracováván})$,
s využitím b), 4. a (taut)
- $(\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \Diamond \text{zpracováván})$,
vícenásobné použití (mp) pro 4.-6.
- $\Diamond \Diamond \text{zpracováván} \rightarrow \Diamond \text{zpracováván}$,
podle e)
- $\Diamond \text{doručen} \rightarrow \Diamond \text{zpracováván}$,
z (taut) a 6., 7.
- $\Box \Diamond \text{doručen} \rightarrow \Box \Diamond \text{zpracováván}$,
7., e) a (mp)
- $\Diamond \text{zpracováván} \rightarrow \Diamond \Box \text{hotov}$,
s využitím iii., a), d) a (taut)
- $\Diamond \text{zpracováván} \rightarrow \Diamond \Box \text{hotov}$,
(taut), (mp), 8. a e)
- $\Box \Diamond \text{zpracováván} \rightarrow \Box \Diamond \Box \text{hotov}$,
využití c) na 10.
- $\Box \text{požadavek} \rightarrow \Box \Diamond \Box \text{hotov}$
„zřetězení“ 1, 8. a 11.

Ověřili jsme, že $\Box(\text{požadavek} \rightarrow \Diamond \Box \text{hotov})$

7 / 8 VZ 2009 

Příklady zdrojů dalších informací:

- Huth M., Ryan M.: *Logic in Computer Science*, Cambridge University Press, 2004
- Programový systém **SPIN**

8 / 8 VZ 2009 