Jaké vlastnosti mají znalosti

(v sémantice možných světů)

Věta.

Pro všechny struktury M pro n agentů s relacemi K_i, které jsou ekvivalencemi, a pro libovolné formule A, B platí

(i) $M \models (K_i A \wedge K_i(A \rightarrow B)) \rightarrow K_i B$

(ii) $je-li \quad M \models A \quad potom \quad M \models K_i A$

(iii) $M \models K_i A \rightarrow A$

(iv) $M \models K_i A \rightarrow K_i K_i A$

(v) $M \models \neg K_i A \rightarrow K_i \neg K_i A$

V Kripkeho strukturách jsme ověřili, že validní jsou

2. **Distribuční axiom** (označovaný někdy jako **K**) $(K_i A \wedge K_i(A \to B)) \to K_i B$
Pravidlo generalizace znalostí

3. **Axiom znalostí (Axiom pravdy)** (ozn. jako **T**) $K_i A \to A$
4. **Axiom pozitivní introspekce** (ozn. jako **4**) $K_i A \to K_i K_i A$
5. **Axiom negativní introspekce** (ozn.jako **5**) $\neg K_i A \to K_i \neg K_i A$
6. **Axiom konzistence** (ozn.jako **D**) $\neg K_i\, false$

- Distribuční axiom **K** a **pravidlo generalizace znalostí** jsme ověřili bez jakýchkoli předpokladů o relacích K_i,
- validnost axiomu znalostí **T** plyne z reflexivity,
- validnost axiomu pozitivní introspekce **4** plyne z tranzitivity,
- a validnost axiomu negativní introspekce **5** plyne ze symetrie a tranzitivity relací K_i.

Výroková logika: formální systém
a některé její tautologie(dokazatelné formule)

Prop-Ax1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Prop-Ax2: $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$

Prop-Ax3: $(\neg \psi \to \neg \varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Modus ponens:

$$\frac{\varphi,\ (\varphi \to \psi)}{\psi}$$

Prop-T1: $(\varphi \to (\psi \to \tau)) \to (\psi \to (\varphi \to \tau))$

Formální (axiomatický) systém $\mathbf{K}_n$

Axiomy: **A1.** Všechny tautologie výrokové logiky

A2. $(K_i\,\alpha \wedge K_i(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow K_i(\beta)$

Odvozovací pravidla:

R1. Z α formulí $\alpha \rightarrow \beta$ odvoďte β (modus ponens)

R2. Z formule α odvoď $K_i\,\alpha$ (pravidlo zobecnění znalosti)

V $\mathbf{K}_n$ lze dokázat například tvrzení $K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i\,\alpha$ (viz dále).

Značení **pro dokazatelnost:** $\mathbf{K}_n \vdash K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i\,\alpha$

Věta:

Systém K_n představuje korektní a úplný syntaktický popis všech formulí validních v množině $\mathcal{M}_n(\Phi)$ Kripkeho struktur.

5 / 8 VZ 2009 laboratory Gerstner

Platí M-T1: $\mathbf{K}_n$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ |- $K_i\,\varphi \rightarrow K_i\,\psi$

1. $(\varphi \rightarrow \psi)$ [výchozí formule]
2. $K_i(\varphi \rightarrow \psi)$ [R2: řádek 1]
3. $K_i\varphi \rightarrow (K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow K_i\psi)$ [A2]
4. $(K_i\varphi \rightarrow (K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow K_i\psi)) \rightarrow (K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi))$
   [Prop-T1: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \tau))$]
5. $K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$ [MP: 4 a 3]
6. $(K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$ [MP: 5 a 2]

Důsledek: Jsou-li dvě výrokové φ , ψ formule ekvivalentní (tj. $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ je tautologie, značeno $\varphi \equiv \psi$), pak $\mathbf{K}_n$ |- $K_i\,\varphi \equiv K_i\,\psi$

6 / 8 VZ 2009 laboratory Gerstner

Ukážeme, že platí následující vztahy:

a) $\mathbf{K}_n$ |- $K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta$ (implikace „→“, viz přednáška)

b) (K_n + A6) |- $\neg(K_i\,\alpha \wedge K_i \neg \alpha)$

c) (K_n + A3) |- A6

d) $\mathbf{K}_n$ |- $K_i \neg (p \to K_i p) \equiv K_i(p \wedge \neg K_i p) \equiv (K_i p \wedge K_i(\neg K_i p))$

e) V (K_n + A3) nemůže být dokazatelné $K_i \neg (p \to K_i p)$

$\mathbf{K}_n$ |- $K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta$

1. $\mathbf{K}_n$ |- $K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\alpha$ [viz přednáška]
2. $\mathbf{K}_n$ |- $K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\beta$ [obdobně, viz přednáška]
3. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\alpha) \to ((K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta)))$
   [$(\rho \to \varphi) \to ((\rho \to \psi) \to (\rho \to (\varphi \wedge \psi)))$ výroková tautologie]
4. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \to K_i\,\beta) \to (K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta))$ [MP: 3,1]
5. $K_i(\alpha \wedge \beta) \to (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta)$ [MP: 4,2]

$\mathbf{K}_n \mid\!- K_i(\alpha \wedge \beta) \equiv K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta$

1. $\mathbf{K}_n \mid\!- K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i\,\alpha$ [viz přednáška]
2. $\mathbf{K}_n \mid\!- K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i\,\beta$ [obdobně, viz přednáška]
3. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i\,\alpha) \rightarrow ((K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i\,\beta) \rightarrow (K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta)))$
4. $(K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K_i\,\beta) \rightarrow (K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta))$ [MP: 3,1]
5. $K_i(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (K_i\,\alpha \wedge K_i\,\beta)$ [MP: 4,2]
6. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ [výroková tautologie]
7. $K_i(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [R2:6]
8. $K_i\,\alpha \rightarrow (K_i(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [A2]
9. $K_i(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow (K_i\,\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 8]
10. $(K_i\,\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 9,7]
11. $(K_i\,\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow (K_i\beta \rightarrow (K_i\,\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))))$ [Výr.Ax1]
12. $K_i\beta \rightarrow (K_i\,\alpha \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 11,10]
13. $(K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ [výroková úprava 12]
14. $(K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow (K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$ [výroková úprava 13]
15. $K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)$ [A2]
16. $(K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow (K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta))$
    $\rightarrow (((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow ((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [Výr. Ax3]
17. $(K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow ((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow (K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [V.Ax1]
18. $((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow (K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)))$ [MP: 17,15]
19. $(((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i\beta \wedge K_i(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))) \rightarrow ((K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta))$ [MP: 16,18]
20. $(K_i\,\alpha \wedge K_i\beta) \rightarrow K_i(\alpha \wedge \beta)$ [MP: 19,14]

Následující vztahy lze dokázat (viz cvičení):

b) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A6}) \mid\!- \neg(K_i\,\alpha \wedge K_i \neg\alpha)$.

Z předchozího tvrzení víme, že

1. $(K_i\,\alpha \wedge K_i \neg\alpha) \equiv K_i(\alpha \wedge \neg\alpha)$
2. $\neg K_i(\mathit{false})$ [A6]
3. $\mathit{false} \equiv (\alpha \wedge \neg\alpha)$ [tautologie: A1]
4. $\neg K_i(\alpha \wedge \neg\alpha)$ [dosazením ekv.3 do 2]
5. $\neg(K_i\,\alpha \wedge K_i \neg\alpha) \equiv \neg K_i(\alpha \wedge \neg\alpha)$ [taut. přepis ř. 1]
6. $\neg(K_i\,\alpha \wedge K_i \neg\alpha)$ [Modus ponens a 5]

Následující vztahy lze dokázat (viz cvičení):

c1) K2, T(A3) |- $\neg K_i\, false$

1. $K_i\, false \rightarrow false$ [A3]
2. $\neg false \rightarrow (\neg K_i\, false)$ [ekv. úprava 1]
3. $\neg K_i\, false$ [použití výrokové tautologie na 2]

c2) K2, T |- $\neg K_i \alpha \vee \neg K_i \neg K_i \alpha$

[taut. úprava axiomu T $K_i \neg K_i \alpha \rightarrow \neg K_i \alpha$]

c3) K2, T |- $\neg K_i (\alpha \wedge \neg K_i \alpha)$

1. $K_i \neg K_i \alpha \rightarrow \neg K_i \alpha$ [A3, axiom pravdy]
2. $\neg K_i \neg K_i \alpha \vee \neg K_i \alpha$ [výrok. Tautologie – přepis ř.1], *viz* a1
3. $\neg (K_i \neg K_i \alpha \wedge K_i \alpha)$ [výrok. Tautologie – přepis ř.2]
4. $\neg K_i (\neg K_i \alpha \wedge \alpha)$ [tvrzení o ekvivalenci a) pro formuli 3], *viz* a2

Následující vztahy lze dokázat:

a) $\mathbf{K}_n \vdash K_i (\alpha \wedge \beta) \equiv K_i \alpha \wedge K_i \beta$

b) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A6}) \vdash \neg (K_i \alpha \wedge K_i \neg \alpha)$

c) $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3}) \vdash \mathrm{A6}$

d) $\mathbf{K}_n \vdash K_i \neg (p \rightarrow K_i p) \equiv K_i (p \wedge \neg K_i p) \equiv (K_i p \wedge K_i (\neg K_i p))$

[stačí využít ekvivalenci a)]

e) V $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ nemůže být dokazatelné $K_i \neg (p \rightarrow K_i p)$

[Kdyby byla formule $K_i \neg (p \rightarrow K_i p)$ dokazatelná, muselo by podle d) být v $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ dokazatelné $(K_i p \wedge \neg K_i p)$, tedy *false* a systém $(\mathrm{K}_n + \mathrm{A3})$ by musel být sporný. To neplatí, tedy formule nemůže být dokazatelná]

Důkazy následujících vztahů se opírají o výrokovou tautologii:

P-T2 : $(\alpha 1 \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha 2 \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha 1 \vee \alpha 2) \rightarrow \beta))$

Mod_T8a: $\mathbf{K_n}$, **Ax3**, **Ax 5**, $K_i(p \rightarrow K_i p) \vdash K_i p \vee K_i \neg p$

1. $K_i p \vee \neg K_i p$ — výroková tautologie $\alpha \vee \neg \alpha$
2. $K_i p \rightarrow K_i p \vee K_i \neg p$ — výroková tautologie $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
3. $p \rightarrow K_i p$ — **Ax 3** a předpoklad $K_i(p \rightarrow K_i p)$
4. $(p \rightarrow K_i p) \rightarrow (\neg K_i p \rightarrow \neg p)$ — výroková tautologie
5. $\neg K_i p \rightarrow \neg p$ — Modus Ponens na řádky 3 a 4
6. $\neg K_i p \rightarrow K_i \neg K_i p$ — **Ax 5**
7. $K_i \neg K_i p \rightarrow K_i \neg p$ — **M-T1** pro řádku 5
8. $\neg K_i p \rightarrow K_i \neg p$ — transitivita implikace pro řádky 6 a 7
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \vee \alpha \rightarrow \gamma \vee \beta)$ — výroková tautologie
10. $(K_i p \vee \neg K_i p) \rightarrow (K_i p \vee K_i \neg p)$ — Modus Ponens na řádky 8 a 9 pro $\gamma = K_i p$
11. $(K_i p \vee \neg K_i p) \rightarrow (K_i p \vee K_i \neg p)$ — Modus Ponens na řádky 10 a 1
12. $(K_i p \vee K_i \neg p)$ — Modus Ponens na řádky 11 a 1

13 / 8 VZ 2009 Laboratory Gerstner

Mod_T8b: $\mathbf{K_n}$, **Ax 4**, $(K_i p \vee K_i \neg p) \vdash K_i(p \rightarrow K_i p)$

1. $K_i p \rightarrow (p \rightarrow K_i p)$ — výrokový axiom
2. $K_i K_i p \rightarrow K_i(p \rightarrow K_i p)$ — **Mod_T1** pro řádku 1
3. $K_i p \rightarrow K_i K_i p$ — **Ax4**
4. $K_i p \rightarrow K_i(p \rightarrow K_i p)$ — transitivita implikace pro řádky 3 a 2
5. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow K_i p)$ — **výroková tautologie**
6. $K_i \neg p \rightarrow K_i(p \rightarrow K_i p)$ — **Mod_T1** pro řádku 5
7. $(\alpha 1 \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha 2 \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha 1 \vee \alpha 2) \rightarrow \beta))$

   P-T2 pro $\alpha 1 = K_i p$, $\alpha 2 = K_i \neg p$, $\beta = K_i(p \rightarrow K_i p)$
8. $(K_i p \vee K_i \neg p) \rightarrow K_i(p \rightarrow K_i p)$

   Modus ponens 2x pro ř. 7, 4 a 6
9. $K_i(p \rightarrow K_i p)$ — Modus ponens pro ř.8 a předpoklad

14 / 8 VZ 2009 Laboratory Gerstner

Cvičení. Dokažte, že následující formule jsou validní:

$(i)\quad (C_G A \wedge C_G (A \rightarrow B)) \rightarrow C_G B$

$(ii)\quad C_G A \rightarrow A$

$(iii)\quad C_G A \rightarrow C_G C_G A$

$(iv)\quad \neg C_G A \rightarrow C_G \neg C_G A$

Předpoklady o relacích K_i jsou stejné, jako při odvození odpovídajících axiomů.