OPT'17-18 Test 1	Jméno:	Opravil:	Body:

1. **(1b)** Existuje lineární funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že $f(-1,1,0)=0$ a $f(1,0,1)=2$? Odpověď odůvodněte.

   Lin. funkce má tvar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$, v našem případě $f(x_1,x_2,x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$. Řešíme soustavu $-a_1 + a_2 = 0$, $a_1 + a_3 = 2$. Ta má (nekonečně mnoho) řešení. Proto funkce existuje.

2. Máme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) **(1b)** Najděte prostor obrazů matice $\mathbf{A}$.

   Je to lin. obal sloupců. Protože existují dva l.n. sloupce, je $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^2$.

   (b) **(1b)** Najděte libovolnou bázi nulového prostoru matice $\mathbf{A}$.

   Nulový prostor je množina řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, tedy $-x_1 + 2x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$. Množina řešení této soustavy je $\{\, (2t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$. Báze tohoto podprostoru je např. $\{(2,-2,1)\}$.

3. **(2b)** Najděte vzdálenost bodu $(0,1,1)$ od podprostoru $\operatorname{span}\{(-1,0,2),(1,1,0)\}$. Výsledek co nejvíce zjednodušte.
   (Všimněte si: vektory jsou stejné jako řádky matice v předchozím příkladu.)

   Označme $(0,1,1) = \mathbf{x}$, $\operatorname{span}\{(-1,0,2),(1,1,0)\} = X$. Vzd. bodu $\mathbf{x}$ od podprostoru X je délka ort. projekce bodu $\mathbf{x}$ na podprostor $X^\perp$. Bázi $X^\perp$ už máme z minulého příkladu, je to $\{(2,-2,1)\}$. Normalizujeme vektor báze: $\mathbf{u} = (2,-2,1)/3$ (je tedy $\|\mathbf{u}\| = 1$), teď $\{\mathbf{u}\}$ je tedy ortonormální báze $X^\perp$. Délka projekce je $\|\mathbf{uu}^T\mathbf{x}\| = \|\mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{x})\| = \|\mathbf{u}\| \cdot |\mathbf{u}^T\mathbf{x}| = 1/3$. Vzoreček $|\mathbf{u}^T\mathbf{x}|$ vlastně máte znát ze střední školy.

4. **(2b)** Najdi ortogonální projektor na podprostor span$\{(2,-1,1)\}^\perp$.

   Označme span$\{(2,-1,1)\} = X$. Ort. projektor na X je $\mathbf{P} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ kde $\mathbf{u} = (2,-1,1)/\sqrt{6}$ (normalizace). Ort. projektor na $X^\perp$ je $\mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. **(2b)** Matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{x}$ splňují $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Které z následujících výroků z toho plynou? (zakroužkujte)

   (a) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ NE

   (b) $\mathbf{A}$ má lineárně závislé sloupce ANO (z definice lin. nezavislosti)

   (c) $\mathbf{A}$ má lineárně závislé řádky NE

   (d) $\mathbf{A}$ má netriviální nulový prostor ANO (z definice nul. prostoru)

6. **(1b)** Uděláme QR-rozklad matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100\times 40}$, která má lineárně nezávislé sloupce. Jaké budou rozměry a vlastnosti výsledných matic?
   (Upřesnění: máme na mysli *redukovaný* QR-rozklad, ne plný QR-rozklad.)

   $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{100\times 40}$ má ortonormální sloupce (neboli splňuje $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$) a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{40\times 40}$ je horní trojuhelnikova.

Bodů celkem: 10