Cvičení z optimalizace
Lineární programování

Vojtěch Franc, 2011

Úvod

V tomto cvičení si vyzkoušíme lineárního programování na dvou jednoduchých úlohách. V první úloze budeme hledat optimální strategii, která nám zaručí jistou výhru v kurzovém sázení. V druhé úloze se budeme zabývat prokládáním (fitováním) lineární funkce množinou bodů, což je jedna z častých úloh v inženýrské praxi.

Úloha 1: Jistá výhra

15. srpna roku 2009 se v rámci čtvrtého kola fotbalové Gambrinus ligy konalo utkání mezi Spartou Praha (domácí) a Kladnem (hosté). Jistá sázková kancelář vypsala na výsledek utkání následující kurzy:

událost	1	10	0	02	2
kurz	1.27	1.02	4.70	3.09	9.00

Tabulka 1: Kurzy vypsané na fotbalové utkání Sparta Praha versus Kladno.

První řádek tabulky 1 označuje tyto události: 1..výhra domácích, 10.. výhra domácích nebo remíza, 0..remíza, 02... remíza nebo výhra hostů, 2..výhra hostů. Druhý řádek je kurz vypsaný na danou událost. Sázková kancelář umožňuje každému sázejícímu uzavírat sazky na libovolnou kombinaci událostí (např. lze současně vsadit na vítězství Sparty i Kladna).

V rámci své marketingové strategie nabízí sázková kancelář sázejícím jednorázový bonus ve výši 50% z vložené částky a to až do výše 1000 korun. Bonus nelze vybrat přímo, ale lze ho použít k sázení. To znamená, že pokud například sázející vloží svých 2000 korun, přidá mu sázková kancelář bonus 1000 korun. Sázející pak může prosázet celkem $2000 + 1000 = 3000$ korun.

Je spousta strategii jak sázet. Jedna z možností je sázet tak, abychom maximalizovali jistou výhru. Jistá výhra je taková, kterou dostaneme bez ohledu na výsledek utkání, který je (nebo by alespoň měl být) neznámý. Jinými slovy jistá výhra je to samé co minimální možná výhra. Uveďme si jednoduchý příklad, na kterém demonstrujeme pojem jisté výhry. Předpokládejme, že vsadíme celých 3000 korun (našich 2000 + 1000 bonus) na výhru Kladna. V tomto případě je jistá výhra 0 korun, které "dostaneme" pokud vyhraje Sparta nebo pokud bude remíza. Je očividné, že k tomu abychom zajistili nenulovou jistou výhru, musíme pokrýt nějakou částkou každý z možných výsledků daného utkání. První co nás napadne je vsadit 3000 korun rovnoměrně na všechny události, tj. $3000/5 = 600$ korun na každou událost vypsanou sázkovou kanceláří. V tomto případě bude hodnota jisté výhry $600 \times (1.27 + 1.02) = 1374$ korun, které dostaneme pokud vyhraje Sparta (ověřte si, že ve všech ostatních případech bude výhra vyšší). Jak vidno ani tato sázka nevypadá optimálně, protože ve výsledku můžeme přijít o $2000 - 1374 = 626$ korun.

Naším cílem bude nalézt optimální sázku, tj. optimální rozložení vložených 2000 korun plus 1000 korunový bonus na jednotlivé události, tak aby jistá výhra byla maximální. Pokud úlohu správně vyřešíte, uvidíte, že optimální sázka dokonce zaručí vyšší výhru než vložených 2000 korun.

Převod slovního zadání úlohy na problém LP Naším cílem je vyjádřit hledání optimální sázky jako úlohu lineárního programování. Nejprve si zavedeme vektor proměnných $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$, jehož souřadnice budou odpovídat množství peněz vsazených na danou událost. Konkrétní volba souřadnic vektoru $\boldsymbol{x}$ je popsána v tabulce 2. Při hledání optimální sázky budeme vybírat z množiny všech přípustných

událost	1	10	0	02	2
vložené peníze [Kč]	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

Tabulka 2: Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ kóduje množství peněz vsazených na jednotlivé události vypsané sázkovou kanceláří.

sázek, která obsahuje vektory $\boldsymbol{x}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 3000\,, \qquad \text{a současně} \qquad x_i \geq 0,\ i = \{1, \dots, 5\}. \tag{1}$$

První rovnice říká, že součet sázek na jednotlivé události je roven 3000 korunám, které máme k dispozici a chceme je prosázet. Množina pěti nerovnice vyjadřuje fakt, že nemůžeme vsadit zápornou částku. Z tabulek 1 a 2 lehko odvodíme jaká bude hodnota výhry v závislosti na výsledku utkání:

výsledek	výhra domácích	remíza	výhra hostů
hodnota výhry [Kč]	$1.27x_1 + 1.02x_2$	$1.02x_2 + 4.70x_3 + 3.09x_4$	$3.09x_4 + 9x_5$

Hodnota jisté výhry v, tj. minimální výhry, je tudíž rovna

$$v = \min\{1.27x_1 + 1.02x_2, 1.02x_2 + 4.70x_3 + 3.09x_4, 3.09x_4 + 9x_5\} \tag{2}$$

Hledání optimální sázky pak můžeme vyjádřit jako maximalizaci v podle všech $\boldsymbol{x}$, které splňují omezení (1), tj.

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5} \min\{1.27x_1 + 1.02x_2, 1.02x_2 + 4.70x_3 + 3.09x_4, 3.09x_4 + 9x_5\} \tag{3a}$$

za podmínky

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 3000\,, \qquad x_i \geq 0, \quad i = \{1, \dots, 5\}\,. \tag{3b}$$

Optimalizační problém (3) vyžaduje maximalizaci nelineární funkce s lineárními omezujícími podmínkami. Nakonec si pro úlohu (3) zavedeme ekvivalentní problém lineárního programování, pro jehož řešení existuje velké množství numerických algoritmů. Ekvivalentní problém lineárního programování má tvar

$$(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} -\lambda \tag{4a}$$

za podmínky

$$\begin{array}{rcl} 1.27x_1 + 1.02x_2 & \geq & \lambda \\ 1.02x_2 + 4.70x_3 + 3.09x_4 & \geq & \lambda \\ 3.09x_4 + 9x_5 & \geq & \lambda \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & = & 3000 \\ x_i & \geq & 0, \quad i = \{1, \ldots, 5\} \end{array} \tag{4b}$$

Problém (4) je ekvivalentní v tom smyslu, že jeho optimální řešení je rovno optimálnímu řešení původního problému (3).

Úkoly k vypracování

1. Zdůvodněte proč jsou problémy (3) a (4) ekvivalentní. Které 2 kroky umožnily převést (3) na (4) ?
2. Vyřešte úlohu (4) numericky pomocí funkce `linprog`, která je součástí optimalizačního toolboxu v Matlabu. Jaká je optimální sázka maximalizující jistou výhru a jaká je její hodnota?
3. Uvažujte modifikovanou úlohu, kdy sázková kancelář vypisuje kurzy jen na výhru domacích, remízu a výhru hostí, tj. jen na události 1, 0 a 2. Navíc tato sázková kancelář stanovuje výši minimální sázky na 400 korun. Pro takto modifikovanou slovní úlohu formulujte úlohu LP, která opět nalezne strategii sázení maximalizující minimální výhru. Vyřešte úlohu numericky.

Úloha 2: Minimaxní prokládání lineární funkce množinou bodů

Mějme množinu $\mathcal{T} = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^m$. Dále uvažujme lineární funkci

$$f_{a,b}(x) = ax + b \,,$$

která je parametrizovaná čísly $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$. Naším úkolem je nalézt takovou lineární funkci, která nejlépe aproximuje množinu bodů $\mathcal{T}$. Je mnoho kritérií, kterými můžeme definovat dobrou aproximaci. Konkrétní volba kritéria závisí na dané aplikaci. My si jako kritérium dobré aproximace zvolíme maximální absolutní odchylku definovanou jako

$$\varepsilon(a, b) = \max_{i=1,\ldots,m} |f_{a,b}(x_i) - y_i| \,.$$

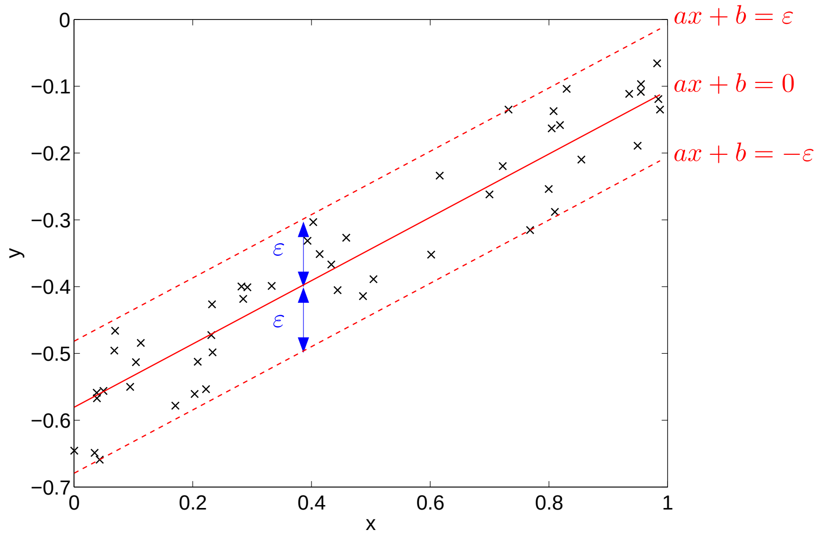
Naším cílem bude nalézt parametry lineární funkce, pro kterou je $\varepsilon(a, b)$ minimální. Jinými slovy chceme vyřešit optimalizační úlohu

$$(a^*, b^*) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ b\in\mathbb{R}}} \max_{i=1,\ldots,m} |ax_i + b - y_i| \,. \tag{5}$$

Optimalizační úloha (5) má názornou grafickou interpretaci, která je znázorněna na obrázku 1. Úloha je ekvivalentní nalezení pásu s minimální šířkou jenž obepíná všechny body. Střed pásu je dán přímkou $a^*x + b^* = 0$ a jeho šířka je $2\varepsilon(a^*, b^*)$.

Ukážeme si, že problém (5) lze převést na úlohu lineárního programování. Nejprve se zbavím absolutní hodnoty v kritériu a to tím, že použijeme rovnost

$$|z| = \max\{z, -z\} \,, \qquad \forall z \in \mathbb{R} \,. \tag{6}$$



Obrázek 1: Ilustrace problému prokládání lineární funkce množinou bodů.

Substitucí (6) do (5) dostaneme

$$(a^*, b^*) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ b\in\mathbb{R}}} \max_{i=1,\ldots,m} \max\{ax_i + b - y_i, -ax_i - b + y_i\}\,. \tag{7}$$

Nakonec se zbavíme maxima použitím zcela stejného triku, který jste odhalili v předchozí úloze (viz. bod 1). A tedy problém (7) převedeme na ekvivalentní problém lineárního programování

$$(a^*, b^*) \in \operatorname*{argmin}_{a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, \lambda\in\mathbb{R}} \lambda \tag{8a}$$

za podmínky

$$\begin{aligned} ax_i + b - y_i &\leq \lambda\,, \quad i = 1,\ldots,m \\ -ax_i - b + y_i &\leq \lambda\,, \quad i = 1,\ldots,m \end{aligned} \tag{8b}$$

Úkoly k vypracování

1. Stáhněte si soubor `http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/OPT/cviceni/02/data1.mat`. Soubor obsahuje vektor `x [50 x 1]` a vektor `y [50 x 1]`, které definují množinu $\mathcal{T}$. V našem případě je tedy $m = 50$. Vykreslete si body do grafu.

2. Pro zadanou množinu bodů vyřešte úlohu (8) s použitím funkce `linprog`. Nalezenou optimální přímku vykreslete do grafu s body. Jaká je maximální absolutní odchylka pro tuto přímku?

3. Přeformulujte úlohu 2 pro případ, kdy x_i, $i = 1,\ldots,m$, jsou vektory v $\mathbb{R}^n$. Vyjádřete tuto úlohu jako problém LP.