

## Binární strom – tvar, velikost, složitost

1. Daný obecný strom má  $n$  uzlů. Kolik má hran? Zdůvodněte.
2. Daný pravidelný binární strom má  $n$  uzlů. Kolik má listů? Zdůvodněte.
3. Jsou dány dva kusy papíru. Některý z nich rozstříháme na dva kusy, některý ze všech kusů rozstříháme opět na dva kusy, atd. Kolik kusů celkem vznikne, když bylo rozstříženo celkem  $k$  kusů papíru (nezávisle na jejich velikosti)?
4. Turnaje ve stolním tenisu, který se hraje vylučovacím způsobem, se zúčastnilo celkem 19 hráčů. Šest vylosovaných hráčů muselo sehrát předkolo, y něž do turnaje postoupili tři hráči. Nakreslete strom reprezentující možný průběh turnaje a určete počet jeho vnitřních uzlů tj. počet utkání, která byla během turnaje sehrána.  
Kolik utkání by bylo nutno sehrát v turnaji, jehož se by se účastnilo 147 hráčů?
5. Při volání rekurzivní funkce  $f(n)$  vznikne binární pravidelný ideálně vyvážený strom rekurzivního volání s hloubkou  $\log_2(n)$ . Asymptotická složitost funkce  $f(n)$  je tedy
  - a)  $\Theta(\log_2(n))$
  - b)  $\Theta(n \cdot \log_2(n))$
  - c)  $O(n)$
  - d)  $O(\log_2(n))$
  - e)  $\Omega(n)$
6. Při volání rekurzivní funkce  $f(n)$  vznikne binární pravidelný ideálně vyvážený strom rekurzivního volání s hloubkou  $n$ . Asymptotická složitost funkce  $f(n)$  je tedy
  - a)  $\Theta(n)$
  - b)  $O(n)$
  - c)  $\Theta(\log_2(n))$
  - d)  $\Omega(2^n)$
  - e)  $O(n!)$
7. Obecný binární strom
  - a) má vždy více listů než vnitřních uzlů
  - b) má vždy více listů než vnitřních uzlů, jen pokud je pravidelný
  - c) má vždy méně listů než vnitřních uzlů
  - d) může mít více kořenů
  - e) může mít mnoho listů a žádné vnitřní uzly
8. Binární strom má  $n$  uzlů. Šířka jednoho „patra“ (tj. počet uzlů se stejnou hloubkou) je tedy
  - a) nejvýše  $\log(n)$
  - b) nejvýše  $n/2$
  - c) alespoň  $\log(n)$
  - d) alespoň  $n/2$
  - e) nejvýše  $n$
9. Daný binární strom má tři listy. Tudiž
  - a) má nejvýše dva vnitřní uzly
  - b) počet vnitřních uzlů není omezen
  - c) všechny listy mají stejnou hloubku
  - d) všechny listy nemohou mít stejnou hloubku
  - e) strom je pravidelný
10. Binární strom má hloubku 2 (hloubka kořene je 0). Počet listů je
  - a) minimálně 0 a maximálně 2
  - b) minimálně 1 a maximálně 3
  - c) minimálně 1 a maximálně 4
  - d) minimálně 2 a maximálně 4

11. Binární strom má 2 vnitřní uzly. Má tedy
- minimálně 0 a maximálně 2 listy
  - minimálně 1 a maximálně 3 listy
  - minimálně 1 a maximálně 4 listy
  - minimálně 2 a maximálně 4 listy

12. Algoritmus A provádí průchod v pořadí inorder binárním vyváženým stromem s  $n$  uzly a v každém uzlu provádí navíc další (nám neznámou) akci, jejíž složitost je  $\Theta(n^2)$ .

Celková asymptotická složitost algoritmu A je tedy

- $\Theta(n)$
- $\Theta(n^2)$
- $\Theta(n^3)$
- $\Theta(n^2 + \log_2(n))$
- $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$

13. Algoritmus A provede jeden průchod binárním stromem s hloubkou  $n$ . Při zpracování celého  $k$ -tého „patra“ (=všech uzlů s hloubkou  $k$ ) provede  $k+n$  operací. Operační (=asymptotická) složitost algoritmu A je tedy

- $\Theta(k+n)$
- $\Theta((k+n) \cdot n)$
- $\Theta(k^2+n)$
- $\Theta(n^2)$
- $\Theta(n^3)$

### Binární strom – průchod stromem

14. Vypis prvků binárního stromu v pořadí postorder provede následující:

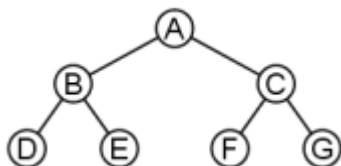
- vypíše prvky v opačném pořadí, než v jakém byly do stromu vloženy
- pro každý podstrom vypíše nejprve kořen, pak obsah jeho levého a pak pravého podstromu
- pro každý podstrom vypíše nejprve obsah levého podstromu kořene, pak obsah pravého podstromu a pak kořen
- pro každý podstrom vypíše nejprve obsah pravého podstromu kořene, pak obsah levého podstromu a pak kořen
- vypíše prvky stromu v uspořádání zprava doleva

15. Vypis prvků binárního stromu v pořadí preorder provede následující:

- vypíše prvky stromu ve stejném pořadí, v jakém byly do stromu vloženy
- vypíše prvky stromu v uspořádání zleva doprava
- pro každý podstrom vypíše nejprve kořen, pak obsah jeho levého a pak pravého podstromu
- pro každý podstrom vypíše nejprve obsah levého podstromu kořene, pak obsah pravého podstromu a pak kořen
- vypíše prvky stromu seřazené vzestupně podle velikosti

16. Obsah uzlů daného stromu vypíšeme v pořadí postorder. Vznikne posloupnost

- G F E D C B A
- F C G D B E A
- G C F A E B D
- D E B F G C A

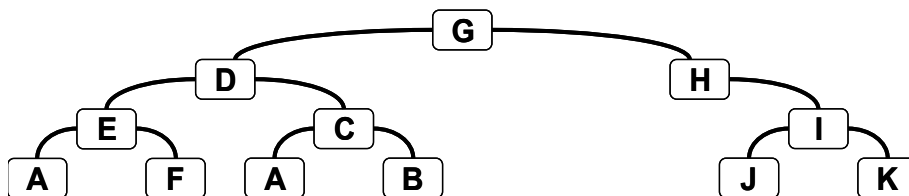


17. Obsah uzlů daného stromu vypíšeme v pořadí preorder. Vznikne posloupnost

- A B C D E F G H
- D B E A F C G
- A B D E C F G
- D E F G B C A

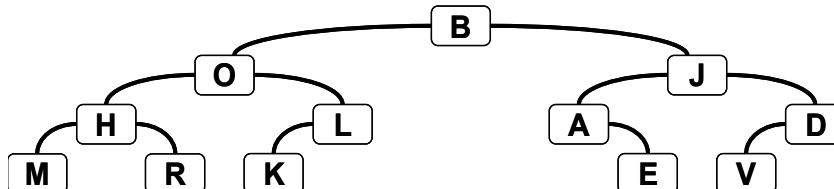
18. Vypište obsah jednotlivých uzlů daného stromu při průchodu v pořadí

- preorder
- postorder



19. Vypište obsah jednotlivých uzlů daného stromu při průchodu v pořadí

- preorder
- postorder



20. Při průchodu daným stromem pořadí Inorder a pak Preorder získáme následující posloupnosti hodnot uložených v jeho jednotlivých (celkem devíti) uzlech:

Inorder: 45 71 98 47 50 62 87 3 79

Preorder: 50 47 71 45 98 62 3 87 79

- Rekonstruuje tvar stromu.
- Navrhněte a formulujte algoritmus, který z uvedených dvou posloupností pro libovolný strom rekonstruuje jeho podobu.

21. Jaký musí mít binární strom tvar, aby všechny průchody In- Pre- a Postorder zpracovaly uzly ve stejném pořadí?

22. Navrhněte strukturu binárního stromu s  $n$  prvky tak, aby hloubka stromu nebyla vyjádřena výrazem ani  $\Theta(\log(n))$  ani  $\Theta(n)$ , ale výrazem  $\theta(\sqrt{n})$ .

### Binární strom – drobné výpočty

23. Představme si, že máme navštívit všechny uzly v ideálně vyváženém stromu se 7 uzly. Můžeme chodit podle každé hrany tam i zpět, pohyb podél jedné hrany mezi dvěma uzly trvá právě jednu sekundu.

- Jak dlouho se budeme ve stromu pohybovat, máme-li (celkem přirozeně) začít i skončit v kořeni?
- Změní se nějak doba průchodu stromem v případě že strom bude obsahovat stejný počet uzlů ale bude maximálně nevyvážený?
- Jaká bude doba průchodu obecně v případě, že strom bude obsahovat  $n$  uzlů?

24. Uvažujme opět ideálně vyvážený strom s  $n$  uzly. Naší úlohou bude opět navštívit všechny uzly, tentokrát ale bude strategie odlišná. Smíme se pohybovat pouze vpřed, z libovolného uzlu ale můžeme kdykoli skočit zpátky do kořene. Cesta podél jedné hrany trvá jednu sekundu, skok do kořenu je okamžitý, jeho doba trvání je zanedbatelná.

25. Máme 1024 sekundy tj. něco málo přes 1/4 hodiny. Jaká je maximální možný počet uzlů ve vyváženém stromu z předchozí úlohy, abychom jej stihli za tuto dobu projít? Jaká je maximální velikost maximálně nevyváženého stromu pro stejnou úlohu?

26. Tak si to sjedeme ještě jednou: Co když traverzování jedné hrany trvá  $10^{-8}$  sec a my máme na projití stromu 1/10 sec?

### Zásobník

27. Zásobníkový automat je (zjednodušeně vzato) zařízení, které čte znak po znaku vstupní řetězec a po každém přečteném znaku provede nějakou operaci se zásobníkem. Než automat začne číst řetězec, je zásobník prázdný. Kromě toho jsou specifikována pravidla, jaké operace se zásobníkem se mají provést po přečtení určitého znaku vstupního řetězce.

Předpokládejme, že ve vstupním řetězci mohou být pouze znaky A ... Z a že na zásobník lze ukládat celá čísla. Předpokládejme dále, že zásobník má neomezenou kapacitu a že při pokusu o operaci POP na prázdném zásobníku je ohlášena chyba (samotný prázdný zásobník chybu neznamena). Pravidla pro práci automatu lze zaznamenat tabulkou

čtený znak	operace
A	PUSH (1)
B	POP()
jiný	žádná

Určete, jaký bude obsah zásobníku po přečtení řetězce

- AAB
- ABAB
- BAA
- ABAABAAAB

28. Uvažujme zásobníkový automat **A2** s odlišnou tabulkou operací

čtený znak	operace
A	PUSH (0)
B	PUSH( POP() + 1)
C	POP()
jiný	žádná

Určete, jaký bude obsah zásobníku po přečtení řetězce

- AABB
- AABBC
- AABCB
- ABABBABBB

29. Automat **A2** z předchozí úlohy přečetl určitý řetězec  $r$  a má nyní prázdný zásobník. Co lze říci o počtu znaků A a C v řetězci  $r$ ?

30. Navrhněte takový vstupní řetězec pro automat **A2** z předchozí úlohy, aby po jeho přečtení zásobník obsahoval právě hodnoty 4 3 2 1 (vrchol zásobníku je vpravo). Kolik řešení má tato úloha?

31. Projděte binárním stromem a vypište obsah jeho uzlů v pořadí preorder bez použití rekurze, zato s využitím vlastního zásobníku.

32. Řešte předchozí úlohu pro pořadí inorder a postorder.

## Binární strom – programové zpracování

33. Aritmetický výraz obsahující celá čísla, závorky a operace  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$  (celočíslné dělení) může být reprezentován jako pravidelný binární strom. Popište, jak takový strom obecně vypadá, navrhněte implementaci uzlu a napište funkci, jejímž vstupem bude ukazatel na kořen stromu a výstupem hodnota odpovídajícího aritmetického výrazu.

34. Deklarujte uzel binárního stromu, který bude obsahovat celočíselné složky **výška** a **hloubka**. Ve složce **hloubka** bude uložena hloubka daného uzlu ve stromu, ve složce **výška** jeho výška. Výška uzlu  $X$  je definována jako vzdálenost od jeho nejvzdálenějšího potomka (= počet hran mezi uzlem  $X$  a jeho nejvzdálenějším potomkem). Napište funkci, která každému uzlu ve stromu přiřadí korektně hodnotu jeho hloubky a výšky.

## Další stromy – programové zpracování

**35.** Napište funkci, která vytvoří kopii obecného kořenového stromu. Ten je reprezentován takto: Uzel X stromu obsahuje dvě složky: **hodnota** a **potomci**. Složka **potomci** je ukazatel na zřetězený seznam obsahující jednotlivé ukazatele na potomky uzlu X. Nemá-li uzel X žádné potomky, složka **potomci** ukazuje na null. Každý prvek seznamu potomků obsahuje jen ukazatel na potomka X a ukazatel na další prvek v seznamu potomků. Strom je obecný, potomci libovolného uzlu nejsou nijak uspořádáni podle svých hodnot.

**36.** Napište rekurzivně a nerekurzivně funkci, která projde n-ární strom (každý uzel může mít až n podstromů. Odkazy na podstromy jsou uloženy v každém uzlu v poli délky n). Datová struktura uzlu (1 bod).