Dynamické programování

Myšlenka dynamického programování

Definice funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \;||\; (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y) & (x > 0) \;\&\&\; (y > 0) \end{cases}$$

Otázka

f(10,10) = ?

Program

```
int f(int x, int y) {
  if ( (x == 0) || (y == 0))
    return 1;
  return (2* f(x, y-1) + f(x-1,y));
}
```

```
print( f(10,10) );
```

Odpověď

f(10,10) = 127 574 017 

Myšlenka dynamického programování

Jednoduchá analýza

```
int count = 0;

public static int f(int x, int y) {
  count++;
  if ( (x == 0) || (y == 0))
    return 1;
  return (2* f(x, y-1) + f(x-1,y));
}
```

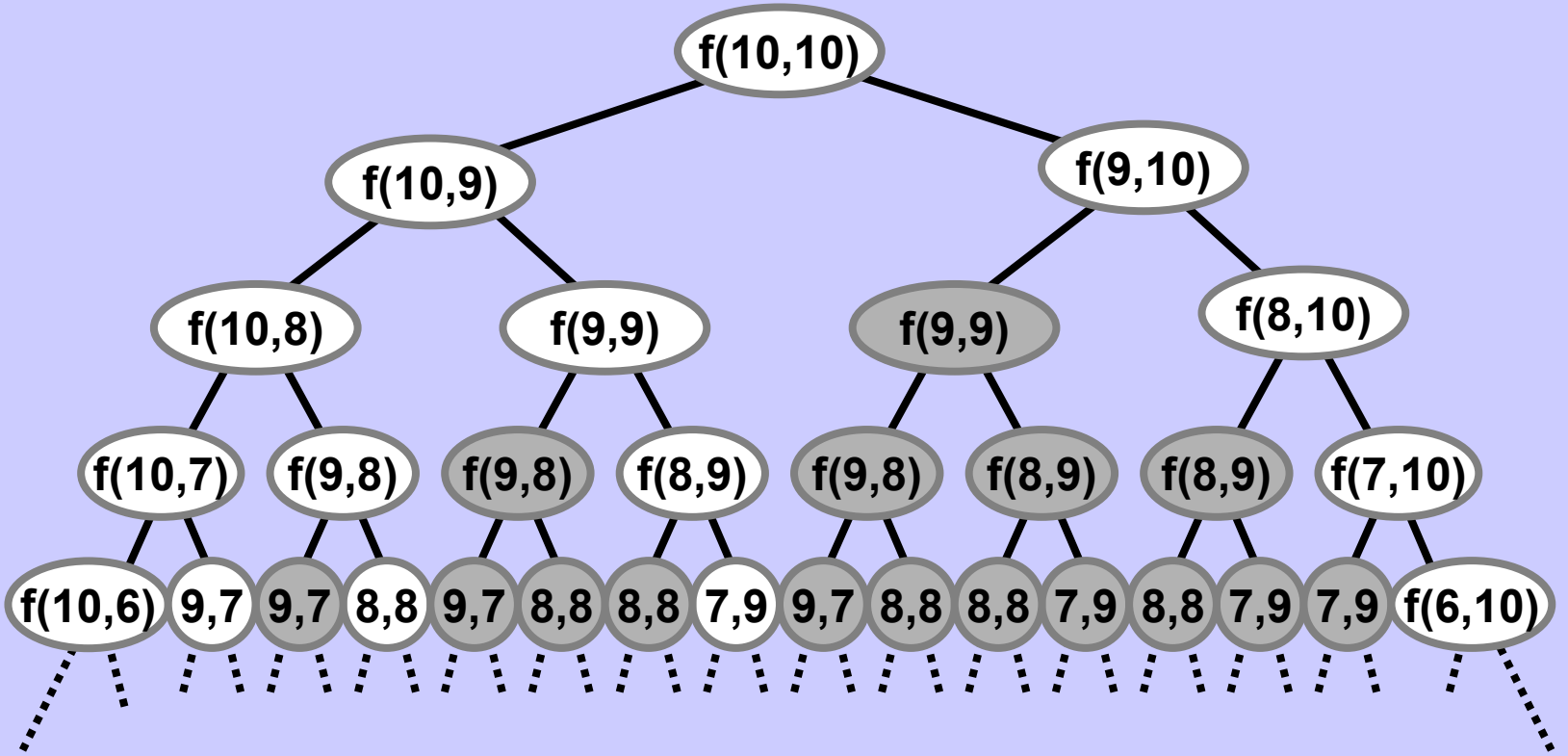
```
xyz = f(10,10);
print(count);
```

Výsledek analýzy

count = 369 511

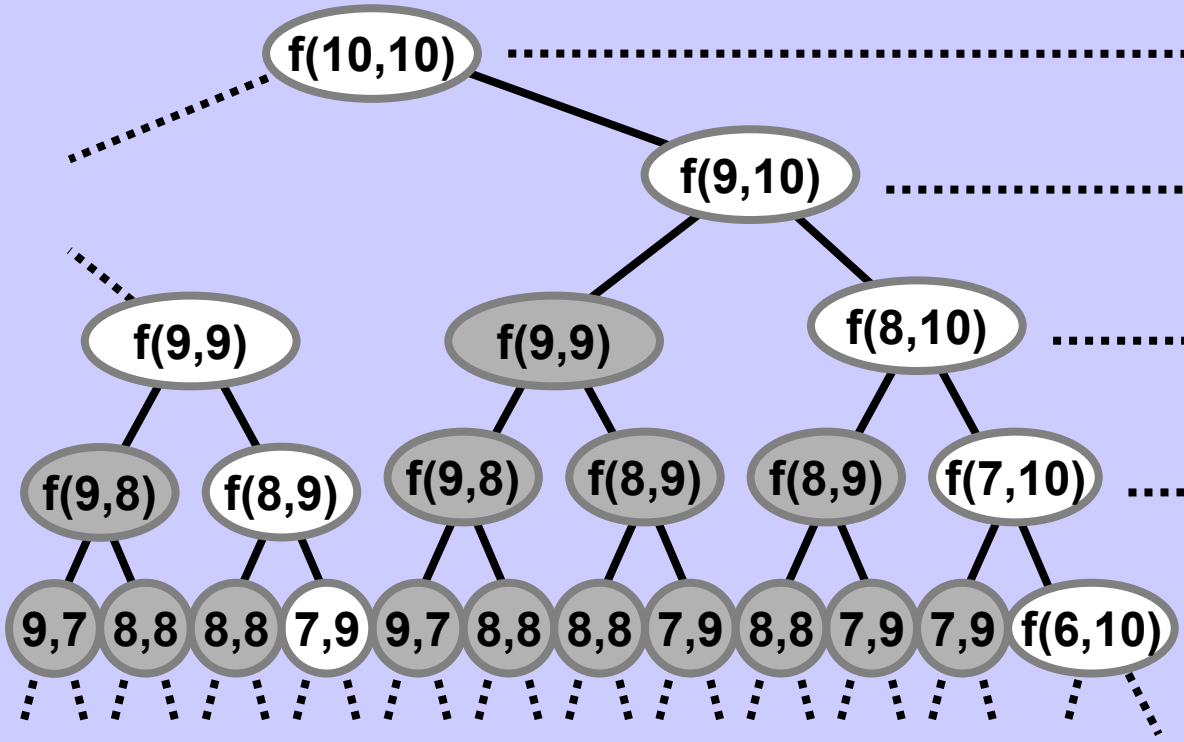
Myšlenka dynamického programování

Detailnější analýza – strom rekurzivního volání



Myšlenka dynamického programování

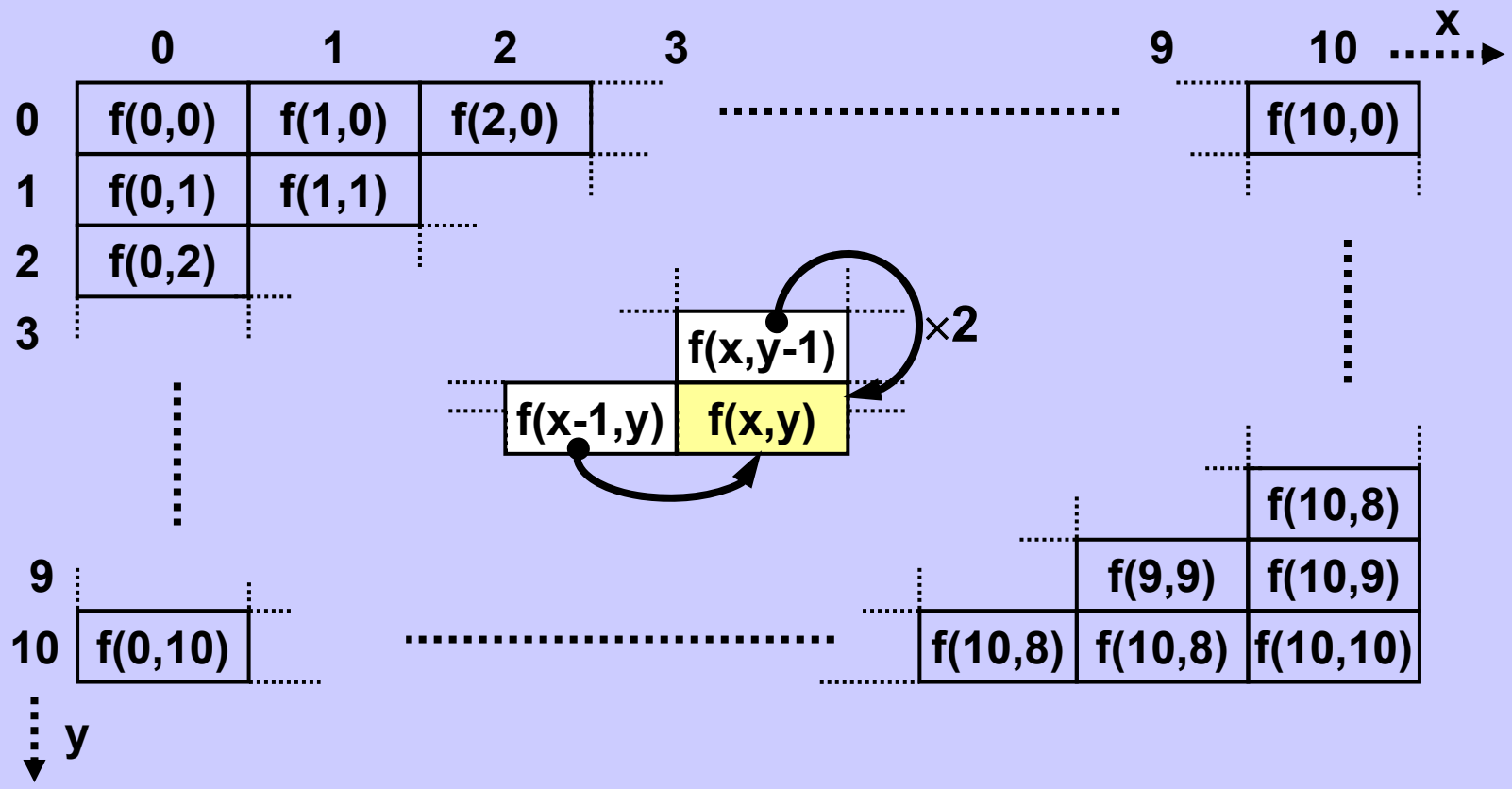
Detailnější analýza pokračuje – efektivita rekurzivního volání



počet: volání	hodnot
1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
…	…
512	10
…	…

Myšlenka dynamického programování

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \;||\; (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y) & (x > 0) \;\&\&\; (y > 0) \end{cases}$$



Myšlenka dynamického programování

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \;||\; (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y) & (x > 0) \;\&\&\; (y > 0) \end{cases}$$

y \ x	0	1	2	3	4	…	9	10
0	1	1	1	1	1	…		1
1	1	3	5	7	9			
2	1	7	17	31				
3	1	15	49					
4	1	31						
…								
9							16807935	32978945
10	1	…					28000257	61616127	127574017

f(x,y-1) ×2

f(x-1,y) f(x,y)

8085505

Myšlenka dynamického programování

Všechny hodnoty se předpočítají

```
static int dynArr [N+1][N+1];

void fillDynArr() {
  int xy, x, y;
  for (xy = 0; xy <= N; xy++)
      dynArr[0][xy] = dynArr[xy][0] = 1;

  for (y = 1; y <=N; y++)
    for (x = 1; x <= N; x++)
       dynArr[y][x] = 2*dynArr[y-1][x] + dynArr[y][x-1];
}
```

Volání funkce

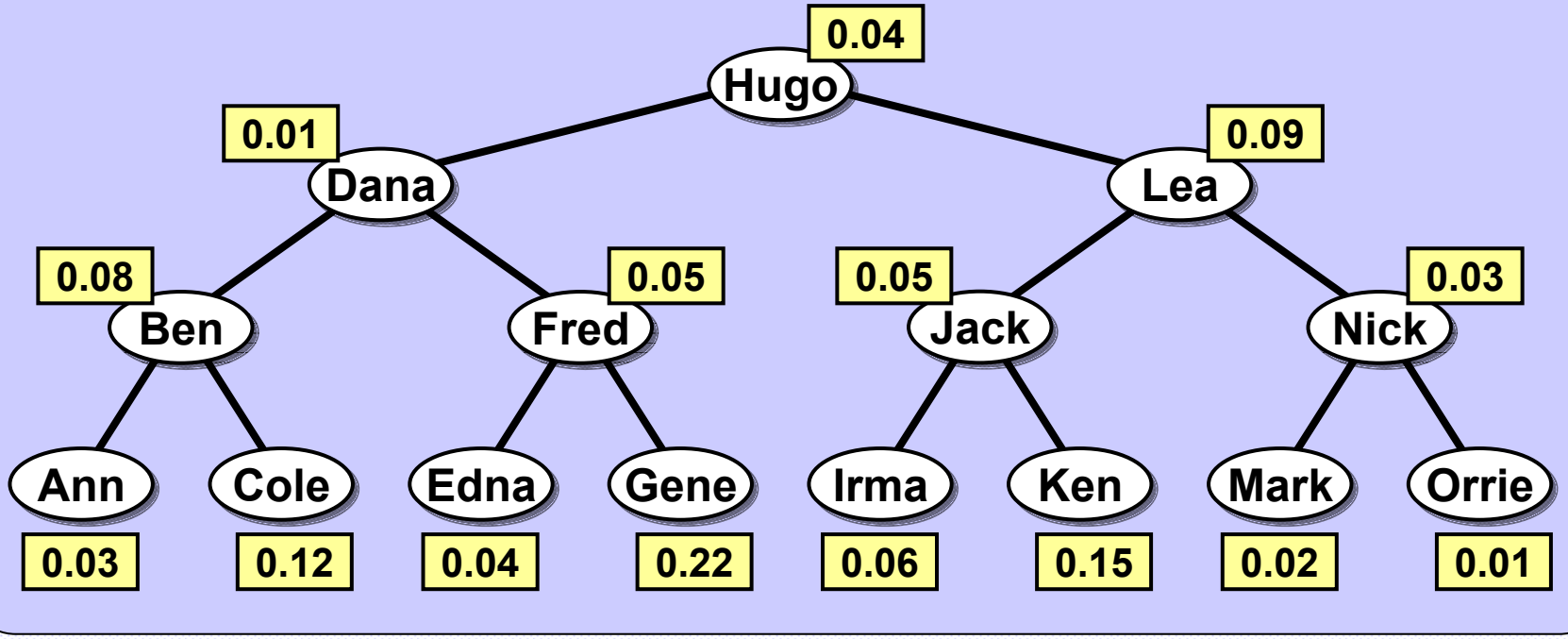
```
int f(int x,int y) {
  return dynArr[y][x];
}
```

Dynamické programování

Optimální binární vyhledávací strom

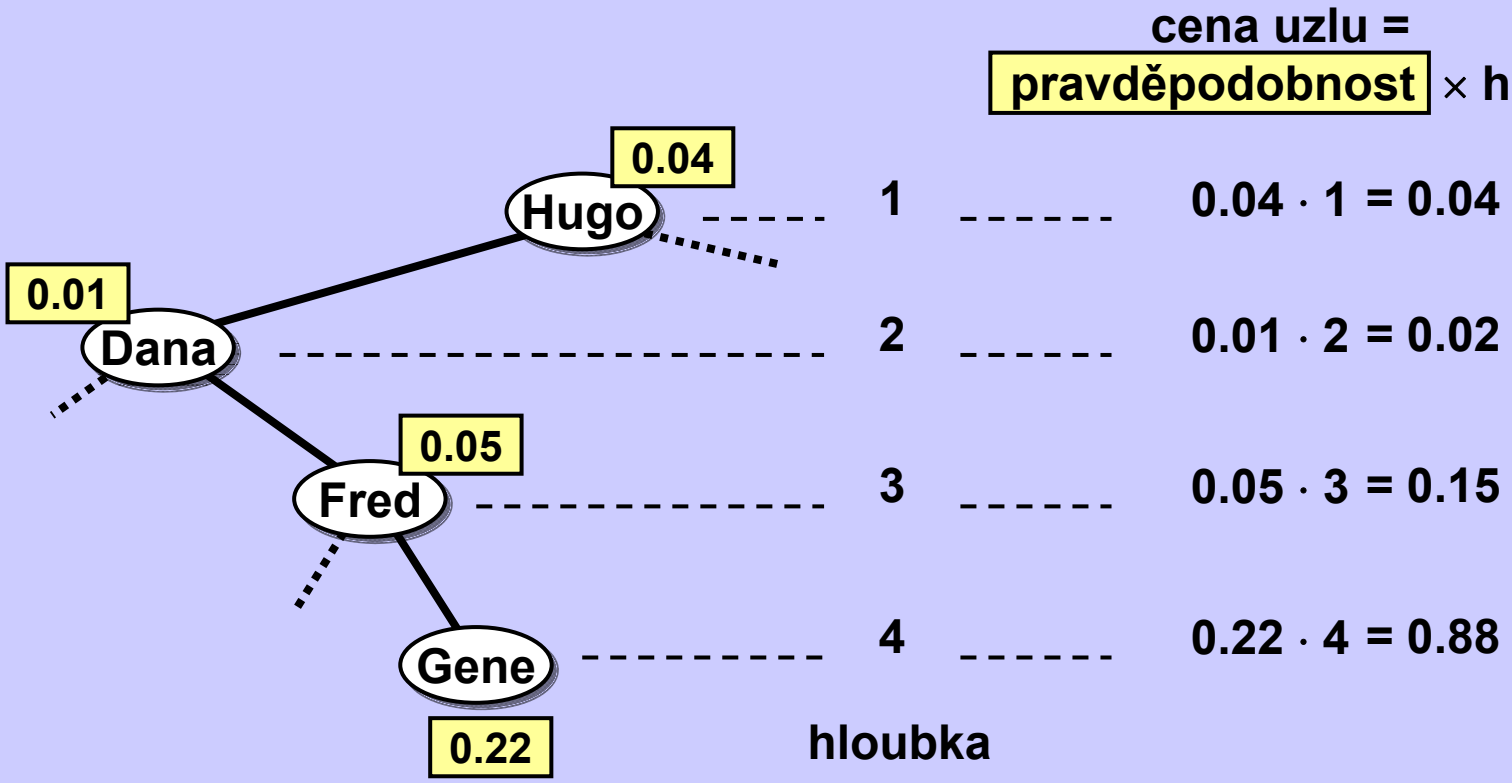
Optimální binární vyhledávací strom

Vyvážený, ale ne optimální



Optimální binární vyhledávací strom

Cena jednotlivých uzlů v BVS



cena uzlu = průměrný počet testů na nalezení uzlu při jednom dotazu (Find)

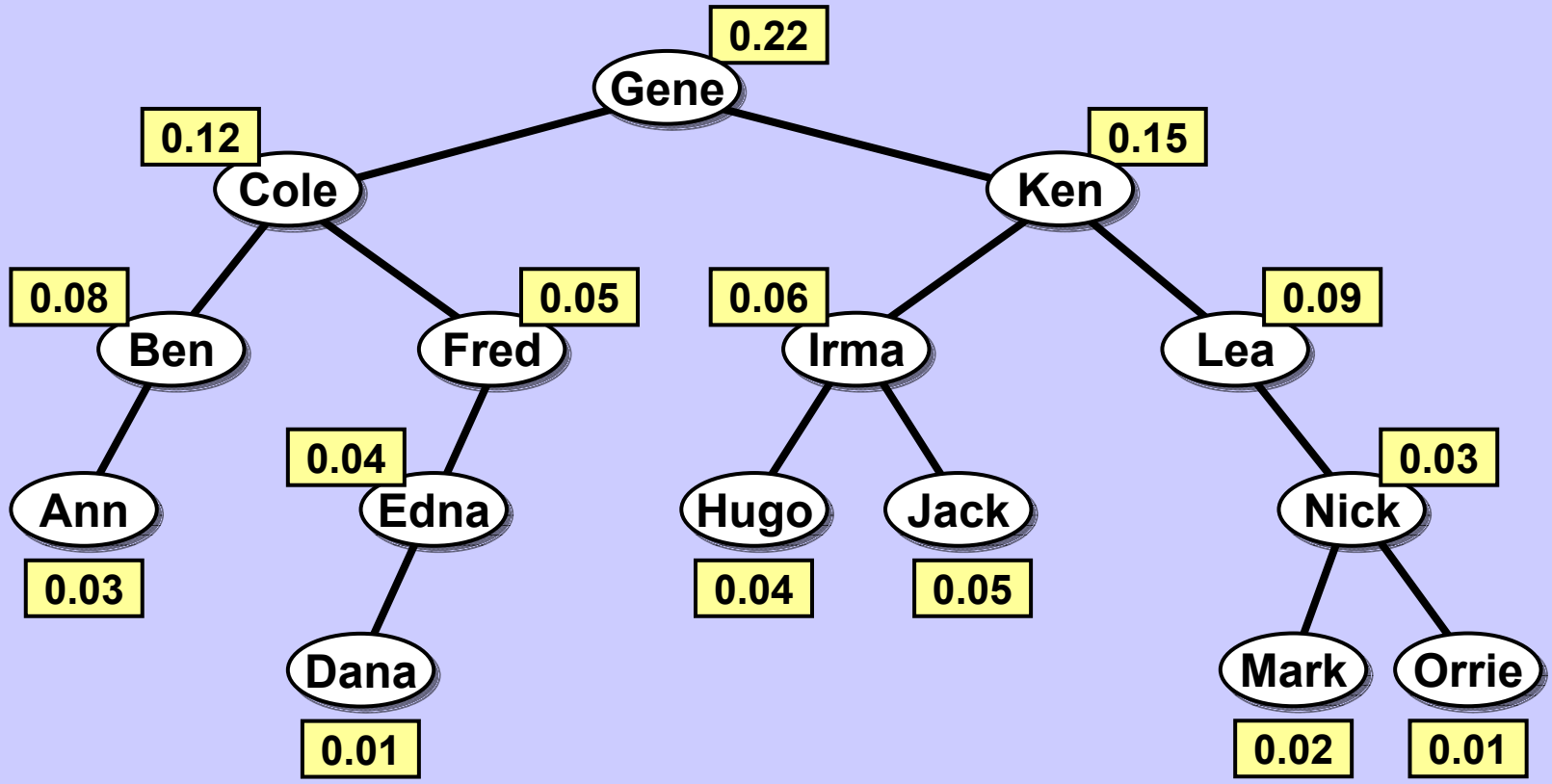
Cena vyváženého stromu

klíč	pravděp. p_k	hloubka d_k	$p_k \cdot d_k$
Ann	0.03	4	0.03 · 4 = 0.12
Ben	0.08	3	0.08 · 3 = 0.24
Cole	0.12	4	0.12 · 4 = 0.48
Dana	0.01	2	0.01 · 2 = 0.02
Edna	0.04	4	0.04 · 4 = 0.16
Fred	0.05	3	0.05 · 3 = 0.15
Gene	0.22	4	0.22 · 4 = 0.88
Hugo	0.04	1	0.04 · 1 = 0.04
Irma	0.06	4	0.06 · 4 = 0.24
Jack	0.05	3	0.05 · 3 = 0.15
Ken	0.15	4	0.15 · 4 = 0.60
Lea	0.09	2	0.09 · 2 = 0.18
Mark	0.02	4	0.02 · 4 = 0.08
Nick	0.03	3	0.03 · 3 = 0.09
Orrie	0.01	4	0.01 · 4 = 0.04
			Cena celkem: 3.47

Cena celkem = prům. poč. testů na jednu operaci Find.

Optimální BVS

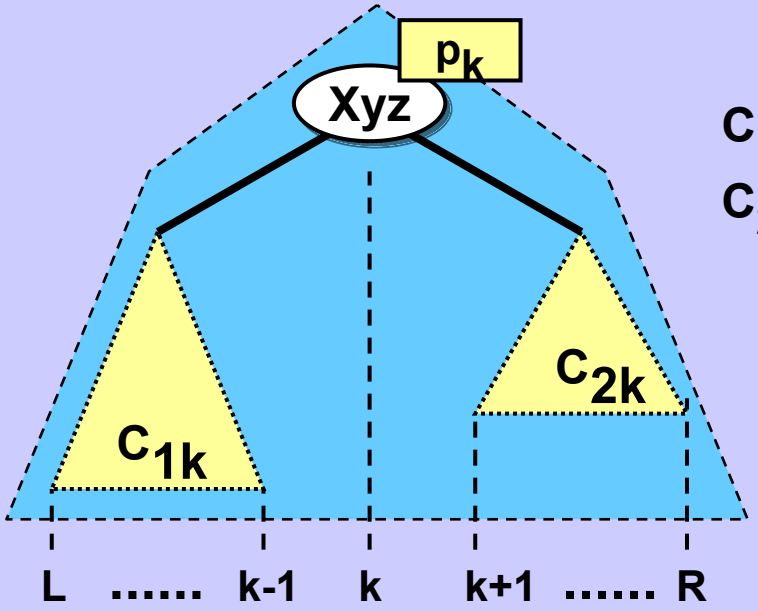
Struktura optimálního BVS s danými pravděpodobnostmi



Cena optimálního BVS

klíč	pravděp. p_k	hloubka d_k	$p_k \cdot d_k$
Ann	0.03	4	0.034 = 0.12
Ben	0.08	3	0.083 = 0.24
Cole	0.12	2	0.122 = 0.24
Dana	0.01	5	0.015 = 0.05
Edna	0.04	4	0.044 = 0.16
Fred	0.05	3	0.053 = 0.15
Gene	0.22	1	0.221 = 0.22
Hugo	0.04	4	0.044 = 0.16
Irma	0.06	3	0.063 = 0.18
Jack	0.05	4	0.054 = 0.20
Ken	0.15	2	0.152 = 0.30
Lea	0.09	3	0.093 = 0.27
Mark	0.02	5	0.025 = 0.10
Nick	0.03	4	0.034 = 0.12
Orrie	0.01	5	0.015 = 0.05
			Cena celkem 2.56
Zrychlení 3.47 : 2.56 = 1 : 0.74			

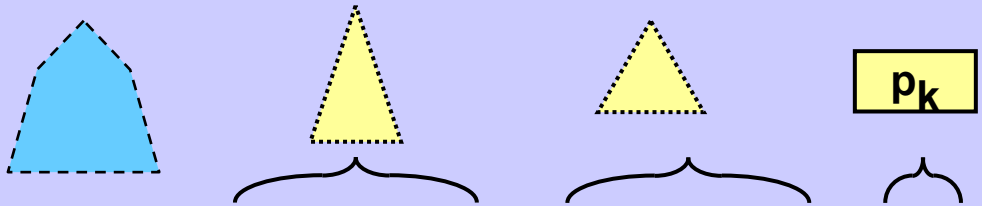
Výpočet ceny optimálního BVS



C_{1k} ..... cena levého podstromu uzlu k

C_{2k} ..... Cena pravého podstromu uzlu k

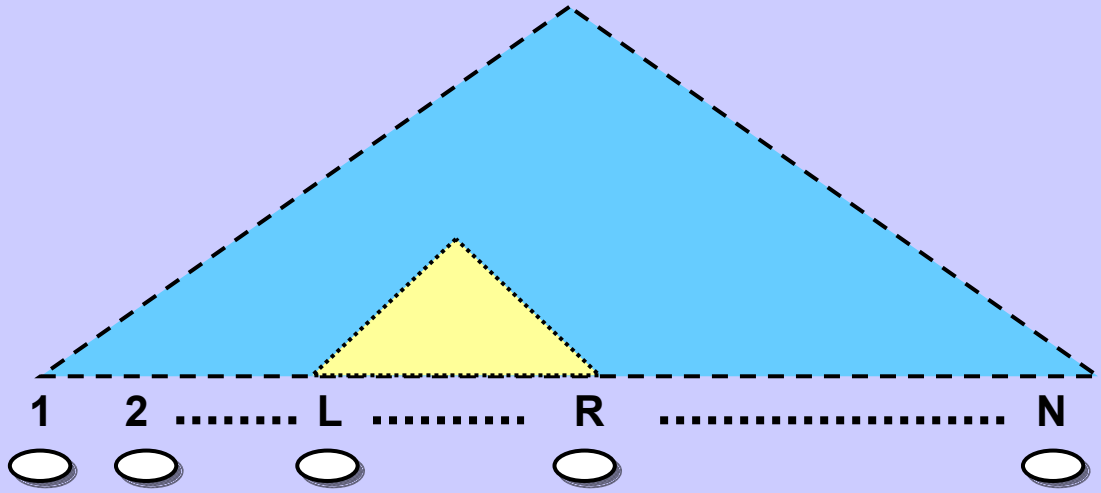
Rekurzivní myšlenka



$$\text{Cena} = C_{1k} + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C_{2k} + \sum_{i=k+1}^{R} p_i + p_k$$

Výpočet ceny optimálního BVS

Malé optimální podstromy



Nad prvky s indexy od L do R
lze jistě vytvořit jeden optimální podstrom.

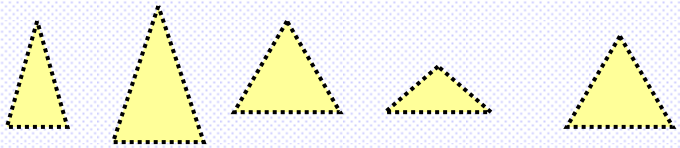
Velikost stromu
= poč. uzlů
= L-R+1

Máme N optimalních podstromů velikosti 1
N-1 2
N-2 3
⋮ ⋮
1 podstrom N

Celkem máme N * (N+1) /2 různých optimálních podstromů.

Minimalizace ceny BVS

Idea rekurzivního řešení:



1. Předpoklad : Všechny menší optimální stromy jsou známy.

2. Zkus: k = L, L+1, L+2, ..., R

3. Zaregistruj index k, který minimalizuje cenu, tj. hodnotu

$$C_{1k} + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C_{2k} + \sum_{i=k+1}^{R} p_i + p_k$$

4. Klíč s indexem k je kořenem optimálního stromu.

Minimalizace ceny BVS

C(L,R) ..... Cena optimálního podstromu obsahujícího klíče s indexy L, L+1, L+2, ..., R-1, R

$$C(L,R) = \min_{L \le k \le R} \{ C(L, k-1) + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C(k+1,R) + \sum_{i=k+1}^{R} p_i + p_k \} =$$

$$= \min_{L \le k \le R} \{ C(L, k-1) + C(k+1,R) + \sum_{i=L}^{R} p_i \} =$$

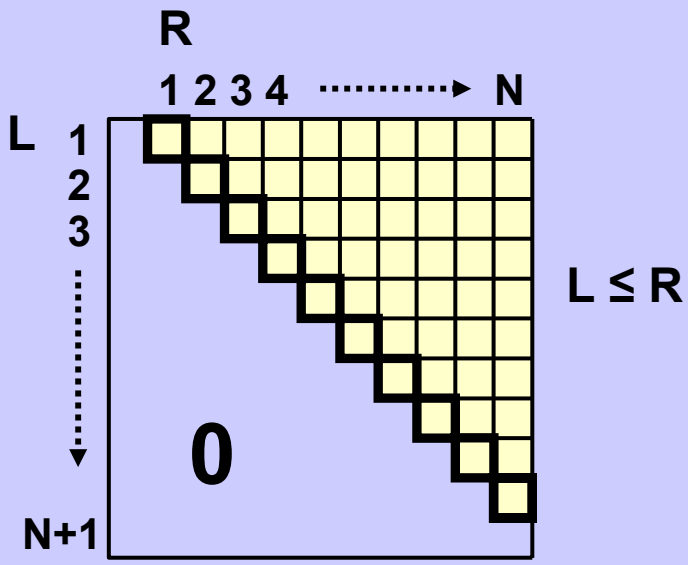
$$(*) \quad = \min_{L \le k \le R} \{ C(L, k-1) + C(k+1,R) \} + \sum_{i=L}^{R} p_i$$

Hodnota k minimalizující (*) je indexem kořenu optim. podstromu.

Datové struktury pro výpočet optmálního BVS

Ceny optimálních podstromů

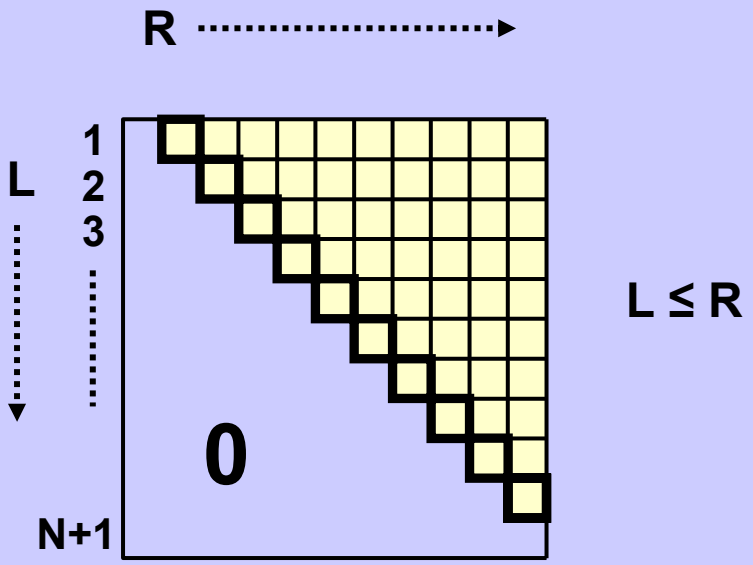
pole C [L][R] (L ≤ R)



diagonála ... L= R

Kořeny optimálních podstromů

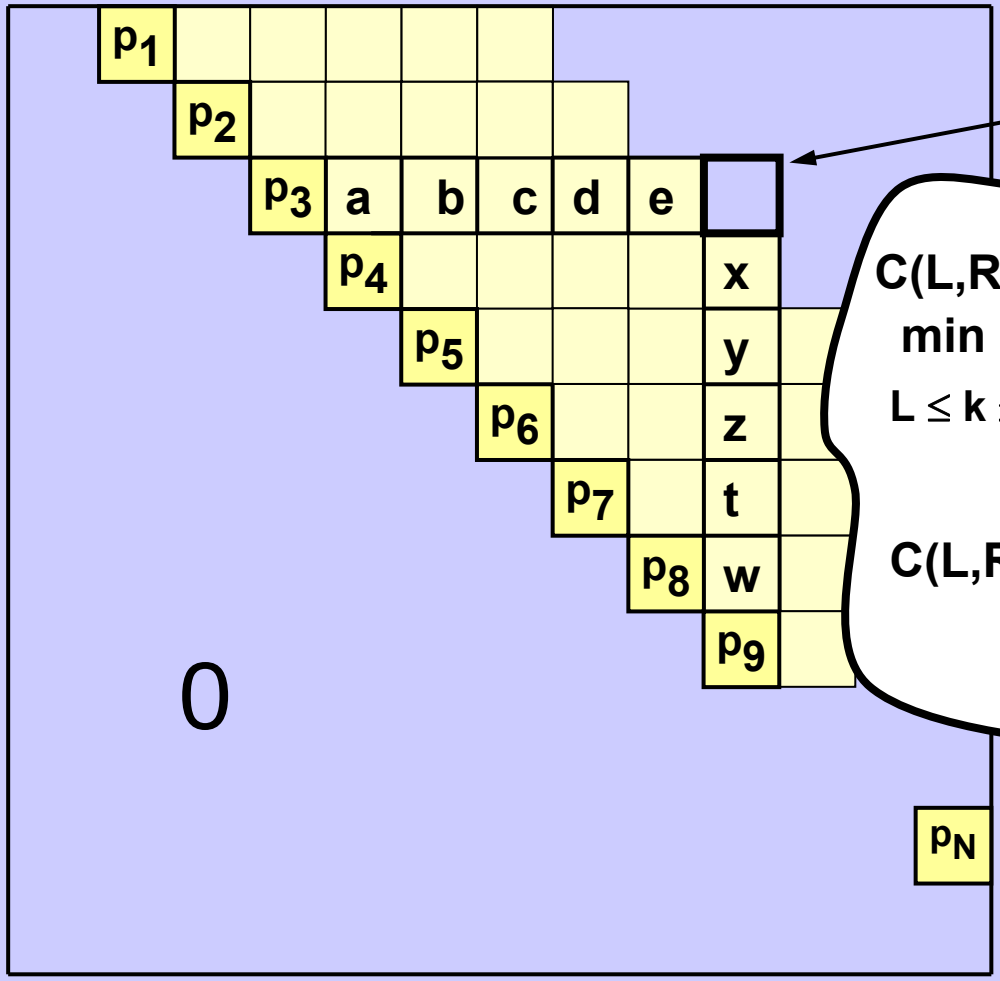
pole roots [L][R] (L ≤ R)



diagonála ... L= R

Výpočet optimálního BVS

Cena konkrétního optimálního podstromu



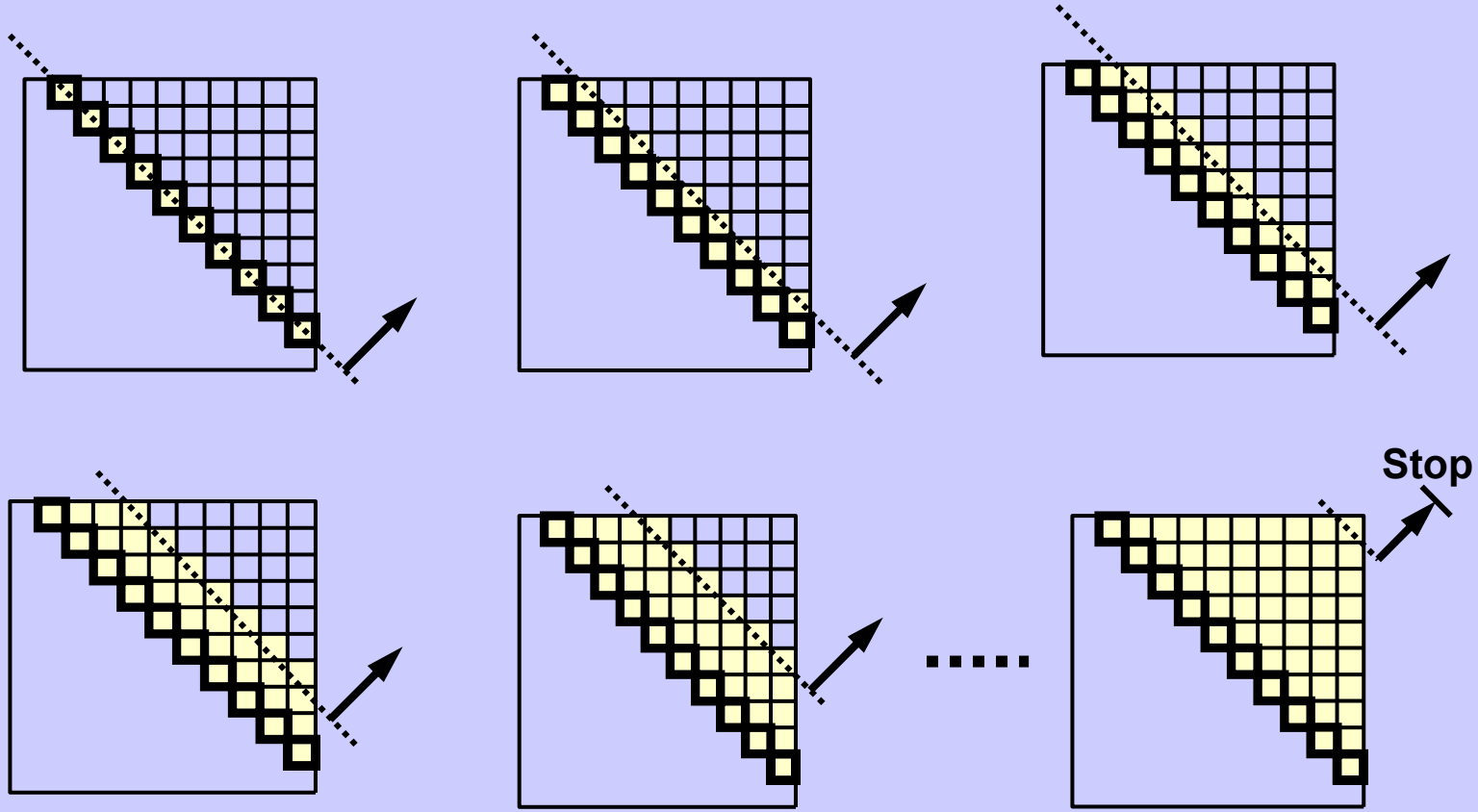
L=3, R=9

$$C(L,R) = \min_{L \le k \le R} \{ C(L, k-1) + C(k+1,R) \} + \sum_{i=L}^{R} p_i$$

$$C(L,R) = \min\{ 0+x,\ p_3+y,\ a+z,\ b+t,\ c+w,\ d+p_9,\ e+0 \}$$

Výpočet optimálního BVS

Strategie dynamického programování
– nejprve se zpracují nejmenší podstromy, pak větší, atd…



Výpočet optimálního BVS

Výpočet polí cen a kořenů

```
void optimalTree() {
  int L, R, k, size;   double min;

  // size = 1
  for (i=0; i<=N; i++) {
    C[i][i] = pravděpodobnost[i]; R[i][i] = I;

  // size > 1
  for (size = 2; size <= N; size++) {
    L = 1; R = size;
    while (R <= N) {
      C[L][R] = min(C[L][k-1]+C[k+1][R], k = L..R);
      roots[L][R] = 'k minimalizující předch. řádek';
      C[L][R] += sum(C[i][i], i = L..R);
      L++; R++;
}  }  }
```

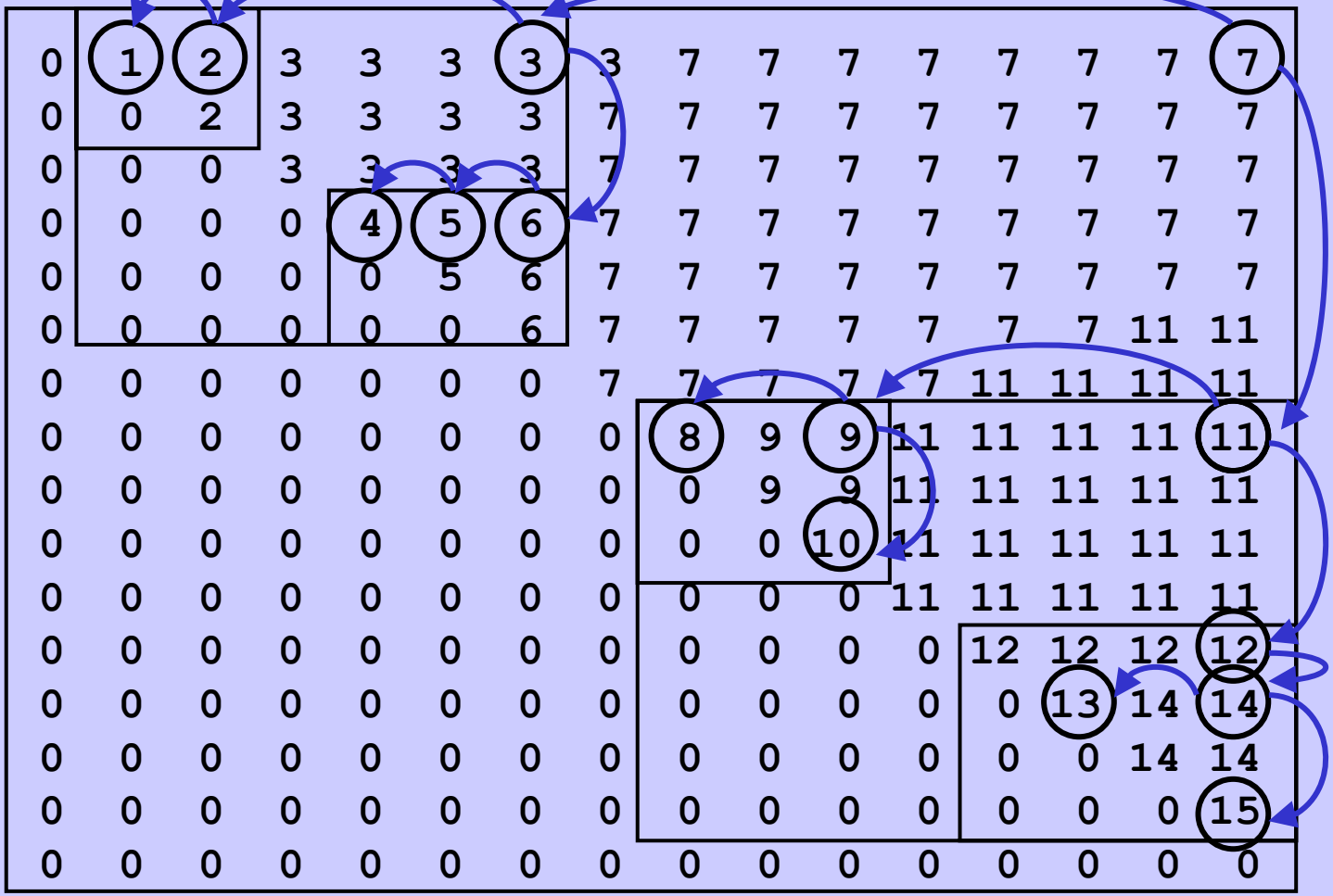
Výpočet optimálního BVS

Vybudování optimálního stromu pomocí pole kořenů

```
void buildTree(int L, int R) {
  int key;
  if (R < L) return;
  key = roots[L][R];
  insert(root, key);   // standard BST insert
  buildTree( L, k-1);
  buildTree( k+1, R);
}
```

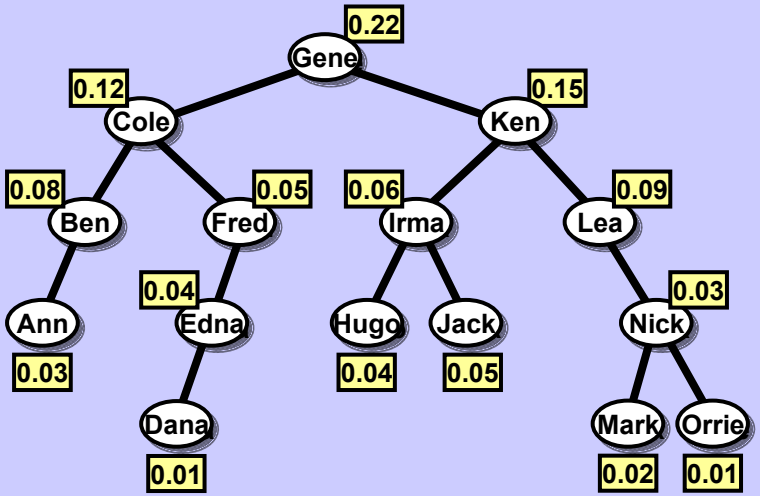
Výpočet optimálního BVS

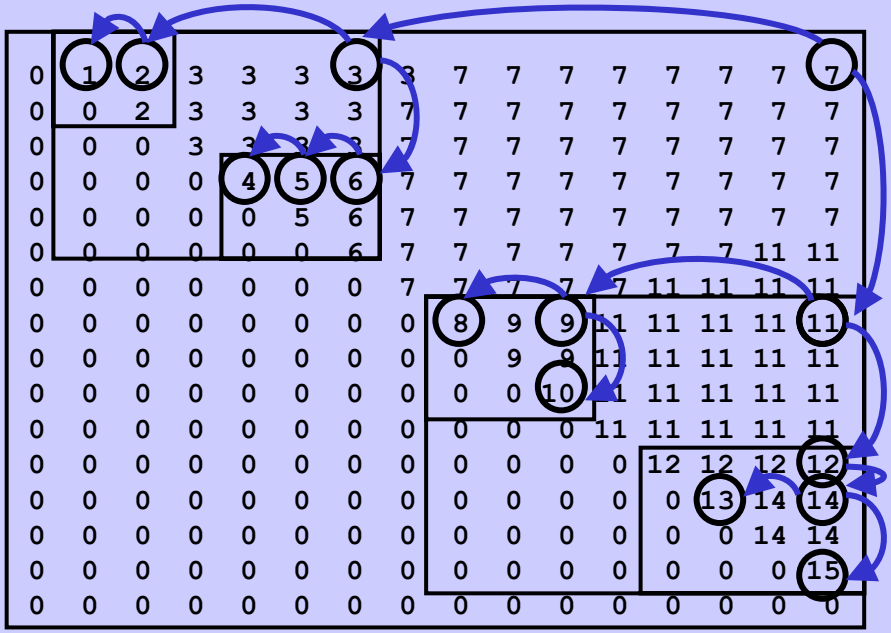
Kořeny optimálních podstromů

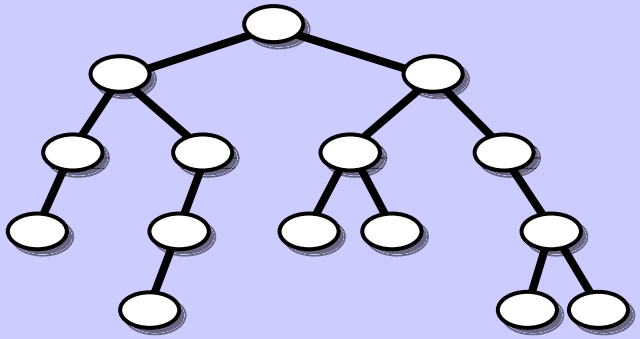


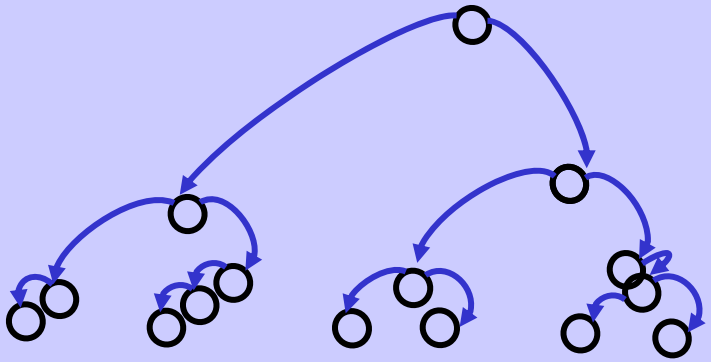
Výpočet optimálního BVS

Korespondence stromů









Výpočet optimálního BVS

Ceny optimálních podstromů

	1-A	2-B	3-C	4-D	5-E	6-F	7-G	8-H	9-I	10-J	11-K	12-L	13-M	14-N	15-O
1-A	0.03	0.14	0.37	0.39	0.48	0.63	1.17	1.26	1.42	1.57	2.02	2.29	2.37	2.51	2.56
2-B	0	0.08	0.28	0.30	0.39	0.54	1.06	1.14	1.30	1.45	1.90	2.17	2.25	2.39	2.44
3-C	0	0	0.12	0.14	0.23	0.38	0.82	0.90	1.06	1.21	1.66	1.93	2.01	2.15	2.20
4-D	0	0	0	0.01	0.06	0.16	0.48	0.56	0.72	0.87	1.32	1.59	1.67	1.81	1.86
5-E	0	0	0	0	0.04	0.13	0.44	0.52	0.68	0.83	1.28	1.55	1.63	1.77	1.82
6-F	0	0	0	0	0	0.05	0.32	0.40	0.56	0.71	1.16	1.43	1.51	1.63	1.67
7-G	0	0	0	0	0	0	0.22	0.30	0.46	0.61	1.06	1.31	1.37	1.48	1.52
8-H	0	0	0	0	0	0	0	0.04	0.14	0.24	0.54	0.72	0.78	0.89	0.93
9-I	0	0	0	0	0	0	0	0	0.06	0.16	0.42	0.60	0.66	0.77	0.81
10-J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.05	0.25	0.43	0.49	0.60	0.64
11-K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.15	0.33	0.39	0.50	0.54
12-L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.09	0.13	0.21	0.24
13-M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.02	0.07	0.09
14-N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03	0.05
15-O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01

Dynamické programování

Nejdelší společná podposloupnost

Nejdelší společná podposloupnost

Dvě posloupnosti

A: C B E A D D E A |A| = 8

B: D E C D B D A |B| = 7

Společná podposloupnost

A: C B E A D D E A

B: D E C D B D A

C: C D A |C| = 3

Nejdelší společná podposloupnost (NSP)

A: C B E A D D E A

B: D E C D B D A

C: E D D A |C| = 4

Nejdelší společná podposloupnost

A_n: $(a_1, a_2, ..., a_n)$

B_m: $(b_1, b_2, ..., b_m)$

C_k: $(c_1, c_2, ..., c_k)$

.....

$C_k = LCS(A_n, B_m)$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_8:	C	B	E	A	D	D	E	A
B_7:	D	E	C	D	B	D	A	
C_4:	E	D	D	A				

Rekurzivní pravidla:

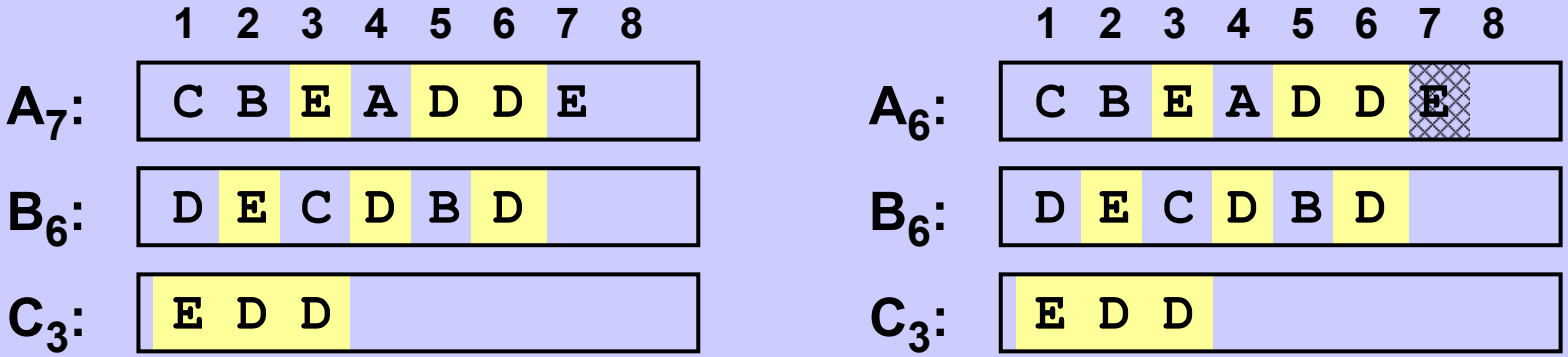
$(a_n = b_m) \Rightarrow (c_k = a_n = b_m) \ \& \ (C_{k-1} = LCS (A_{n-1}, B_{m-1}))$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_8:	C	B	E	A	D	D	E	A
B_7:	D	E	C	D	B	D	A	
C_4:	E	D	D	A				

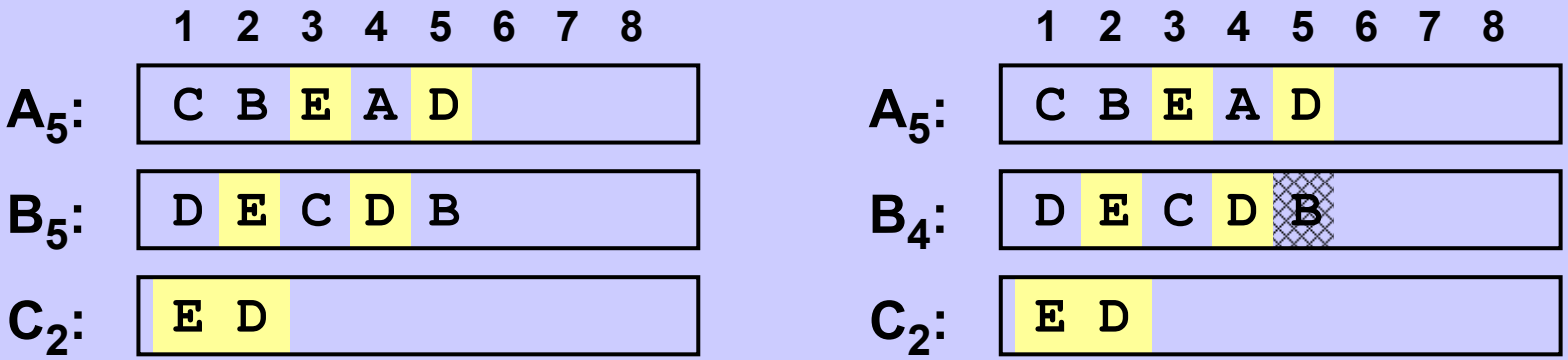
	1	2	3	4	5	6	7	8
A_7:	C	B	E	A	D	D	E	A
B_6:	D	E	C	D	B	D	A	
C_3:	E	D	D	A				

Nejdelší společná podposloupnost

$$(a_n \mathrel{!}= b_m) \;\&\; (c_k \mathrel{!}= a_n) \;\Longrightarrow\; (C_k = LCS(A_{n-1}, B_m))$$



$$(a_n \mathrel{!}= b_m) \;\&\; (c_k \mathrel{!}= b_m) \;\Longrightarrow\; (C_k = LCS(A_n, B_{m-1}))$$



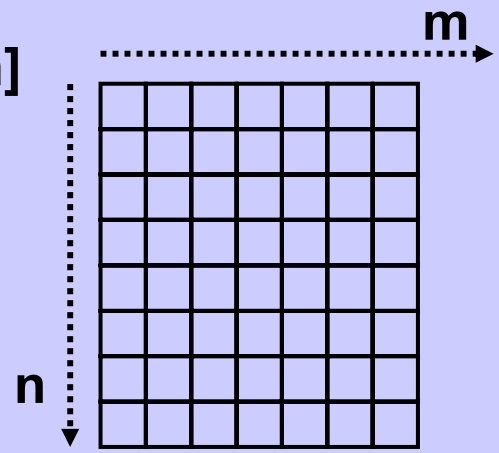
Nejdelší společná podposloupnost

Rekurzivní funkce – délka NSP

$$C(n,m) = \begin{cases} 0 & n = 0 \text{ or } m = 0 \\ C(n-1, m-1) + 1 & n > 0, m > 0, a_n = b_m \\ \max\{ C(n-1, m), C(n, m-1) \} & n > 0, m > 0, a_n \neq b_m \end{cases}$$

Strategie dynamického programování

C[n][m]




```
for (a=1; a<=n; a++)
  for (b=1; b<=m; b++)
    C[a][b] = .... ;
}
```

Nejdelší společná podposloupnost

Konstrukce pole pro NSP

```
void findLCS() {
  int a, b;
  for (a=1; a<=n; a++)
    for (b=1; b <= m; b++)
      if (A[a] == B[b]) {
         C[a][b] = C[a-1][b-1]+1;
         arrows[a][b] = DIAG;
         }
      else
        if (C[a-1][b] > C[a][b-1]) {
           C[a][b] = C[a-1][b];
           arrows[a][b] = UP;
        }
        else {
          C[a][b] = C[a][b-1];
          arrows[a][b] = LEFT;
 }      }
```

Nejdelší společná podposloupnost

Pole NSP pro

“CBEADDEA” a “DECDBDA”

		C	0	1	2	3	4	5	6	7
		B:	D	E	C	D	B	D	A	
0			0	0	0	0	0	0	0	0
1	C		0	←0	←0	↖1	←1	←1	←1	←1
2	B		0	←0	←0	↑1	←1	↖2	←2	←2
3	E		0	←0	↖1	←1	←1	↑2	←2	←2
4	A	A:	0	←0	↑1	←1	←1	↑2	←2	↖3
5	D		0	↖1	←1	←1	↖2	←2	↖3	←3
6	D		0	↖1	←1	←1	↖2	←2	↖3	←3
7	E		0	↑1	↖2	←2	←2	←2	↑3	←3
8	A		0	↑1	↑2	←2	←2	←2	↑3	↖4

Nejdelší společná podposloupnost

Výpis NSP -- rekurzivně :)

```
void outLCS(int a, int b) {
if ((a ==0 ) || (b == 0)) return;

if (arrows[a][b]  == DIAG) {
    outLCS(a-1, b-1);       // recursion ...
    print(A[a]);            //... reverses the sequence!
    }
else
    if (arrows[a][b] == UP)
        outLCS(a-1,b);
    else
        outLCS(a,b-1);
}
```