Numerické řešení nelineárních rovnic

Mirko Navara
http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/
Centrum strojového vnímání, katedra kybernetiky FEL ČVUT
Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a

http://math.feld.cvut.cz/nemecek/nummet.html

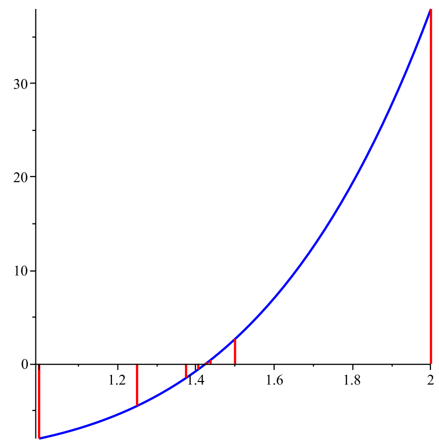
12. 1. 2016

Úloha: Hledáme reálné řešení rovnice $f(x) = 0$, kde f je spojitá reálná funkce na intervalu $\langle a_0, b_0 \rangle$.
Nutno upřesnit:
Úloha: Hledáme reálné řešení rovnice $f(x) = 0$, kde f je spojitá funkce na intervalu $\langle a_0, b_0 \rangle$.
Přitom předpokládáme, že $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ (tj. $f(a_0), f(b_0)$ mají opačná znaménka) a že f má v intervalu $\langle a_0, b_0 \rangle$ právě jeden kořen, $\overline{x}$. Řešení máme stanovit s danou přesností $\varepsilon > 0$, tj. máme najít nějakou hodnotu, která se nalézá v intervalu $\langle \overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon \rangle$.
Tomu předchází **separace kořenů**, která není algoritmizovatelná.

Metoda půlení intervalu neboli bisekce

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

- je-li $f(x_i) \cdot f(a_i) < 0$, pak $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = x_i$,
- je-li $f(x_i) \cdot f(b_i) < 0$, pak $a_{i+1} = x_i$, $b_{i+1} = b_i$,
- je-li $f(x_i) = 0$, pak $\overline{x} = x_i$.



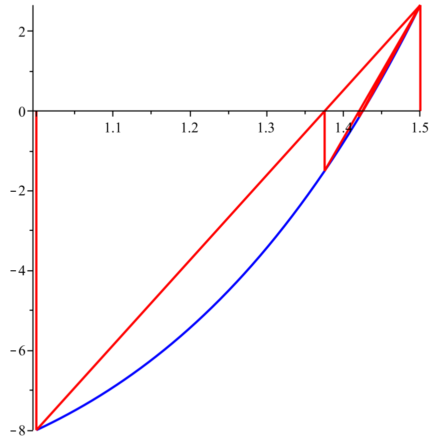
Podmínka ukončení: $\dfrac{b_i - a_i}{2} \le \varepsilon$
Konverguje vždy stejně rychle:
zpřesnění o 3 desetinná místa během 10 kroků

Metoda regula falsi

Interval $\langle a_i, b_i \rangle$ rozdělíme v poměru $\dfrac{|f(a_i)|}{|f(b_i)|}$:

$$\frac{x_i - a_i}{x_i - b_i} = \frac{f(a_i)}{f(b_i)}$$

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$



Typicky se jeden krajní bod intervalu nemění (např. pokud f'' nemění znaménko).

$$b_i - a_i \not\to 0$$

$$\lim_{i\to\infty} (b_i - a_i) \in \{|\overline{x} - a_j|, |\overline{x} - b_j| : j \in \mathbb{N}_0\}$$

Podmínka ukončení: $|f(x_i)| \le \delta$

Univerzální odhad chyby

Taylorův rozvoj funkce f se středem x_i vyhodnotíme v bodě $\overline{x}$:

$$\underbrace{f(\overline{x})}_{0} = f(x_i) + (\overline{x} - x_i)\, f'(\theta_i)$$

pro nějaké $\theta_i \in I(x_i, \overline{x})$

$$\overline{x} - x_i = \frac{-f(x_i)}{f'(\theta_i)}$$

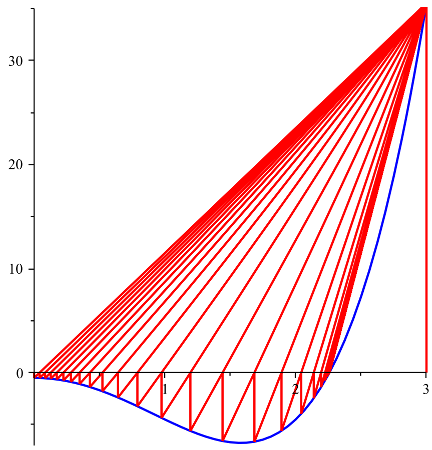
Pokud $\exists m_1 > 0\ \forall x \in I(x_i, \overline{x}) : m_1 \le |f'(x)|$,
přechodem k absolutním hodnotám dostaneme

$$|\overline{x} - x_i| \le \frac{|f(x_i)|}{m_1}$$

Věta: Nechť funkce f má na intervalu $I(x_i, \overline{x})$ spojitou derivaci a $\exists m_1 > 0\ \forall x \in I(x_i, \overline{x}) : m_1 \le |f'(x)|$. Pak

$$|\overline{x} - x_i| \le \frac{|f(x_i)|}{m_1} \le \frac{\delta}{m_1}$$

Větu nelze použít, neexistuje-li derivace a při hledání násobného kořene (metoda stále může být použitelná)
Metoda regula falsi konverguje rychleji, pokud zadaná funkce je (v okolí kořene) přibližně lineární.

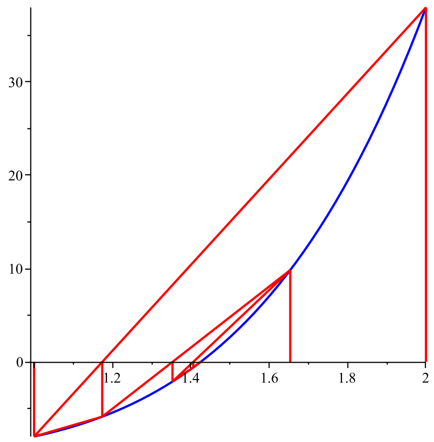


Metoda sečen

Modifikace metody regula falsi: pro další výpočet vždy použijeme dva posledně vypočtené body:

$$x_0 = b_0, \qquad x_1 = a_0$$

$$x_i = \frac{x_{i-2} f(x_{i-1}) - x_{i-1} f(x_{i-2})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}$$



Podmínka ukončení: $\quad |f(x_i)| \le \delta \quad$ nebo $\quad |x_i - x_{i-1}| \le \eta$

Konvergence bývá rychlejší, ale není zaručena

Newtonova metoda (metoda tečen)

Metody

- **jednobodové**
- **dvoubodové**
- **vícebodové**

Tečna ke grafu funkce f v bodě $\big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\big)$:

$$t_{i-1}(x) = f(x_{i-1}) + (x - x_{i-1}) \cdot f'(x_{i-1})$$

x_i je její nulový bod:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Předpokládá existenci a **znalost** první derivace, nutno ošetřit případné přetečení nebo dělení nulou

Podmínka ukončení: $\quad |f(x_i)| \le \delta \quad$ nebo $\quad |x_i - x_{i-1}| \le \eta$

Konvergence bývá rychlejší, ale není zaručena

Odhad chyby Newtonovy metody

Taylorův rozvoj funkce f se středem x_{i-1} vyhodnotíme v bodě x_i:

$$f(x_i) = \underbrace{f(x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})\, f'(x_{i-1})}_{0} + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})^2\, f''(\xi_i)$$

kde $\xi_i \in I(x_i, x_{i-1})$. Dosadíme do univerzálního odhadu:

$$\overline{x} - x_i = \frac{-f(x_i)}{f'(\theta_i)} = \frac{-f''(\xi_i)}{2f'(\theta_i)}\,(x_i - x_{i-1})^2$$

Pokud lze najít odhady

$$\begin{aligned} \exists M_2\ \forall x \in I(x_i, \overline{x}) : &\qquad |f''(x)| \le M_2 \\ \exists m_1 > 0\ \forall x \in I(x_i, x_{i-1}) : &\qquad |f'(x)| \ge m_1 \end{aligned}$$

pak přechodem k absolutním hodnotám dostaneme

$$|\overline{x} - x_i| \le \frac{M_2}{2m_1} (x_i - x_{i-1})^2$$

Odhad chyby Newtonovy metody

Věta: Nechť $\overline{x}$ je **jednoduchý** kořen funkce f, která má na intervalu $I(x_i, x_{i-1}, \overline{x})$ (kde x_i je výsledek jednoho kroku Newtonovy metody aplikované na odhad x_{i-1}) spojitou druhou derivaci. Nechť existují reálná čísla M_2, $m_1 > 0$ taková, že

$$\begin{array}{rl} \forall x \in I(x_i, \overline{x}): & |f'(x)| \ge m_1 \\ \forall x \in I(x_i, x_{i-1}): & |f''(x)| \le M_2 \end{array}$$

Pak platí odhad chyby

$$|\overline{x} - x_i| \le \frac{M_2}{2m_1} (x_i - x_{i-1})^2$$

Důsledek: Při splnění podmínky ukončení $|x_i - x_{i-1}| \le \eta$ dostáváme odhad chyby

$$|\overline{x} - x_i| \le \frac{M_2}{2m_1} \eta^2$$

Jednoduché pravidlo: pokud Newtonova metoda konverguje a aproximace se nachází v blízkosti kořene, v každém kroku se zhruba zdvojnásobí počet míst za desetinnou čárkou, která jsou správně vypočtená.
Správně: pokud je chyba mnohem menší než 1 a absolutní hodnoty první a druhé derivace funkce f jsou přibližně stejně velké, pak činitel $\frac{M_2}{2m_1}$ můžeme zanedbat a pravidlo platí, neboť

$$|\overline{x} - x_i| \approx (x_i - x_{i-1})^2 \approx (\overline{x} - x_{i-1})^2$$

Pokud se však poměr $\frac{M_2}{2m_1}$ hodně liší od jednotky, pravidlo nemůžeme použít.

Konvergence Newtonovy metody

Není zaručena. Metoda může divergovat zejména při špatném počátečním odhadu.
Předpoklad: f má spojitou druhou derivaci v okolí **jednoduchého** kořene $\overline{x}$.
Pak $f'(\overline{x}) \neq 0$ a f' je spojitá v okolí $\overline{x}$
$\Rightarrow$ lze najít uzavřené okolí I bodu $\overline{x}$ takové, že

$$\begin{array}{rl} \exists m_1 > 0 \ \forall x \in I: & |f'(x)| \ge m_1 \\ \exists M_2 \ \forall x \in I: & |f''(x)| \le M_2 \end{array}$$

Nechť $x_{i-1} \in I \setminus \{\overline{x}\}$.
Taylorův rozvoj funkce f se středem x_{i-1} vyhodnotíme v bodě $\overline{x}$:

$$\underbrace{f(\overline{x})}_{0} = f(x_{i-1}) + (\overline{x} - x_{i-1}) f'(x_{i-1}) + \tfrac{1}{2}(\overline{x} - x_{i-1})^2 f''(\xi_i),$$

kde $\xi_i \in I(\overline{x}, x_{i-1})$. Odečteme

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & f(x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1}) f'(x_{i-1}) \\ 0 & = & (\overline{x} - x_i) f'(x_{i-1}) + \frac{1}{2}(\overline{x} - x_{i-1})^2 f''(\xi_i) \\ \dfrac{\overline{x} - x_i}{(\overline{x} - x_{i-1})^2} & = & -\dfrac{f''(\xi_i)}{2f'(x_{i-1})} \\ \dfrac{|\overline{x} - x_i|}{(\overline{x} - x_{i-1})^2} & \le & \dfrac{M_2}{2m_1} \\ \dfrac{|\overline{x} - x_i|}{|\overline{x} - x_{i-1}|} & \le & \dfrac{M_2}{2m_1} |\overline{x} - x_{i-1}| \end{array}$$

Konvergence Newtonovy metody

Pro x_{i-1} dostatečně blízko $\overline{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{M_2}{2m_1}\,|\overline{x}-x_{i-1}| &\leq q\\ \frac{|\overline{x}-x_i|}{|\overline{x}-x_{i-1}|} &\leq q\end{aligned}$$

pro nějaké (předem dané) $q < 1$, tj. chyba se v jednom kroku zmenší v poměru aspoň q a metoda konverguje.
Věta: Nechť funkce f má spojitou druhou derivaci v okolí **jednoduchého** kořene $\overline{x}$. Pak Newtonova metoda konverguje v nějakém okolí kořene $\overline{x}$.

Náhrada derivace numerickým odhadem

Alternativou je numerický výpočet derivace, který zde lze začlenit do metody.
Výpočtu dalších funkčních hodnot se vyhneme použitím poslední dvou vypočtených, $f(x_{i-1})$, $f(x_{i-2})$; derivaci nahradíme směrnicí sečny:

$$\begin{aligned}f'(x_{i-1}) &\approx \frac{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{x_{i-1}-x_{i-2}}\\ x_i &= x_{i-1}-\frac{f(x_{i-1})}{\dfrac{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{x_{i-1}-x_{i-2}}} = \frac{x_{i-2}f(x_{i-1})-x_{i-1}f(x_{i-2})}{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}\end{aligned}$$

Nic nového pod sluncem: metoda sečen (ale myšlenka byla správná).

Rychlost konvergence

Definice: Nechť metoda řešení rovnice $f(x) = 0$ dává za výsledek posloupnost aproximací x_i, $i \in \mathbb{N}$, konvergující ke kořeni $\overline{x}$. Pak **řád metody** je takové číslo p, že limita

$$\lim_{i\to\infty}\frac{|\overline{x}-x_i|}{|\overline{x}-x_{i-1}|^p}$$

existuje, je konečná a nenulová.

Pro menší p je $\frac{|\overline{x}-x_i|}{|\overline{x}-x_{i-1}|^p} \to 0$. Pro větší p je $\frac{|\overline{x}-x_i|}{|\overline{x}-x_{i-1}|^p} \to \infty$. Pro nejvýše jedno p vychází limita konečná a nenulová; tato hodnota je řád metody.

metoda	řád	podmínka
bisekce	nedef. (~ 1)	
regula falsi	1	druhá derivace nemění znaménko
sečen	$(1+\sqrt{5})/2$	jednoduchý kořen
Newtonova	2	jednoduchý kořen

Kombinace startovacích a zpřesňujících metod

Kombinace dvou metod – **startovací** a **zpřesňující**.
Výpočet zahájíme startovací metodou, od níž se požaduje zaručená konvergence, byť třeba pomalá (např. metoda bisekce nebo regula falsi). Ta vlastně jen vylepší separaci kořene.
Poté zkusíme uplatnit zpřesňující metodu, která by měla rychleji konvergovat a urychlit tak zpřesnění nalezeného odhadu (např. Newtonova metoda). Její konvergence nebývá zaručena, ale můžeme se vrátit ke startovací metodě.

Metoda prosté iterace (MPI)

Rovnici $f(x) = 0$ převedeme na ekvivalentní tvar $\varphi(x) = x$,
např. $\varphi(x) = f(x) + x$
Počáteční odhad x_0,

$$x_i = \varphi(x_{i-1})\,.$$

Podmínka ukončení:

$$|x_i - x_{i-1}| < \eta\,.$$

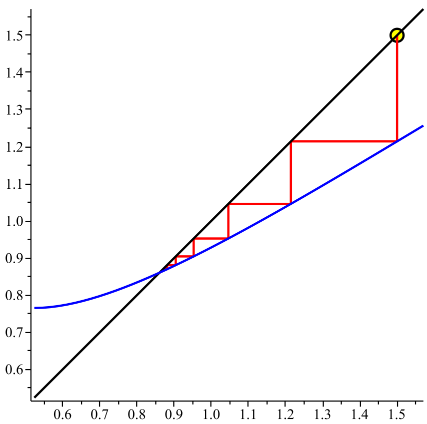
Tvrzení: Pokud MPI konverguje k $\tilde{x}$ a φ je v $\tilde{x}$ spojitá, pak $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$, $f(\tilde{x}) = 0$.

Důkaz:

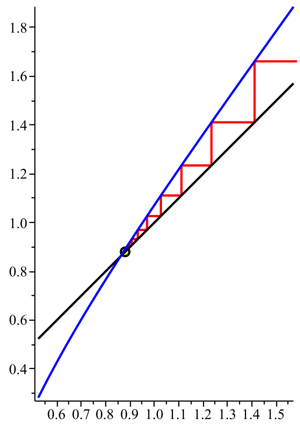
$$\varphi(\tilde{x}) = \varphi\Big(\lim_{i\to\infty} x_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \varphi(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = \lim_{i\to\infty} x_i = \tilde{x}\,.$$

Příklad použití MPI

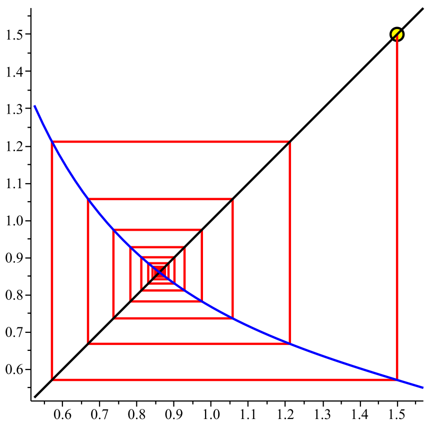
Hledáme nejmenší kladné řešení rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x) = x - \operatorname{cotg} x$.
$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0, \quad f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{x} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$
Zvolíme $\varphi(x) = \lambda f(x) + x$, kde $\lambda \neq 0$; podmínka ukončení pro $\eta = 0.001$.
Vyzkoušíme $\lambda \in \{-0.2, 0.2, -0.65, -0.8\}$.



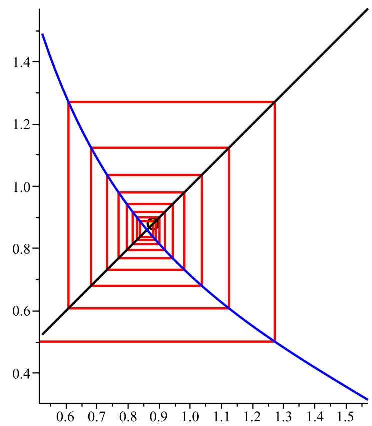
$x_{i+1} = 0.8\,x_i + 0.2\operatorname{cotg} x_i$,
$x_0 = 1.5$,
konverguje monotónně



$x_{i+1} = 1.2\,x_i - 0.2\operatorname{cotg} x_i$,
$x_0 = 0.88$
diverguje monotónně



$x_{i+1} = 0.35\,x_i + 0.65\operatorname{cotg} x_i$,
$x_0 = 1.5$,
konverguje nemonotónně



$x_{i+1} = 0.2\,x_i + 0.8\operatorname{cotg} x_i$,
$x_0 = 0.88$,
diverguje nemonotónně

Kontraktivní funkce

Definice: Řekneme, že funkce φ je na intervalu I **kontraktivní** (s koeficientem q), jestliže

$$\exists q < 1\ \forall u, v \in I : |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq q \cdot |u - v|\,.$$

kontraktivita $\Rightarrow$ spojitost

Věta: (Postačující podmínka pro kontraktivitu) Nechť funkce φ má na intervalu I spojitou derivaci a existuje $q < 1$ takové, že

$$\forall x \in I : |\varphi'(x)| \leq q\,.$$

Pak φ je na I kontraktivní s koeficientem q.

Důkaz:

$$|\varphi(u)-\varphi(v)| = \left|\int_v^u \varphi'(x)\,dx\right| \le \int_v^u |\varphi'(x)|\,dx \le \int_v^u q\,dx = q\cdot|u-v|\,.$$

Věta o pevném bodě

Věta: (Banachova věta o pevném bodě pro reálné funkce) Nechť φ je funkce kontraktivní s koeficientem $q<1$ na nějakém uzavřeném intervalu $I=\langle a,b\rangle$ taková, že zobrazuje I do I. Pak rovnice $\varphi(x)=x$ má v intervalu I právě jedno řešení $\overline{x}$. To dostaneme MPI s libovolnou počáteční hodnotou $x_0\in I$. Odhad chyby:

$$|\overline{x}-x_i| \le \frac{q}{1-q}\,|x_i-x_{i-1}|\,.$$

Důkaz:

- Existence řešení:

φ zobrazuje I do I

$\psi(x)=\varphi(x)-x$ je ψ v a nezáporná a v b nekladná; je spojitá, a tedy má v I nulový bod; ten je řešením rovnice $\varphi(x)=x$.

- Jednoznačnost řešení: Předpokládejme další řešení $\overline{\overline{x}}\in I$. Pak

$$|\overline{x}-\overline{\overline{x}}| = |\varphi(\overline{x})-\varphi(\overline{\overline{x}})| \le q\cdot|\overline{x}-\overline{\overline{x}}| \quad\Rightarrow\quad \overline{\overline{x}}=\overline{x}$$

- Konvergence MPI k řešení:

$$|\overline{x}-x_i| = |\varphi(\overline{x})-\varphi(x_{i-1})| \le q\cdot|\overline{x}-x_{i-1}| \le \ldots \le q^i\cdot|\overline{x}-x_0| \to 0$$

- Odhad chyby:

$$\begin{aligned}
|\overline{x}-x_i| &\le q\cdot|\overline{x}-x_{i-1}| = q\cdot|(\overline{x}-x_i)+(x_i-x_{i-1})|\\
&\le q\cdot|\overline{x}-x_i| + q\cdot|x_i-x_{i-1}|\\
|\overline{x}-x_i| &\le \frac{q}{1-q}\,|x_i-x_{i-1}|
\end{aligned}$$

Optimalizace MPI

Jak rovnici $f(x)=0$ převést na ekvivalentní tvar $\varphi(x)=x$ takový, že MPI rychle konverguje?
Možné řešení:

$$\varphi(x) = x+\lambda f(x)\,,$$

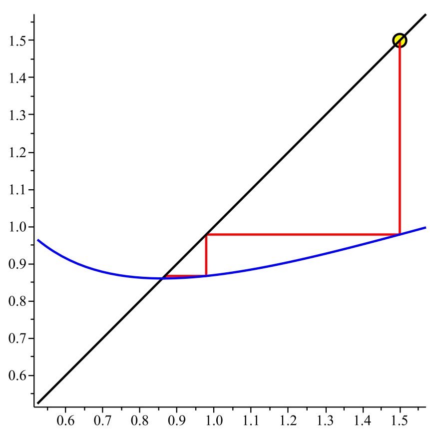
kde $\lambda\neq 0$ a

$$\varphi'(x) = 1+\lambda f'(x)$$

je malá.

Příklad: (pokračování) $f'(x)=2+\operatorname{cotg}^2 x \in \langle 2,3\rangle \Rightarrow \lambda\in\langle -\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\rangle$
$-1/f'(0.86)\approx -0.365 \Rightarrow \lambda=-0.365$

$$\varphi(x) = 0.635\,x + 0.365\operatorname{cotg} x\,.$$



$x_{i+1} = 0.635\, x_i + 0.365 \operatorname{cotg} x_i,\ x_0 = 1.5$
konverguje monotónně a rychle

Řád metody prosté iterace

Věta: Nechť MPI konverguje k $\overline{x}$. Nechť p je nejmenší přirozené číslo, pro které $\varphi^{(p)}(\overline{x}) \neq 0$, a $\varphi^{(p)}$ je spojitá v nějakém okolí bodu $\overline{x}$. Pak řád metody je p.

Důkaz: Taylorův rozvoj funkce φ se středem $\overline{x}$ vyhodnotíme v x_{i-1}:

$$\varphi(x_{i-1}) = \varphi(\overline{x}) + \frac{1}{p!}\,(x_{i-1} - \overline{x})^p\, \varphi^{(p)}(\xi_{i-1})\,,\ \text{kde } \xi_{i-1} \in I(\overline{x}, x_{i-1}),$$

$$x_i = \overline{x} + \frac{1}{p!}\,(x_{i-1} - \overline{x})^p\, \varphi^{(p)}(\xi_{i-1})\,,$$

$$\frac{|\overline{x} - x_i|}{|\overline{x} - x_{i-1}|^p} = \frac{1}{p!}\,|\varphi^{(p)}(\xi_{i-1})| \to \frac{1}{p!}\,|\varphi^{(p)}(\overline{x})| \in (0, +\infty)\,.$$

Poznámka: Nejčastěji je $\varphi'(\overline{x}) \neq 0$, takže MPI je řádu 1. Nemusí to však být vždy, např. Newtonova metoda je speciálním případem MPI.

Zrychlení konvergence MPI

Nápad: V každém kroku zvolíme v jiný koeficient λ_i tak, aby $\varphi'(x_i) = 0$, tj.

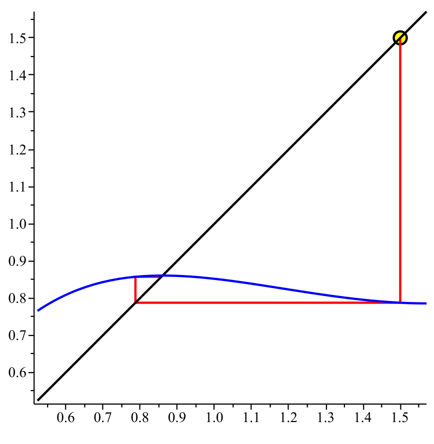
$$\lambda_i = -\frac{1}{f'(x_i)}\,,$$

Dostaneme

$$x_{i+1} = x_i + \lambda_i\, f(x_i) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\,,$$

což je Newtonova metoda (jako speciální případ MPI); ta je (obvykle) řádu 2, zatímco MPI (obvykle) řádu 1.

Newtonova metoda jako speciální případ MPI



$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ x_0 = 1.5$
konverguje nemonotónně a rychle

Kritéria pro výběr metody řešení rovnic

- **jednobodové**, např. MPI (která je v jistém smyslu univerzální jednobodovou metodou), Newtonova metoda,
- **dvoubodové**, např. bisekce, regula falsi, metoda sečen,
- **vícebodové**.

Z programátorského hlediska:

- **nevyžadující derivaci**, např. bisekce, regula falsi, metoda sečen a *obvykle* MPI (záleží na zvoleném iteračním vzorci),
- **vyžadující znalost první derivace**, např. Newtonova,
- **vyžadující znalost vyšších derivací**.

Kritéria pro výběr metody řešení rovnic 2

Podle konvergence dělíme metody řešení rovnic na
- **vždy konvergentní**, např. bisekce a regula falsi,
- **ostatní**, např. Newtonova, metoda sečen, MPI.

Hledání násobných kořenů

- V okolí kořene *sudé násobnosti* funkce nemění znaménko, takže nelze použít metody bisekce a regula falsi.
- Metoda sečen a Newtonova metoda jsou sice použitelné pro hledání násobných kořenů, ale jejich konvergence je pak prvního řádu.
- V metodě prosté iterace záleží pouze na použitém iteračním vzorci, nikoli na násobnosti kořene původní rovnice.

1. metoda: Najdeme (všechny) kořeny funkce f' a vyzkoušíme, zda některý z nich je kořenem funkce f. Tam, kde má f kořen sudé násobnosti, má f' kořen liché násobnosti a mění znaménko.

Hledání násobných kořenů

2. metoda: Uvažujme funkci $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ (kde „odstraníme odstranitelné nespojitosti“).
Tvrzení: Nechť $\overline{x}$ je k-násobný kořen funkce f, v jehož okolí má f spojitou derivaci řádu k. Pak $\overline{x}$ je jednoduchým kořenem funkce $h = f/f'$.

Důkaz: Definice k-násobného kořene říká, že $f^{(j)}(\overline{x}) = 0$ pro $j < k$ a $f^{(k)}(\overline{x}) \neq 0$. Opakovaným užitím l'Hospitalova pravidla odvodíme nenulovou limitu

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x)}{(x-\overline{x})^k} = \lim_{x\to\overline{x}} \frac{f'(x)}{k\,(x-\overline{x})^{k-1}} = \ldots = \lim_{x\to\overline{x}} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \neq 0\,.$$

Tedy podíl prvních dvou výrazů je definován a je jednotkový,

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x)}{(x-\overline{x})^k} \cdot \frac{k\,(x-\overline{x})^{k-1}}{f'(x)} = 1\,,$$

tím dostáváme pro funkci h limitu

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{h(x)}{x-\overline{x}} = \frac{1}{k} \neq 0\,.$$

V poslední limitě konverguje jmenovatel k nule, musí k ní tedy konvergovat i čitatel, takže $\lim_{x\to\overline{x}} h(x) = 0$ a $\overline{x}$ je kořenem funkce h. Nenulová je podle l'Hospitalova pravidla též $\lim_{x\to\overline{x}} h'(x)$, takže $\overline{x}$ je jednoduchý kořen funkce h.

Pokud funkce f má pouze kořeny konečné násobnosti, pak funkce h má tytéž kořeny, ale jednoduché (nebývá však spojitá).

Řešení algebraických rovnic neboli hledání kořenů polynomů

speciální případ rovnice $f(x) = 0$, kde f je polynom.
Věta: (Odhad polohy kořenů polynomu) Všechny (komplexní) kořeny rovnice

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = 0$$

mají absolutní hodnotu nejvýše

$$1 + \frac{\max\bigl(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|\bigr)}{|a_n|}\,.$$

Řešení rovnic v komplexním oboru

Metoda bisekce a metoda regula falsi jsou závislé na úplném uspořádání reálných čísel $\Rightarrow$ ve větší dimenzi nepoužitelné.
Metoda sečen a Newtonova metoda jsou použitelné pro komplexní kořeny.
Pro nalezení komplexních kořenů může být nutný počáteční odhad s nenulovou imaginární částí.

Řešení soustav rovnic

Newtonova metoda má i zobecnění pro soustavy nelineárních rovnic; pak místo derivace pracujeme s jacobiánem a místo dělení jej potřebujeme invertovat, čímž se jednak zvyšuje složitost výpočtu, jednak vznikají problémy s body, v nichž je jacobián singulární. Podmínky konvergence jsou opět složitější než v reálném případě.
Metoda prosté iterace je použitelná i v prostorech větší (konečné) dimenze. Zajištění kontraktivity použitého zobrazení může být problém.
Kvůli obtížím se zajištěním konvergence se pro řešení soustav rovnic často používají metody založené na jiných principech než v jednodimenzionálním případě.