

Numerická integrace

Mirko Navara
Centrum strojového vnímání
katedra kybernetiky FEL ČVUT
Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a
<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/nm>

12. 1. 2016

Úloha: Odhadnout

$$I = \int_a^b f(t) dt$$

na základě hodnot funkce f v konečně mnoha uzlových bodech x_0, \dots, x_{n-1} .
Pokud se aproximace φ na intervalu $\langle a, b \rangle$ liší od f nejvýše o ε , pak

$$\begin{aligned} \left| I - \int_a^b \varphi(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - \varphi(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt \leq (b - a) \varepsilon. \end{aligned}$$

Příklad:

$$\int_a^b \sin^{100} t dt$$

je náročnou úlohou pro počítačové algebraické systémy, ale z numerického hlediska není nijak zvlášť obtížný.

Linearita: Integrál závisí na integrandu lineárně, proto odhad integrálu závisí lineárně na $f(x_0), \dots, f(x_{n-1})$:

$$A = \sum_{i < n} w_i f(x_i),$$

Můžeme volit pouze uzlové body x_0, \dots, x_{n-1} a jejich váhy w_0, \dots, w_{n-1} .

Zjednodušení: Funkci f aproximujeme interpolačním polynomem.

$\langle a, b \rangle$ rozdělíme na k intervalů

$$\langle a_j, a_{j+1} \rangle, \quad j = 0, \dots, k - 1,$$

kde $a_0 = a$, $a_k = b$. V dílčích intervalech použijeme náhradu polynomem nízkého stupně, vedoucí na tzv. **jednoduchý vzorec**, tj. odhad A_j integrálu

$$I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) dt.$$

Sečtením dostaneme **složený vzorec**, tj. odhad

$$A = \sum_{j < k} A_j$$

integrálu

$$I = \sum_{j < k} I_j = \int_a^b f(t) dt.$$

Zjednodušení: Všechny dílčí intervaly mají stejnou délku

$$H = \frac{b - a}{k} = a_{j+1} - a_j.$$

Každý dílčí interval lze lineární substitucí převést na jednotkový interval $(0,1)$. Obecný případ dostaneme lineární substitucí

$$u = \frac{t - a_j}{H}, \quad t = a_j + H u,$$

$$I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) dt = \int_0^1 H f(a_j + H u) du = \int_0^1 g_j(u) du,$$

$$g_j(u) = H f(a_j + H u),$$

$$g_j^{(m)}(u) = H^{m+1} f^{(m)}(a_j + H u).$$

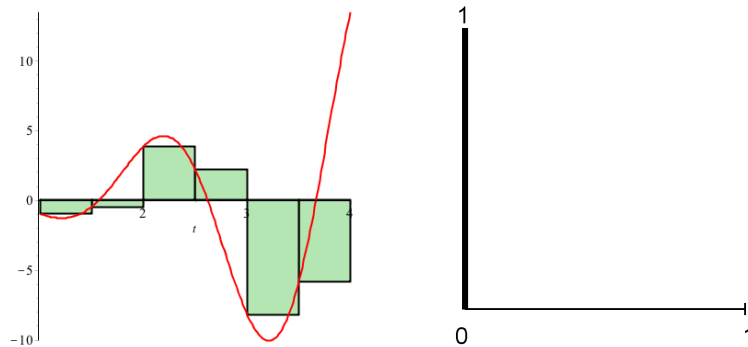
Uzlové body ekvidistantní

Jediný uzlový bod v krajním bodě intervalu, $u_0 = 0$; g_j nahradíme konstantou $g_j(u_0) = g_j(0)$. Jednoduchý vzorec:

$$L_j = \int_0^1 g_j(0) dt = g_j(0) = H f(a_j)$$

Složený vzorec:

$$L = \sum_{j < k} L_j = H \sum_{j < k} f(a_j) = H \sum_{j < k} f(a + j H).$$



Rovnocenný je odhad pro volbu $u_0 = 1/2$, **metoda pravého odhadu**

Uzlový bod ve středu intervalu, $u_0 = 1/2$

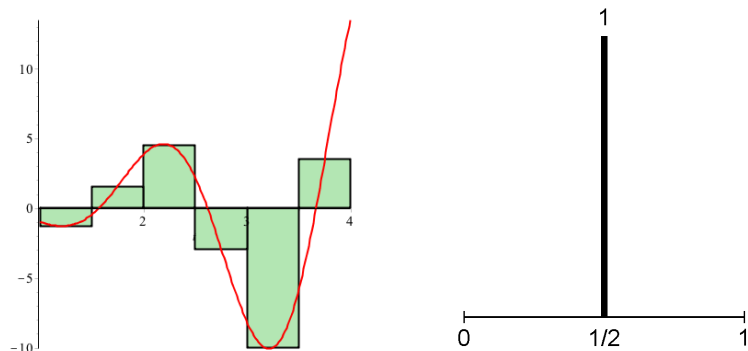
Proložíme konstantu $g_j(u_0) = g_j(1/2)$. Jednoduchý vzorec:

$$R_j = \int_0^1 g_j(1/2) dt = g_j(1/2) = H f(a_j + H/2)$$

Složený vzorec:

$$R = \sum_{j < k} R_j = H \sum_{j < k} f(a_j + H/2) = H \sum_{j < k} f(a_{1/2} + j H),$$

kde $a_{1/2} = a + H/2$.



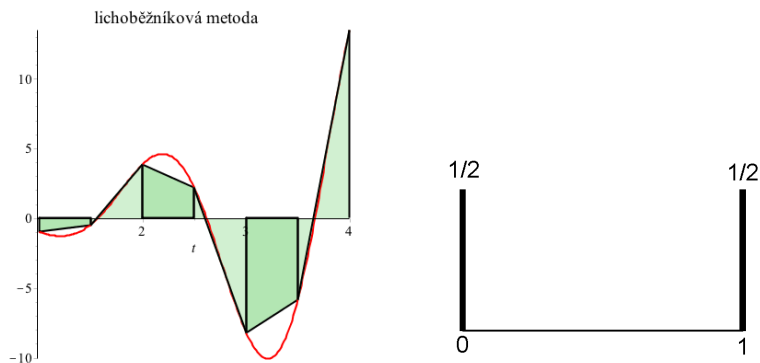
Dva uzlové body na krajích intervalu, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$

Proložíme lineární funkci, výsledkem bude plocha pod přímkou, neboli obsah lichoběžníka. Jednoduchý vzorec:

$$T_j = \frac{g_j(u_0) + g_j(u_1)}{2} = \frac{g_j(0) + g_j(1)}{2} = H \frac{f(a_j) + f(a_{j+1})}{2}$$

Složený vzorec:

$$T = \sum_{j < k} T_j = H \sum_{j < k} \frac{f(a_j) + f(a_{j+1})}{2} = H \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(a + jH) \right).$$



Tři uzlové body; dva na krajích intervalu, jeden uprostřed, $u_0 = 0$, $u_1 = 1/2$, $u_2 = 1$. Proložíme kvadratický polynom a zintegrujeme. Jednoduchý vzorec:

$$\begin{aligned} S_j &= w_0 g_j(u_0) + w_1 g_j(u_1) + w_2 g_j(u_2) \\ &= w_0 g_j(0) + w_1 g_j(1/2) + w_2 g_j(1). \end{aligned}$$

Vzorec bude přesný, bude-li g_j libovolný kvadratický polynom. Speciálně pro $g_j(u) \in \{1, u, u^2\}$:

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 + w_2 &= \int_0^1 1 \, du = 1, \\ \frac{1}{2} w_1 + w_2 &= \int_0^1 u \, du = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} w_1 + w_2 &= \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

To je soustava 3 lineárních rovnic pro 3 neznámé w_0 , w_1 , w_2 , řešení:

$$w_0 = \frac{1}{6}, \quad w_1 = \frac{2}{3}, \quad w_2 = \frac{1}{6}.$$

Jednoduchý vzorec:

$$\begin{aligned} S_j &= \int_0^1 g_j(1/2) \, dt = \frac{1}{6} g_j(0) + \frac{2}{3} g_j(1/2) + \frac{1}{6} g_j(1) \\ &= \frac{H}{6} (f(a_j) + 4f(a_j + H/2) + f(a_{j+1})) \end{aligned}$$

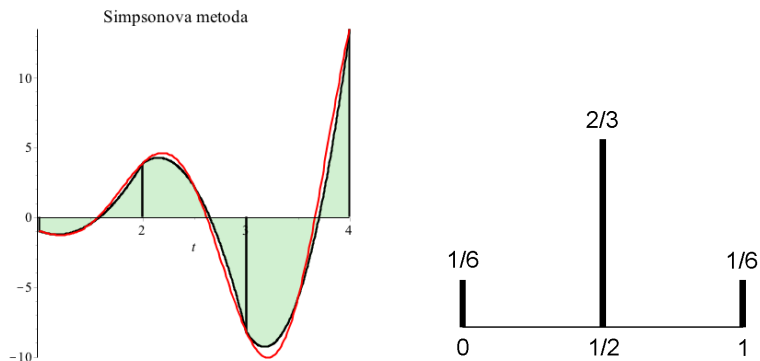
Složený vzorec:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j < k} S_j \\ &= \frac{H}{6} \left(f(a_0) + f(a_k) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} f(a_j) + 4 \sum_{j=0}^{k-1} f(a_j + H/2) \right) \\ &= \frac{H}{6} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} f(a + jH) + 4 \sum_{j=0}^{k-1} f(a_{1/2} + jH) \right), \end{aligned}$$

kde $a_{1/2} = a + H/2$ (**pozor na meze sum!**).

$$S = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})),$$

kde $x_i = a + ih$ jsou uzlové body (pro funkci f , nikoli g_j) a $h = H/2$ je vzdálenost mezi sousedními uzlovými body. Počet intervalů délky h musí být sudý!



- **otevřené** (obdélníková metoda)
- **uzavřené** (lichoběžníková a Simpsonova metoda)
- **polootvřené** (metoda levého odhadu)

Zjednodušení: pro lichoběžníkovou metodu

Předpokládejme, že g_j má na intervalu $(0, 1)$ spojitou druhou derivaci. Funkci g_j nahrazujeme lineárním polynomem φ_j ; chyba interpolace v bodě u je

$$|g_j(u) - \varphi_j(u)| \leq \frac{\sup_{v \in (0,1)} |g_j''(v)|}{2} |(u-0)(u-1)|,$$

$$\begin{aligned} |T_j - I_j| &= \left| \int_0^1 \varphi_j(u) \, du - \int_0^1 g_j(u) \, du \right| \leq \int_0^1 |\varphi_j(u) - g_j(u)| \, du \\ &\leq \frac{\sup_{v \in (0,1)} |g_j''(v)|}{2} \int_0^1 (u - u^2) \, du = \frac{\sup_{v \in (0,1)} |g_j''(v)|}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{12} \sup_{v \in (0,1)} |g_j''(v)| = \frac{1}{12} H^3 \sup_{t \in (a_j, a_{j+1})} |f''(t)|. \end{aligned}$$

Vyjádříme pomocí

$$M_2 \geq \sup_{t \in (a,b)} |f''(t)|,$$

$$|T_j - I_j| \leq \frac{1}{12} H^3 M_2,$$

$$|T - I| \leq \frac{k}{12} H^3 M_2,$$

po náhradě konstantního součinu $kH = b - a$

$$|T - I| \leq \frac{(b-a) M_2}{12} H^2.$$

Řád metody integrace je exponent (u H) v nejnižším obecně nenulovém členu Taylorova rozvoje chyby metody podle H v okolí bodu 0.

metoda	horní odhad chyby	řád
levého odhadu	$\frac{(b-a) M_1}{2} H$	1
lichoběžníková	$\frac{(b-a) M_2}{12} H^2$	2
obdélníková	$\frac{(b-a) M_2}{24} H^2$	2
Simpsonova	$\frac{(b-a) M_4}{2880} H^4 = \frac{(b-a) M_4}{180} h^4$	4

Simpsonova metoda dává chybu nikoli třetího, ale čtvrtého řádu. Je-li f , a tedy i g_j , polynom stupně nejvýše 3, pak chyba interpolace kvadratickým polynomem je úměrná

$$W(u) = (u - 0)(u - 1/2)(u - 1).$$

Na hodnotě integrálu se to neprojeví, neboť

$$\int_0^1 W(u) du = 0.$$

Příklad 1:

$$I = \int_0^2 e^{-t^2} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$. Stanovte postačující počet kroků pro jednotlivé metody.

met.	M_p	horní odhad H	počet kroků
L	$\sqrt{\frac{2}{e}} \doteq 0.86$	$\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0.86} \doteq 1.16 \cdot 10^{-6}$	1 720 000
T	2	$\sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2}} \doteq 1.7 \cdot 10^{-3}$	1155
R	2	$\sqrt{\frac{24 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2}} \doteq 2.45 \cdot 10^{-3}$	817
S	12	$\sqrt[4]{\frac{2880 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 12}} \doteq 0.1$	20

Pro $k = 20$

$$L \doteq 0.9311046,$$

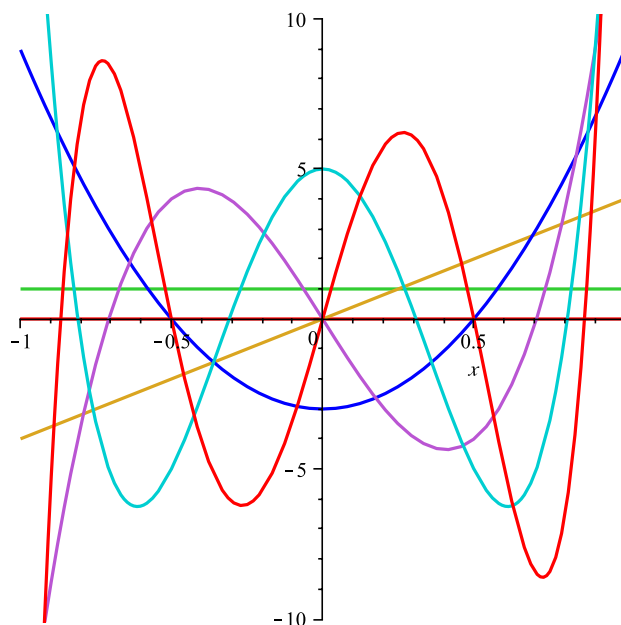
$$R \doteq 0.8821118,$$

$$T \doteq 0.8820204,$$

$$S \doteq 0.8820813,$$

$$\int_0^2 \exp(-t^2) dt \doteq 0.882081390.$$

Na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ volíme za uzlové body kořeny $z_0, \dots, z_{r-1} \in \langle -1, 1 \rangle$ tzv. **Legendreových polynomů**, které jsou derivacemi Čebyševových polynomů.



Lineární transformací

$$u = \frac{z+1}{2}, \quad z = 2u-1$$

dostaneme uzlové body $u_0, \dots, u_{r-1} \in (0, 1)$. Uzlové body a jejich váhy w_0, \dots, w_{r-1} jsou tabelovány nebo raději počítány algoritmem. Volíme pouze jejich počet r a tím i řád metody.

r	uzlové body	váhy
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq \pm 0.577350$	1
3	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}} \doteq \pm 0.774597$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{30+4\sqrt{30}}{70}} \doteq \pm 0.861136$	0.347855
	$\pm \sqrt{\frac{30-4\sqrt{30}}{70}} \doteq \pm 0.339981$	0.652145
5	$\pm \sqrt{\frac{70+4\sqrt{70}}{126}} \doteq \pm 0.906180$	0.236927
	$\pm \sqrt{\frac{70-4\sqrt{70}}{126}} \doteq \pm 0.538469$	0.478629
	0	0.568889

jednoduchý vzorec:

$$G_{r,j} = \sum_{i < r} w_i g_j(u_i) = H \sum_{i < r} w_i f(a_j + H u_i)$$

složený vzorec:

$$G_r = \sum_{j < k} G_{r,j} = H \sum_{j < k} \sum_{i < r} w_i f(a_j + H u_i) = H \sum_{i < r} \left(w_i \sum_{j < k} f(d_i + j H) \right),$$

kde $d_i = a + H u_i \in (a_0, a_1)$. Horní odhad chyby

$$|G_r - I| \leq \frac{(b-a)(r!)^4 M_{2r}}{(2r+1)((2r)!)^3} H^{2r},$$

kde

$$M_{2r} \geq \sup_{v \in (a,b)} |f^{(2r)}(v)|.$$

Chyba metody je řádu $2r$, díky volbě r uzlových bodů a r vah, tj. $2r$ parametrů. V Newtonových-Cotesových vzorcích jsme volbou r vah (při daných uzlových bodech) dostali metody řádu r nebo $r+1$.

počet uzlových bodů	horní odhad chyby	řád
1	$\frac{(b-a) M_2}{24} H^2$	2
2	$\frac{(b-a) M_4}{4320} H^4$	4
3	$\frac{(b-a) M_6}{2 \cdot 016 \cdot 000} H^6$	6
4	$\frac{(b-a) M_8}{1 \cdot 778 \cdot 112 \cdot 000} H^8$	8
5	$\frac{(b-a) M_{10}}{2 \cdot 534 \cdot 876 \cdot 467 \cdot 200} H^{10}$	10

Příklad 1 (pokračování):

$$I = \int_0^2 e^{-t^2} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$.

A	M_p	horní odhad H	p. kroků
L	$\sqrt{\frac{2}{e}} \doteq 0.86$	$\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0.86} \doteq 1.16 \cdot 10^{-6}$	1 720 000
T	2	$\sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2}} \doteq 1.7 \cdot 10^{-3}$	1155
R	2	$\sqrt{\frac{24 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2}} \doteq 2.45 \cdot 10^{-3}$	817
S	12	$\sqrt[4]{\frac{2880 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 12}} \doteq 0.1$	20
G_2	12	$\sqrt[4]{\frac{4320 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 12}} \doteq 0.115$	18
G_4	1680	$\sqrt[8]{\frac{1 \cdot 778 \cdot 112 \cdot 000 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1680}} \doteq 0.92$	3

Úloha: Správný výsledek nějakého výpočtu je $A(0) = \lim_{H \rightarrow 0} A(H)$. Předpokládáme, že A má v okolí bodu 0 Taylorův rozvoj

$$A(H) = A(0) + \frac{H^p}{p!} A^{(p)}(0) + \frac{H^r}{r!} A^{(r)}(0) + \dots,$$

kde p (řád metody) známe a $r > p$. Z hodnot funkce A v konečně mnoha nenulových bodech máme odhadnout $A(0)$.

Řešení: Zanedbáme členy řádů vyšších než p a aproximujeme A polynomem $\varphi(H) = s + c H^p$, $s, c \in \mathbb{R}$. Ke stanovení s, c zvolíme 2 uzlové body $H, H/q$, kde $q \neq 1$:

$$\begin{aligned} \varphi(H) &= s + c H^p = A(H), \\ \varphi\left(\frac{H}{q}\right) &= s + c \frac{H^p}{q^p} = A\left(\frac{H}{q}\right). \end{aligned}$$

To je regulární soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé s, c , z nichž nás zajímá pouze $s = \varphi(0)$:

$$\begin{aligned} (q^p - 1) s &= q^p A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H), \\ s &= \frac{q^p A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H)}{q^p - 1}. \end{aligned}$$

Odhad s hodnoty $A(0)$ je zatížen pouze chybami vyšších řádů než p (zde řádu r). Často $q = 2$, pak

$$s = \frac{2^p A\left(\frac{H}{2}\right) - A(H)}{2^p - 1}.$$

Richardsonovou extrapolací dostaneme nový odhad

$$B(H) = \frac{q^p A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H)}{q^p - 1} = A\left(\frac{H}{q}\right) + \frac{A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H)}{q^p - 1}.$$

Výraz

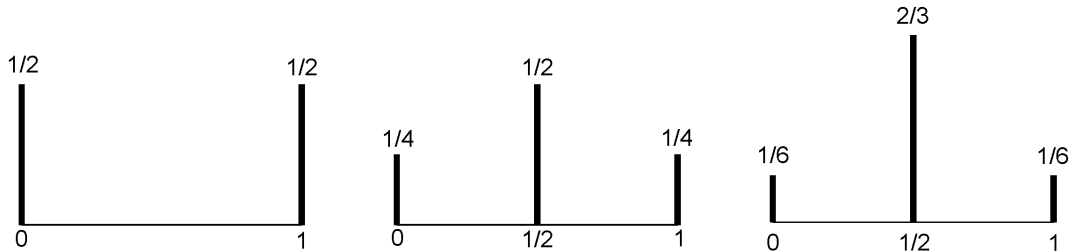
$$\frac{A\left(\frac{H}{q}\right) - A(H)}{q^p - 1} \doteq I - A\left(\frac{H}{q}\right)$$

můžeme rovněž považovat za odhad chyby výsledku $A(\frac{H}{q})$.
 Speciálně pro $q = 2$ (**metoda polovičního kroku**):

$$B(H) = \frac{2^p A(\frac{H}{2}) - A(H)}{2^p - 1} = A(\frac{H}{2}) + \frac{A(\frac{H}{2}) - A(H)}{2^p - 1}$$

$$I - A(\frac{H}{2}) \doteq \frac{A(\frac{H}{2}) - A(H)}{2^p - 1}$$

Pro lichoběžníkovou metodu lze doporučit $q = 2$



Polovina nových uzlových bodů (pro krok $H/2$) se kryje se starými (pro krok H); dostaneme odhad

$$T(\frac{H}{2}) + \frac{T(\frac{H}{2}) - T(H)}{3} = \frac{2R(H) + T(H)}{3},$$

shodný se Simpsonovou metodou.

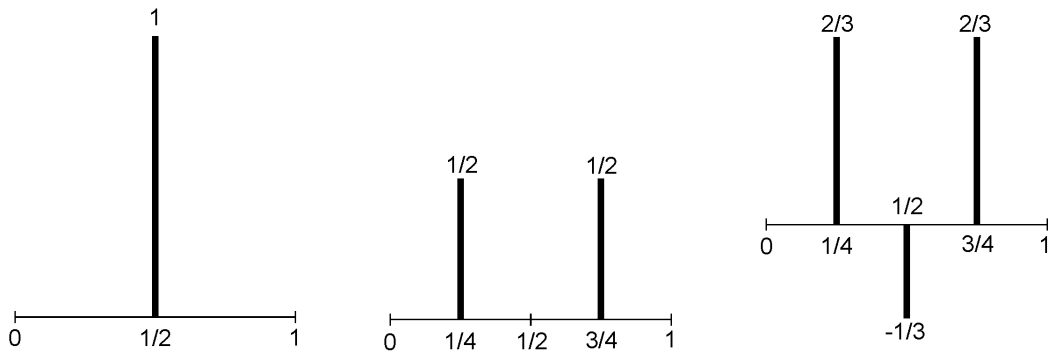
Richardsonovou extrapolací lze zpřesnit i Simpsonovu metodu, dostaneme odhad 6. řádu

$$S(\frac{H}{2}) + \frac{S(\frac{H}{2}) - S(H)}{15}$$

Richardsonovou extrapolací pro obdélníkovou metodu s polovičním krokem dostaneme odhad

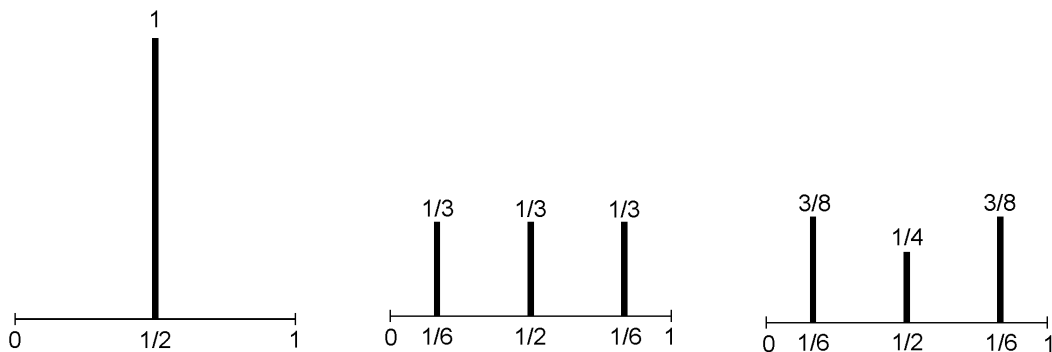
$$R(\frac{H}{2}) + \frac{R(\frac{H}{2}) - R(H)}{3},$$

který se však nehodí:



Vhodnější je třetinový krok, $q = 3$,

$$R(\frac{H}{3}) + \frac{R(\frac{H}{3}) - R(H)}{8}.$$



Vychází z více odhadů získaných lichoběžníkovou metodou pro kroky $H, H/2, H/4, \dots$. Taylorův rozvoj chyby lichoběžníkové metody má nenulové pouze členy sudého řádu. Proto se každou Richardsonovou extrapolací zvýší řád o dvě.

řád	2	4	6	8
k	$T(\frac{H}{k})$	$S(\frac{2H}{k})$		
k_0	$T(H) = T_{0,0}$			
$2k_0$	$T(\frac{H}{2}) = T_{1,0}$	$T_{1,1}$		
$4k_0$	$T(\frac{H}{4}) = T_{2,0}$	$T_{2,1}$	$T_{2,2}$	
$8k_0$	$T(\frac{H}{8}) = T_{3,0}$	$T_{3,1}$	$T_{3,2}$	$T_{3,3}$
...

Obecně ve sloupci $j + 1$:

$$T_{i,j} = T_{i,j-1} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}.$$

Za výsledek bereme $T_{i,i}$, chyba je řádu 2^i a odhadujeme ji zhruba výrazem $|T_{i,i-1} - T_{i-1,i-1}|$ nebo $|T_{i,i} - T_{i-1,i-1}|$.

Příklad 1 (pokračování): Výsledky Rombergovy metody pro $\int_0^2 e^{-t^2} dt$ s počáteční volbou 4 intervalů dělení:

řád	2	4	6	8
k	$T(\frac{H}{k})$	$S(\frac{2H}{k})$		
4	0.88061			
8	0.88170	0.8820655		
16	0.88170	0.8820803	<i>0.88208139</i>	
32	0.88205	<i>0.8820813</i>	<i>0.88208138</i>	<i>0.88208138</i>

S platnými ciframi *0.882081* se shodují výsledky vyznačené kurzívou.

Příklad 2: Výsledky Rombergovy metody pro $\int_0^\pi \sin^4 t dt$, s počáteční volbou 1 intervalu dělení:

řád	2	4	6	8	10
k	$T(\frac{H}{k})$	$S(\frac{2H}{k})$			
1	0				
2	1.57080	2.09440			
4	<i>1.17810</i>	1.0472	0.97738		
8	<i>1.17810</i>	<i>1.17810</i>	1.18683	1.19015	
16	<i>1.17809</i>	<i>1.17809</i>	<i>1.17809</i>	<i>1.17795</i>	<i>1.17790</i>

S platnými ciframi *1.178* se shodují výsledky vyznačené kurzívou.

- z horního odhadu chyby
- metoda dvojího (nejčastěji polovičního) kroku

Příklad 1 (pokračování):

$$I = \int_0^2 e^{-t^2} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$. Simpsonova metoda s krokem 2 a 1:

$$\begin{aligned} S(2) &\doteq 0.8299444, \\ S(1) &\doteq 0.8818124. \end{aligned}$$

Odhad chyby metodou polovičního kroku je

$$\frac{|S(1) - S(2)|}{15} \doteq 0.0034578,$$

požadovaná chyba je zhruba $3458 \times$ menší, což vyžaduje zvýšit počet kroků v poměru alespoň $\sqrt[4]{3458} \doteq 7.7$. Pro $4 \times$ a $8 \times$ menší krok, tj. pro 8 a 16 intervalů dělení:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{2}{8}\right) &\doteq 0.882080396576, \\ S\left(\frac{2}{16}\right) &\doteq 0.882081328646. \end{aligned}$$

Odhad chyby posledního výsledku je

$$\frac{|S(\frac{2}{16}) - S(\frac{2}{8})|}{15} \doteq 6.3 \cdot 10^{-8}.$$

(Již víme, že postačuje 20 intervalů dělení.) Richardsonova extrapolace:

$$S\left(\frac{2}{16}\right) + \frac{S\left(\frac{2}{16}\right) - S\left(\frac{2}{8}\right)}{15} \doteq 0.882081390784,$$

Přesnější výsledek je

$$0.8820813907624216800.$$

Příklad 3:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-8}$. Zkusíme 5-bodovou Gaussovou metodu (10. řádu) s krokem 1 a $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} G_5(1) &\doteq 0.621166517, \\ G_5\left(\frac{1}{2}\right) &\doteq 0.620759367. \end{aligned}$$

Odhad chyby metodou polovičního kroku je

$$\frac{|G_5(\frac{1}{2}) - G_5(1)|}{2^{10} - 1} \doteq 4 \cdot 10^{-7},$$

požadovaná chyba je zhruba $40 \times$ menší, což vyžaduje zvýšit počet kroků v poměru alespoň $\sqrt[10]{40} \doteq 1.5$. Měl by tedy stačit $2 \times$ menší krok, tj. 4 intervaly dělení:

$$\begin{aligned} G_5\left(\frac{1}{2}\right) &\doteq 0.620759367 \\ G_5\left(\frac{1}{4}\right) &\doteq 0.620615367. \end{aligned}$$

Odhad chyby posledního výsledku je

$$\frac{|G_5(\frac{1}{4}) - G_5(\frac{1}{2})|}{2^{10} - 1} \doteq 1.4 \cdot 10^{-7},$$

tedy jen asi třikrát menší, ač se měl zmenšit v poměru $2^{10} = 1024$.

Přesnější výsledek je

$$0.62053660344676220362.$$

Příklad 4:

$$I = \int_2^\infty e^{-t^2} dt$$

s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$.

I nekonečný obor integrace lze (nelineární) substitucí převést na konečný $\langle 0, 1 \rangle$, zde např. $t = 1/u$:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{u^2}}}{u^2} du.$$

Můžeme využít známé určité integrály, např.

$$I = \int_2^\infty e^{-t^2} dt = \underbrace{\int_0^\infty e^{-t^2} dt}_{\sqrt{\pi}/2} - \int_0^2 e^{-t^2} dt,$$

Můžeme se omezit na konečný interval a zbytek zanedbat. V našem případě lze použít odhad (se substitucí $t - x = u$)

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^2} dt &= e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-2xu - u^2} du \\ &\leq e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-2xu} du = \frac{e^{-x^2}}{2x}. \end{aligned}$$

Pro $x \geq 3.85$ je tento výraz menší než $\frac{\varepsilon}{2}$, takže stačí vypočítat

$$\int_2^{3.85} e^{-t^2} dt$$

s přesností $\frac{\varepsilon}{2}$.

se může hodit, i když obor integrace je konečný:

Příklad 5:

$$\int_2^{1000} e^{-t^2} dt$$

Simpsonovou metodou s 1000 kroky:

$$0.0043821,$$

4-bodovou Gaussovou metodou se 100 kroky:

$$0.0012304,$$

Dopustíme se chyby menší než $\frac{\varepsilon}{2} = 5 \cdot 10^{-7}$, snížíme-li horní mez na 3.85. Pak stačí Simpsonova metoda s 23 kroky

$$0.00414549.$$

Přesnější výsledek je

$$0.00414553469.$$

Přičtení známého určitého integrálu může zásadně změnit obtížnost numerického výpočtu:

Příklad 3 (pokračování):

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Integrand má v okolí nuly neomezenou derivaci. V okolí nuly je $\sin t \approx t$, $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \approx \sqrt{t}$. Derivace je sice nadále neomezená, ale známe

$$\int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}.$$

Rozdíl $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}$ má derivace omezené a jeho integrace nečiní zvláštní potíže. Výpočet 5-bodovou Gaussovou metodou (10. řádu) se dvěma a čtyřmi intervaly dělení dává

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) dt &\doteq \\ G_5\left(\frac{1}{2}\right) &\doteq -0.046130081752, \\ G_5\left(\frac{1}{4}\right) &\doteq -0.046130064858. \end{aligned}$$

Odhad chyby metodou polovičního kroku:

$$\frac{|G_5(\frac{1}{4}) - G_5(\frac{1}{2})|}{2^{10} - 1} \doteq 1.7 \cdot 10^{-11}.$$

Přesnější výsledek je

$$-0.04613006321990446305$$

Výsledek původního zadání je

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_0^1 \sqrt{t} dt + \int_0^1 \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) dt \\ &\doteq \frac{2}{3} - 0.04613006486 \\ &\doteq 0.62053660181\end{aligned}$$

(přesněji 0.6205366034467622036).

Substitute funkcí, která má v odpovídajícím bodě c nulové derivace dostatečně mnoha řádů, např. $t = c + u^s$, kde exponent s volíme raději vyšší než nižší.

Příklad 3 (pokračování):

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Substitucí $t = u^2$ dostaneme

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 2 \sin u^2 du.$$

5-bodová Gaussova metoda (10. řádu) s jedním a dvěma intervaly dělení:

$$\begin{aligned}G_5(1) &\doteq 0.620536620796, \\ G_5\left(\frac{1}{2}\right) &\doteq 0.620536603496,\end{aligned}$$

odhad chyby metodou polovičního kroku

$$\frac{|G_5(\frac{1}{2}) - G_5(1)|}{2^{10} - 1} \doteq 1.7 \cdot 10^{-11}.$$

Chtěli bychom, aby se integrand v okolí problémového bodu blížil konstantě; mohli jsme použít též substituci $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = u$ s dobrým výsledkem.

Příklad 6:

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

s přesností 10^{-8} . Omezení na konečný obor nepomůže, neboť např.

$$\int_{999997}^{1000000} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \doteq 0.0019.$$

Hledaný integrál není absolutně konvergentní.

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Potřebujeme

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \\ &\doteq \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 0.620536601808 \doteq 0.632777535507,\end{aligned}$$

kde ovšem integrál $\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ byl rovněž problémový; využili jsme řešení příkladu 3. Přesnější výsledek je

$$0.6327775338746013102.$$