KYBERNETIKA A UMĚLÁ INTELIGENCE

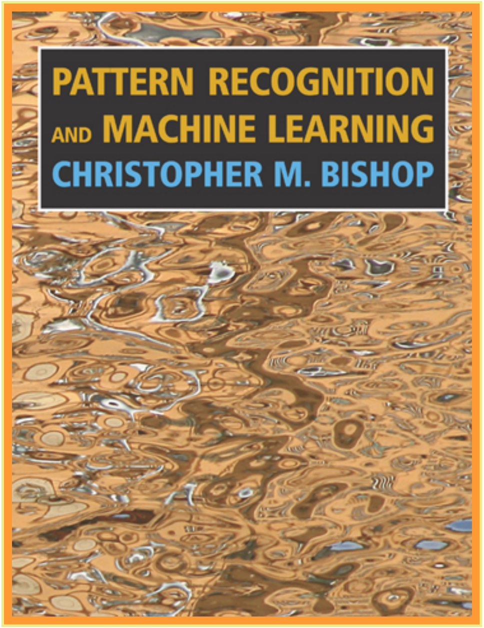
2. Pravděpodobnostní rozhodování a klasifikace

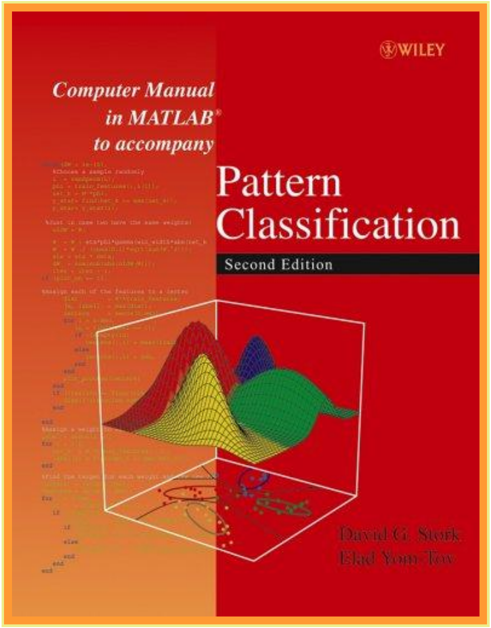
Gerstnerova laboratoř
katedra kybernetiky
fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Daniel Novák
Poděkování: Filip Železný

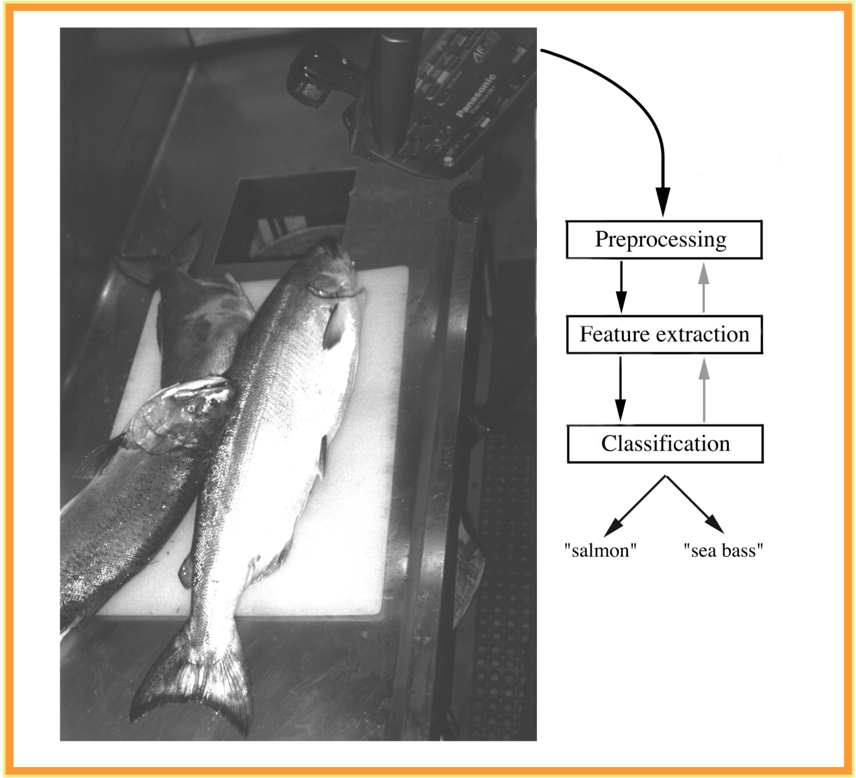
Literatura, dema

- Duda, Hart, Stork: Pattern Classification http://www.crc.ricoh.com/~stork/DHS.html
- Ch. Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning http://research.microsoft.com/en-us/um/people/cmbishop/prml/
- Kotek, Vysoký, Zdráhal: Kybernetika 1990
- Classification toolbox
  http://stuff.mit.edu/afs/sipb.mit.edu/user/arolfe/matlab/
- Statistical Pattern Recognition Toolbox
  http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/software/stprtool/



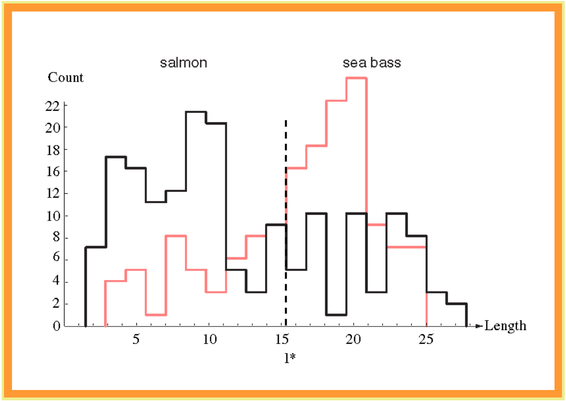


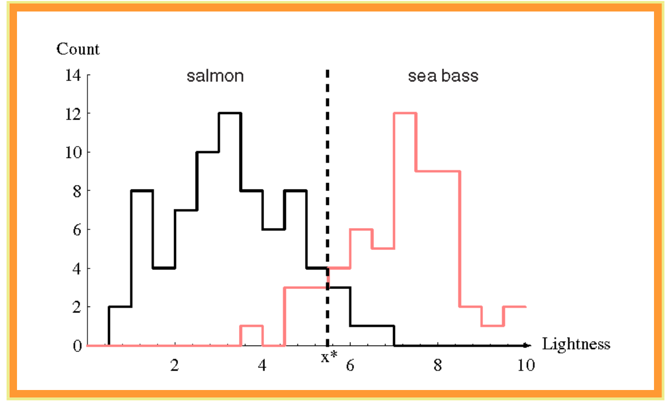
Motivační příklad I [Duda, Hart, Stork: Pattern Classification]



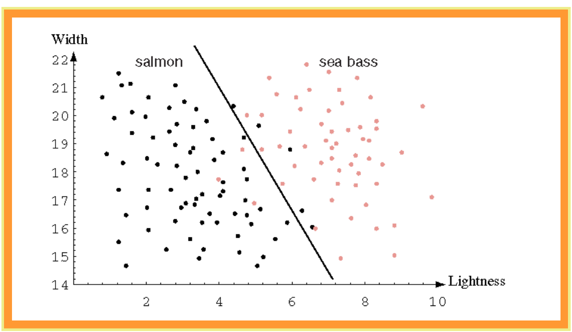
- Továrna na zpracování ryb
- — 2 třídy - Rozeznáváme lososa a okouna pomocí kamery
  — Příznaky - měříme délku, šířku,lesk, průměr oka
- ÚLOHA: JAK KLASIFIKOVAT ???

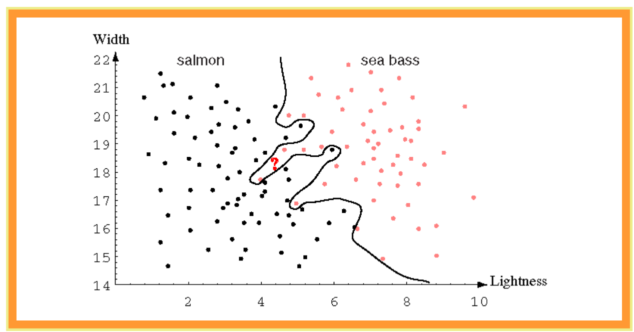
Motivační příklad II

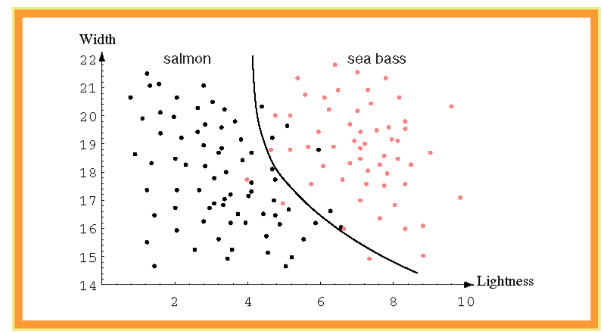




- Odhadneme rozložení šířky a osvětlení pomocí histogramu
- Klasifikace není bezchybová - histogramy se překrývají
- Zlepšení klasifikace - kombinace příznaků







- Lineární klasifikátor, nejbližší sousedé, kvadratický klasifikátor
- Přeučenost (over-fitting), generalizace, minimalizace chyby

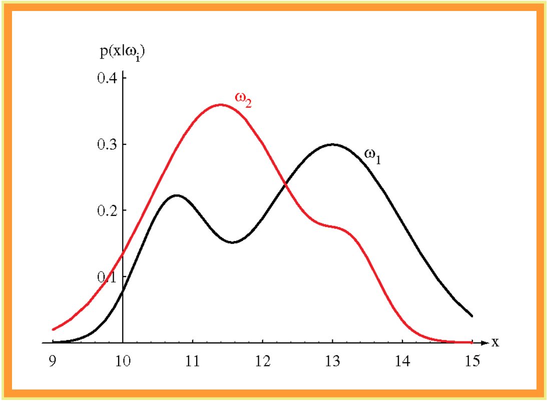
Známe rozložení pravděpodobnosti?

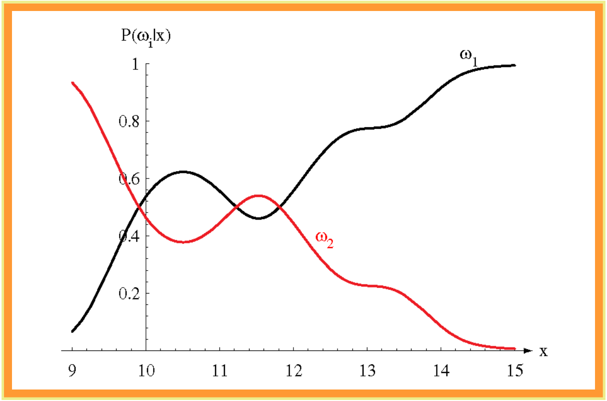
- Ano - Bayesovská klasifikace
- Známe apriorní rozložení třídy $P(s_j)$ a podmíněnou pravděpodobnost $p(x|s_j)$
- Platí $p(s_j, x) = p(x|s_j)p(s_j) = p(s_j|x)p(x)$
- Bayesův vztah

$$\boxed{p(s_j|x) = \frac{p(x|s_j)p(s_j)}{p(x)}}$$

$$posterior \propto likelihood \times prior$$

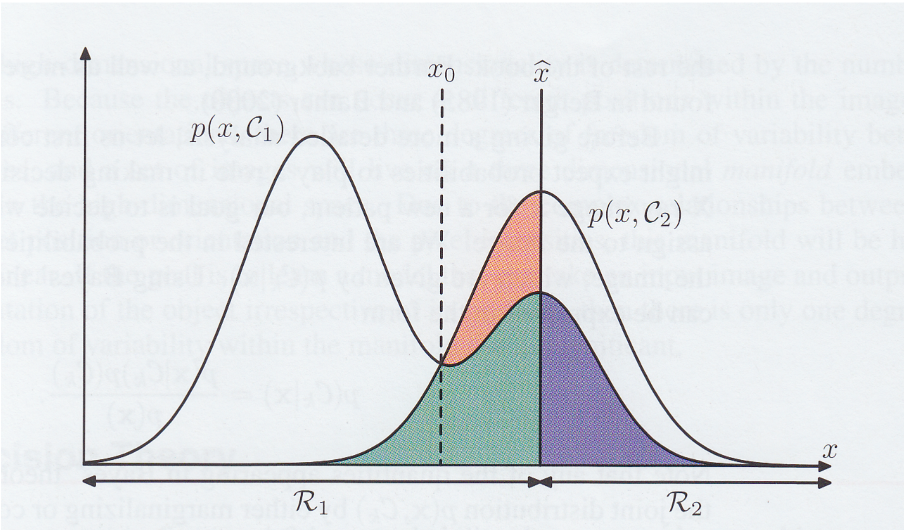
- Klasifikace $\arg\max_j p(s_j|x)$
- $p(x|s_1) = \frac{1}{3}, p(x|s_1) = \frac{2}{3}$, (v obrázcích níže $s_i = \omega_i$)





Minimalizace chyby - maximum aposteriorní pravděpodobnosti [Bishop]

- ilustrativní příklad bez odvozování
- $p(s_1, x) = p(x|s_1)p(s1)$,$p(s_2, x) = p(x|s_2)p(s_2)$, v obrázku níže ($s_i = C_i$)
- chyba klasifikace: $p(chyba) = p(x \in R_1, C_2) + p(x \in R_2, C_1)$
- chyba $p(x \in R_1, C_2)$ - červená a zelená oblast - klasifikuji objekty ze třídy C_2 jako C_1
- chyba $p(x \in R_2, C_1)$ - modrá oblast - klasifikuji objekty ze třídy C_1 jako C_2
- minimalizace chyby klasifikace - obě pravděpodobnosti se překrývají v bodě x_0 (zmizí červená plocha)

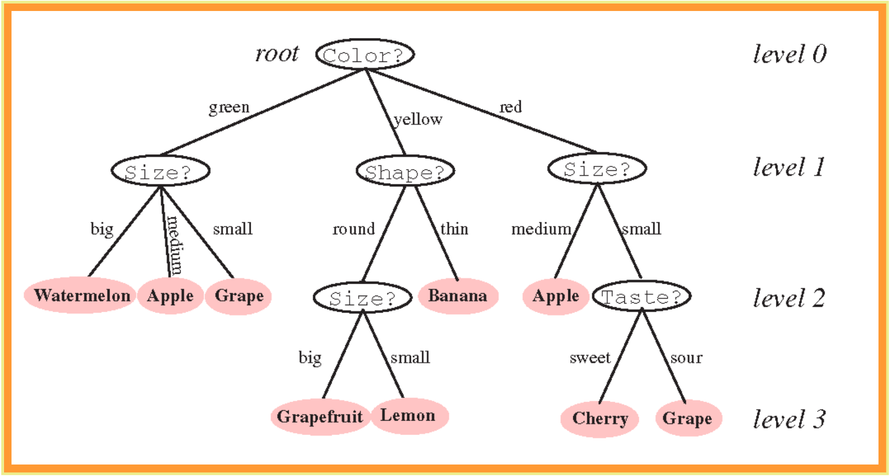


Historická poznámka - Thomas Bayes

- Thomas Bayes - v roce 1736 vydává *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of the Analyst*
- Řešeni tzv. inverzní pravděpodobnosti, např. bílé a černé kuličky pomocí Bayesovského vzorce

Rozložení pravděpodobnosti je neznámé

- Trénovací a testovací data
- Způsoby klasifikace - tisíce přístupu, již zmíněné, dále rohodovací stromy, atd.



Formalizace - Rozhodování za neurčitosti

- Důležitou schopností inteligentních systémů je schopnost
  - vybrat co nejlepší rozhodnutí
  - za **nejistých** podmínek (s neurčitostí).
- **Příklad**: Jet z A do B tramvají, nebo metrem?
  - Tramvaj: rychlejší cesta dle jízdního řádu, ale velmi nejisté dodržení.
  - Metro: delší cesta, ale téměř jisté dodržení.
- **Příklad**: kam směřovat dopis s tímto PSČ?

  - 15700? 15706? 15200? 15206?
- Jak se **optimálně rozhodnout**?
- Oba příklady lze formalizovat stejným rámcem.
- Zavedení ztrátové funkce - příklad s rakovinou či HIV !

Příklad [Kotek, Vysoký, Zdráhal: Kybernetika 1990]

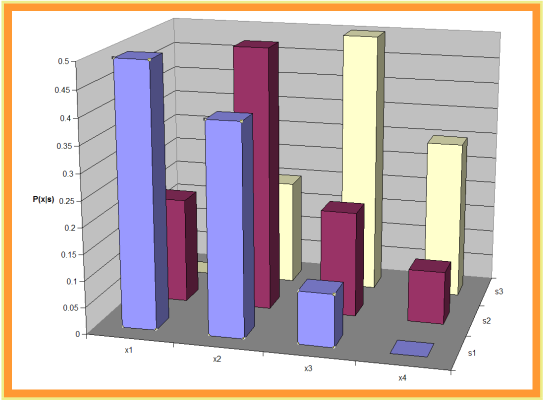
- *Paní Nováková se vrací z práce. Co uvaří pan Novák k večeři?*
- Napadly ho 3 možnosti **rozhodnutí** (d - **d**ecision):
  - *nic* . . . **neudělat nic** $\Rightarrow$ žádná práce, ale zhorší náladu pí. Novákové.
  - *pizza* . . . **ohřát mraženou pizzu** $\Rightarrow$ není pracné, ale neohromí.
  - *n.h.* . . . **nadívaná holoubata** $\Rightarrow$ udělá jí radost, ale velmi pracné.
- P. Novák číselně zhodnotí míru nepříjemnosti způsobenou jednotlivými rozhodnutími. Ta závisí na tom, s jakou náladou přijde pí. Nováková domů, což je **neznámý stav**. Rozlišme tyto možnosti:
  - *dobrá* . . . pí. Nováková má **dobrou** náladu.
  - *průměrná* . . . pí. Nováková má **průměrnou** náladu.
  - *špatná* . . . pí. Nováková má **špatnou** náladu.
- Pro každou z 9 možných situací (3 možná rozhodnutí $\times$ 3 možné stavy) je nepříjemnost dána **ztrátovou funkcí** $l(d, s)$ (l - **l**oss):

$l(s, d)$	$d =$ *nic*	$d =$ *pizza*	$d =$ *n.h.*
$s =$ *dobrá*	0	2	4
$s =$ *průměrná*	5	3	5
$s =$ *špatná*	10	9	6

Příklad (pokračování)

- Neznámý stav - náladu pí. Novákové - zkusí p. Novák odhadnout experimentem: sdělí jí, že ztratil její oblíbený časopis a sleduje její reakci.
- Předpokládá 4 možné reakce:
  - *mírná* ... nic se neděje, časopis najdeme.
  - *podrážděná* ... proč nedáváš věci na své místo?
  - *nasupená* ... proč já si toho Nováka brala?
  - *hrozivá* ... rezignované mlčení
- Reakce je přímo pozorovatelný **příznak** (zde nálady).
- Ze zkušenosti p. Novák dokáže odhadnout pravděpodobnost každé dvojice (reakce x, nálada s), tj. $P(x, s)$.

$P(x, s)$	$x =$ *mírná*	$x =$ *podrážděná*	$x =$ *nasupená*	$x =$ *hrozivá*
$s =$ *dobrá*	0.35	0.28	0.07	0.00
$s =$ *průměrná*	0.04	0.10	0.04	0.02
$s =$ *špatná*	0.00	0.02	0.05	0.03



Rozhodovací strategie

- **Rozhodovací strategie**: pravidlo pro výběr rozhodnutí na základě pozorovaného příznaku.
- Tj. funkce $d = \delta(x)$.
- Příklady možných strategií p. Nováka:

$\delta(x)$	$x =$ *mírná*	$x =$ *podrážděná*	$x =$ *nasupená*	$x =$ *hrozivá*
$\delta_1(x) =$	*nic*	*nic*	*pizza*	*n.h.*
$\delta_2(x) =$	*nic*	*pizza*	*n.h.*	*n.h.*
$\delta_3(x) =$	*n.h.*	*n.h.*	*n.h.*	*n.h.*
$\delta_4(x) =$	*nic*	*nic*	*nic*	*nic*

- Celkem má k dispozici $3^4 = 81$ možných strategií (3 možná rozhodnutí pro každou ze 4 možných hodnot příznaku).
- Jak definovat, která ze dvou strategií je lepší? Obecně: jak strategie uspořádat dle kvality?
- Definujeme **Bayesovské riziko strategie** jako střední hodnotu ztráty:

$$\boxed{r(\delta) = \sum_x \sum_s l(s, \delta(x)) P(x, s)}$$

Bayesovské kritérium

- **Příklad:**

$P(x,s)$	$x =$ mírná	$x =$ podrážděná	$x =$ nasupená	$x =$ hrozivá
$s =$ dobrá	$\boxed{0.35}$	0.28	0.07	0.00
$s =$ průměrná	0.04	0.10	0.04	0.02
$s =$ špatná	0.00	0.02	0.05	0.03

$l(s,d)$	$d =$ nic	$d =$ pizza	$d =$ n.h.
$s =$ dobrá	$\boxed{0}$	2	4
$s =$ průměrná	5	3	5
$s =$ špatná	10	9	6

$\delta(x)$	$x =$ mírná	$x =$ podrážděná	$x =$ nasupená	$x =$ hrozivá
$\delta_1(x) =$	nic	nic	pizza	n.h.

$r(\delta_1) = 0 * 0.35 +$

- výpočet první strategie $r(\delta_1)$ pro s=dobrá,$\forall x$

  $r(\delta_1) = 0 \cdot 0.35 + 0 \cdot 0.28 + 2 \cdot 0.07 + 4 \cdot 0+$

- s=průměrná,$\forall x$

  $+5 \cdot 0.04 + 5 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.04 + 5 \cdot 0.02+$

- s=špatná,$\forall x$

  $+10 \cdot 0 + 10 \cdot 0.02 + 9 \cdot 0.05 + 6 \cdot 0.03 = \mathbf{1.89}$

- podobně pro třetí strategii $r(\delta_3) = 4 \cdot 0.7 + 5 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.1 = \mathbf{4.4}$

Bayesovské kritérium

- **Příklad:**

$P(x,s)$	$x =$ mírná	$x =$ podrážděná	$x =$ nasupená	$x =$ hrozivá
$s =$ dobrá	0.35	0.28	0.07	0.00
$s =$ průměrná	0.04	0.10	0.04	0.02
$s =$ špatná	0.00	0.02	0.05	0.03

$l(s,d)$	$d =$ nic	$d =$ pizza	$d =$ n.h.
$s =$ dobrá	0	2	4
$s =$ průměrná	5	3	5
$s =$ špatná	10	9	6

$\delta(x)$	$x =$ mírná	$x =$ podrážděná	$x =$ nasupená	$x =$ hrozivá
$\delta_1(x) =$	nic	nic	pizza	n.h.

r(δ_1) = 0 * 0.35 + 0 * 0.28 + 2 * 0.07 + ...

- ... a tak dále pro celou tabulku $P(x,s)$
- **Bayesovské kritérium**: ze dvou strategií je lepší ta s nižším rizikem.
- Z Bayesovského hlediska je tedy např. lepší δ_1 lepší než δ_3 ($r(\delta_1) = 1.89$, $r(\delta_3) = 4.4$).

Co když neznáme $P(x, s)$?

- Sdružená pravděpodobnost - potřebujeme znát všecha možná měření
- U reálných problémů nepraktické, někdy nemožné - v případě rozpoznávání písmen, 10 x 10 pixelů, 256 hodnot intensity, 256^{100} měření
- Z definice podmíněné pravděpodobnosti

$$\boxed{P(x, s) = P(s|x)P(x) = P(x|s)P(s)}$$

- **Případ 1:** Známe pouze $P(s|x)$, ale ne $P(x)$ (pravděpodobnosti pozorování).
  - Bayesovsky optimální strategii umíme stále vypočítat.
  - Dále příklad na cvičeních: roztřídění mincí podle jejich hmotnosti získané měřením

Bayesovsky optimální strategie

— **Bayesovsky optimální strategie** je ta, která minimalizuje Bayesovské riziko. Tj.

$$\boxed{\delta^* = \arg\min_{\delta} r(\delta)}$$

— Protože $P(x,s) = P(s|x)P(x)$, platí

$$r(\delta) = \sum_x \sum_s l(s,\delta(x))P(x,s) = \sum_x \sum_s l(s,\delta(x))P(s|x)P(x)$$

— Protože $P(x)$ nezávisí na s:

$$r(\delta) = \sum_x P(x) \underbrace{\sum_s l(s,\delta(x))P(s|x)}_{\text{riziko podmíněné pozorováním } x}$$

— Optimální strategii tedy můžeme dostat minimalizací tohoto *podmíněného rizika* zvlášť pro jednotlivá pozorování x:

$$\boxed{\delta^*(x) = \arg\min_{d} \sum_s l(s,d)P(s|x)}$$

Kritérium MiniMax

- **Případ 2:** Známe pouze $P(x|s)$, ale ne $P(s)$ (pravděpodobnosti stavů).
  - Bayesovsky optimální strategii již **nemůžeme** určit, protože nespočítáme $r(\delta) = \sum_s P(s) \sum_x l(s, \delta(x)) P(x|s)$
    Nahradíme-li první sumu *maximem*, definujeme *maximální* riziko, které můžeme spočítat.

$$\boxed{R(\delta) = \max_s \quad \sum_x l(s, \delta(x)) P(x|s)}$$

  - Tato veličina maximalizuje mezi všemi riziky *podmíněnými* jednotlivými *stavy*.
  - **MiniMaxové** kritérium: vybírá strategii, která **minimalizuje maximální riziko** $R(\delta)$

$$\boxed{\delta^* = \arg\min_\delta R(\delta)}$$

Příklad - Kritérium MiniMax

- **Příklad výpočtu** $R(\delta_1)$
- Co když p. Novák ví, že p. Nováková má *obvykle dobrou náladu*? Obecněji: ví, jak jsou její jednotlivé nálady pravděpodobné, tj. zná rozložení $P(s)$. Např:

	$s =$ *dobrá*	$s =$ *průměrná*	$s =$ *špatná*
$P(s) =$	0.7	0.2	0.1

- Můžeme tedy spočítat podmíněné rozložení $P(x|s)$

$$P(x|s) = \frac{P(x,s)}{P(s)}$$

$P(x\|s)$	$x =$ *mírná*	$x =$ *podrážděná*	$x =$ *nasupená*	$x =$ *hrozivá*
$s =$ *dobrá*	0.5	0.4	0.1	0.00
$s =$ *průměrná*	0.2	0.5	0.2	0.1
$s =$ *špatná*	0.00	0.2	0.5	0.3

Příklad - Kritérium MiniMax (pokračování)

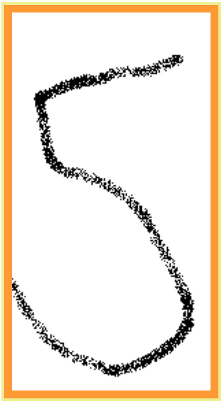
- Pro $s =$ *dobrá*: $\sum_x l(s, \delta(x)) P(x|\textit{dobrá}) =$

$$l(\textit{dobrá}, \delta_1(\textit{mírná})) \cdot P(\textit{mírná}|\textit{dobrá}) + l(\textit{dobrá}, \delta_1(\textit{podrážděná})) \cdot P(\textit{podrážděná}|\textit{dobrá})$$
$$+l(\textit{nasupená}, \delta_1(\textit{dobrá})) \cdot P(\textit{nasupená}|\textit{dobrá}) + l(\textit{dobrá}, \delta_1(\textit{hrozivá})) \cdot P(\textit{hrozivá}|\textit{dobrá})$$
$$= l(\textit{dobrá}, \textit{nic}) \cdot 0.5 + l(\textit{dobrá}, \textit{nic}) \cdot 0.4 + l(\textit{dobrá}, \textit{pizza}) \cdot 0.1 + l(\textit{dobrá}, \textit{n.h.}) \cdot 0$$
$$= 0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0 = 0.2$$

- $\sum_x l(s, \delta(x)) P(x|\textit{průměrná}) = 4.6$
- $\sum_x l(s, \delta(x)) P(x|\textit{špatná}) = 8.3$
- **Maximální riziko** strategie δ_1 (přes všechny možné stavy) je tedy 8.3.
- Podobně: maximální riziko strategie δ_3 je 7.85.
- Tedy podle MiniMaxu je δ_3 lepší než δ_1 (obráceně než u Bayesovského kritéria!)
- Pro nalezení optimálni strategie bychom v aktuálním příkladě museli spočítat max. rizika všech 81 možných strategií.

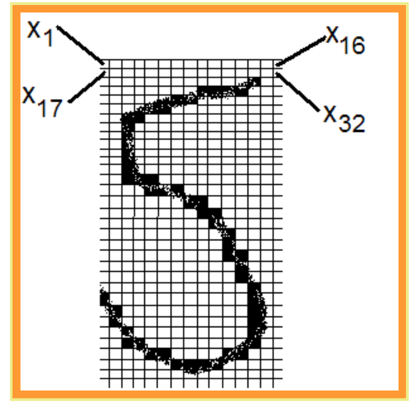
Příznakové rozpoznávání

- Systémy pro rozpoznávání. **Příklad** úlohy:



O jakou jde číslici?

Lze formulovat jako úlohu statistického rozhodování



Příznak = vektor hodnot pixelů.

- **Příznakové rozpoznávání** číslic: **klasifikace** do jedné ze **tříd** $0 \ldots 9$ na základě vektoru hodnot pixelů.
- Klasifikace je speciálním případem statistického rozhodování:
  - Příznakový vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots)$: hodnoty pixelů č. 1, 2, ...
  - Množina stavů $\mathcal{S}$ = množina rozhodnutí $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots 9\}$.
  - Stav = skutečná třída, Rozhodnutí = rozpoznaná třída.
- video - *synth_2LP*

MAP klasifikace

- Častá (i když ne nutná) volba ztrátové funkce při klasifikaci:

$$l_{01}(d, s) = \begin{cases} 0, & d = s \\ 1, & d \neq s \end{cases}$$

- Pokud zvolíme l_{01}
  - jde o tzv. MAP (maximum aposteriori) klasifikaci
  - Bayesovské riziko = střední **chyba** klasifikace.
- Optimální klasifikace při příznaku $\vec{x}$ (Bayesovsky optimální strategie):

$$\delta^*(\vec{x}) = \arg\min_d \sum_s \underbrace{l(d, s)}_{0 \text{ pokud } d=s} P(s|\vec{x}) =$$

$$= \arg\min_d [1 - P(d|\vec{x})] = \arg\max_d P(d|\vec{x})$$

- Volíme tedy nejpravděpodobnější třídu pro danou hodnotu příznakového vektoru - viz naše klasifikace lososa a okouna

Strojové učení

- Obvykle ale **není známo** rozdělení $P(s|\vec{x})$.
- Je třeba **odhadnout** ("naučit se") z již klasifikovaných příkladů, tzv. **trénovacích dat**.
- Uvažujme **diskrétní** $\vec{x}$. **Trénovací data (příklady):** $(\vec{x}_1, s_1), (\vec{x}_2, s_2), \ldots (\vec{x}_l, s_l)$.
  - Tzv. *i.i.d. multimnožina* (i.i.d = "independent, identically distributed")
  - Každý příklad $(\vec{x}_i, s_i)$ je náhodně vybrán nezávisle na ostatních příkladech z rozdělení $P(x, s)$.
- Bez jakékoliv znalosti o tomto rozdělení se můžeme uchýlit k tzv. *neparametrickému* odhadu:

$$P(s|\vec{x}) \approx \frac{\text{počet příkladů v nichž } \vec{x}_i = \vec{x} \text{ a } s_i = s}{\text{počet příkladů v nichž } \vec{x}_i = \vec{x}}$$

- Tento přístup naráží na zásadní překážky:
  - Počet příkladů l postačující ke spolehlivému odhadu $P(s|\vec{x})$ roste **exponenciálně** s počtem složek vektoru $\vec{x}$.
  - tj. např. s rozlišením (počtem pixelů) v rozpoznávaných obrazcích.
  - "prokletí kombinatorické exploze". Reálné úlohy: jmenovatel často nulový!
  - Bayesovská klasifikace: horní limit kvality klasifikace, v praxi obvykle nedosažitelný.
- Lze též využít vztahu:

$$P(s|\vec{x}) = \frac{P(\vec{x}|s)P(s)}{P(\vec{x})}$$

- **Odhad** $P(\vec{x}|s)$: analogicky jako odhad $P(s|\vec{x})$.
- **Odhad** $P(s)$: jako relativní četnost jednotlivých tříd s v trénovacích datech, tj.

$$P(s) \approx \frac{\text{počet příkladů třídy } s}{l}$$

- Tento přístup sám o sobě neřeší problém množství dat potřebných k odhadu pravděpodobností.
- Ale umožňuje ho "řešit" nepřímo:

1. Hodnoty $P(s)$ jsou často **známy a není nutno je odhadovat**.
   Příklad: při rozpoznávání 1. číslice PSČ je nejčastější číslice 1, např $P(1) = 0.6$.
   Takto je do klasifikace zapojena **apriorní znalost** o pravděpodobnostech tříd.
   $P(s)$ ... '**apriorní pravděpodobnost**'.
2. Přístup umožňuje formulovat zjednodušenou, tzv. naivní Bayesovskou klasifikaci, v níž nemusíme odhadovat $P(\vec{x}|s)$, ale pouze $P(x(1)|s), P(x(2)|s), \ldots$.

Předpoklad 1: Nezávislost složek příznaku

- Ve **výjimečném** případě **statistické nezávislosti** jednotlivých příznakových složek $x(i)$ v rámci každé třídy s platí

$$\boxed{P(\vec{x}|s) = P(x(1)|s) \cdot P(x(2)|s) \cdot \ldots}$$

- Stačí tedy odhadnout $P(s)$ pro každé s a $P(x(i)|s)$ zvlášť pro každé i a s.
  - Např: $P(x(3)|8) \approx$ podíl případů číslice 8 s rozsvíceným 3. pixelem.
  - Žádná kombinatorická exploze (pouze jednosložkové pravděpodobnosti).
- V praxi: nezávislost se často předpokládá, i když neplatí, příp. platí přibližně.
  - Potom jde o tzv. **Naivní Bayesovskou klasifikaci**.

- Nezávislost mezi příznakovými složkami je jen **jedním z možných předpokladů**, jehož splnění vede k zabránění kombinatorické explozi.
- Alternativní předpoklady jsou např.:
  - *Podobné objekty patří do stejné třídy* klasifikace dle **nejbližších sousedů**.
  - $P(s|\vec{x})$ *náleží do určité omezené třídy rozdělení, hledáme pouze jeho* **parametry**
  - *Třída je plně určena lineární kombinací složek příznaku* klasifikace dle **lineárního modelu**.

Předpoklad 2: Podobnost objektů v dané třídě

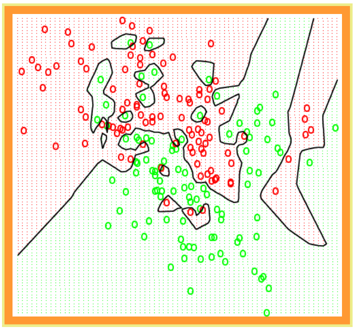
- *Podobnost* chápeme jako malou *vzdálenost* v prostoru příznakových hodnot.
- Funkce měřící vzdálenost dvou příznakových vektorů, tzv. **metrika**: $\rho : X \times X \rightarrow \Re^+ \cup \{0\}$ taková, že $\forall x, y, z$: $\rho(x,x) = 0$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$. **Příklad:**
  - **Euklidovská metrika** pro vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ se reálnými složkami $x_1(i)$ resp. $x_2(i)$:

$$\boxed{\rho_E(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sqrt{\sum_i (x_1(i) - x_2(i))^2}}$$

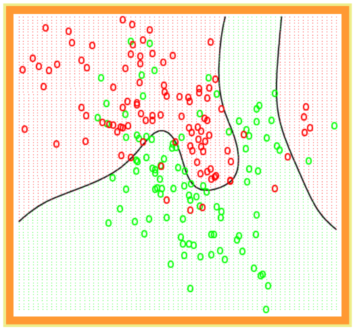
  - Jsou-li složky binární (z $\{0,1\}$), tak $\rho_E(\vec{x}_1, \vec{x}_2)^2$ je počet složek, v nichž se $\vec{x}_1$ liší od $\vec{x}_2$ - tzv. **Hammingova metrika**.
- **Klasifikace dle k nejbližších sousedů** (k-nearest neighbor classification, k-NN).
- Zadáno:
  - $k \in N$
  - trénovací příklady: $(\vec{x}_1, s_1), (\vec{x}_2, s_2), \ldots (\vec{x}_l, s_l)$
  - metrika $\rho : X \times X \rightarrow \Re$
  - neklasifikovaný objekt s příznakem $\vec{x}$.
- Úloha: klasifikovat $\vec{x}$
- Postup: z trénovacích příkladů vyber k nejbližších k $\vec{x}$ vzhledem k metrice ρ. Třída, které mezi nimi převládá, budiž třídou $\vec{x}$.

Flexibilita klasifikace

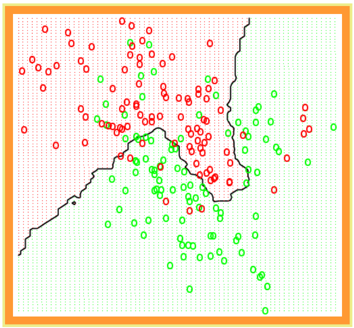
- Jak volit k? Odpověď není jednoznačná.
- **Příklad**: Uvažujme trénovací data se dvěma třídami (červená/zelená) a šumem (některé s_i chybné). Značky - trénovací data, křivka - hranice klasifikace:



$k = 1$: Dobré přizpůsobení trénovacím datům. Velká citlivost k šumu.



Bayesovská klasifikace: Méně flexibilní než 1-nn, více než 15-nn.



$k = 15$: Špatné přizpůsobení trénovacím datům. Malá citlivost k šumu.

- Vzpomeňte: Bayesovská klasifikace δ^* má nejnižší možné Bayesovské riziko $r(\delta^*)$. Pozn.: Znázorněná Bayesovská vychází z přesných pravděpodobností $P(s|\vec{x})$, které jsou pro klasifikační algoritmus neznámé!
- Pozorování: příliš velká flexibilita (malé k) i příliš malá flexibilita (velké k) vedou ke klasifikátorům značně odlišným od Bayesovského, tedy ke zvyšování středního rizika $r(\delta)$.

Trénovací chyba a riziko

- Bayesovské riziko $r(\delta) =$ limita relativní četnosti nesprávných klasifikací (s rostoucím vzorkem dat).
- Definujme **trénovací chybu** $r_T(\delta)$ jako relativní četnost nesprávně klasifikovaných příkladů na datech, kde je klasifikátor δ učen.
- Je $r_T(\delta)$ dobrým odhadem skutečného středního rizika $r(\delta)$?
- Příklad: 1-nn není dobrý klasifikátor (viz minulou stranu), přestože správně klasifikuje *všechny trénovací příklady*, tj. má trénovací chybu 0.
- Trénovací chyba tedy není dobrým odhadem středního rizika. Pro jeho odhad je třeba
  - mít k dispozici **trénovací množinu** $(\vec{x}_1, s_1), \ldots (\vec{x}_l, s_l)$ a nezávislou **testovací množinu** $(\vec{x}_{l+1}, s_{l+1}), \ldots (\vec{x}_{l+m}, s_{l+m})$
  - (může vzniknout rozdělením původních trénovacích dat např. v poměru 75% a 25%).
  - klasifikátor sestrojit na základě trénovací množiny
  - riziko tohoto klasifikátoru spočítat na testovací množině.
- Relativní četnost chyb na testovací množině je **nevychýleným** odhadem skutečného střední rizika. (Pozor: nevychýlený neznamená přesný!)