INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dynamika robotických systémů

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
ČVUT v Praze

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Obsah

- Postup sestavování dynamického modelu
- Newton-Eulerovy pohybové rovnice
- Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
- Metody integrace pohybových rovnic
- Ekvivalence Newton-Eulerových a Lagrangeových rovnic smíšeného typu
- Rekurzivní metody sestavování pohybových rovnic
- Fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů
- Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

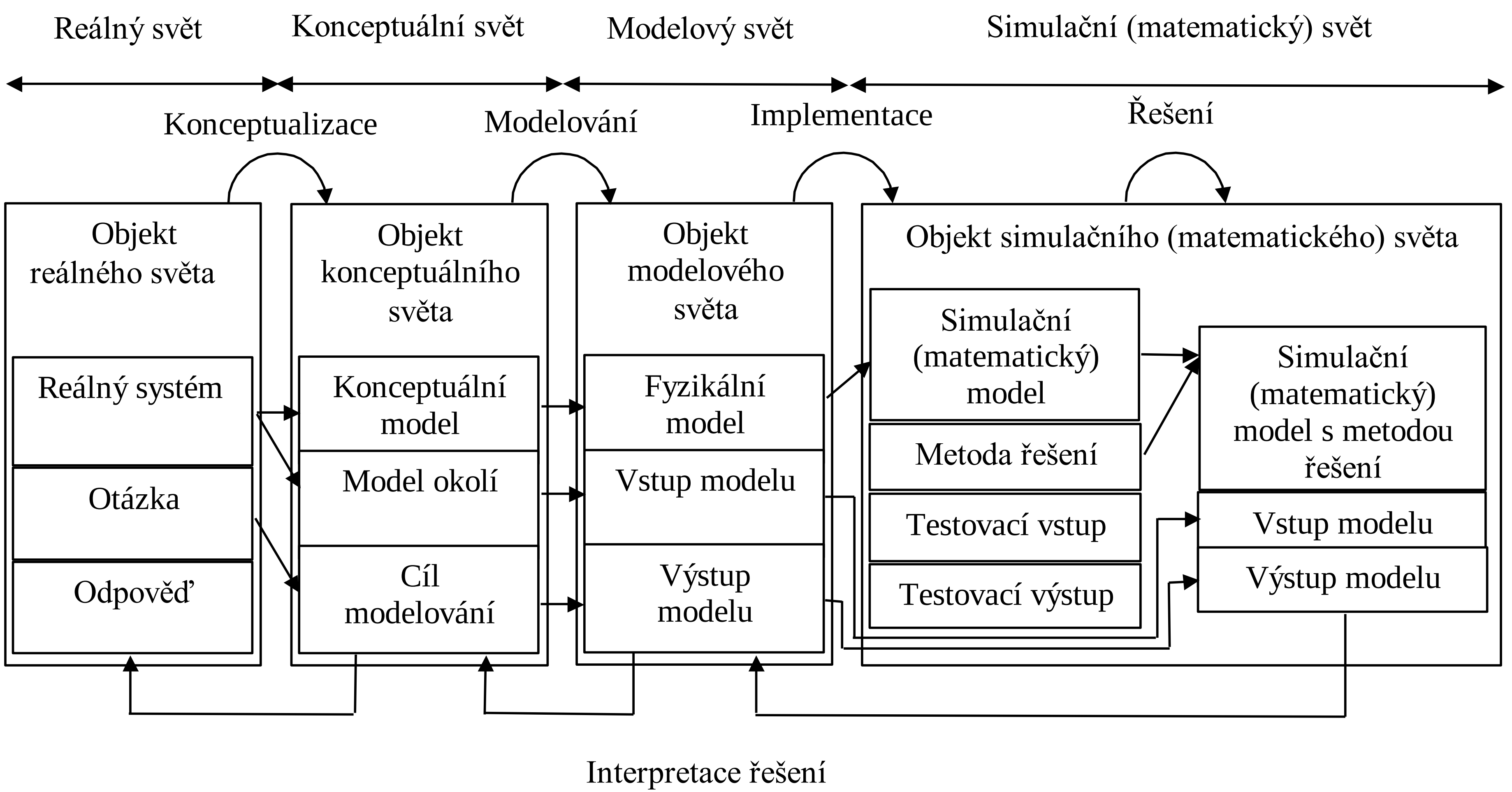
Postup modelování robotických systémů

- Model je základ návrhu a systému řízení robota
- Modelování = vývojový proces mechanického modelu
- Mechanický model je dále transformován na matematický a/nebo simualční model pro další zkoumání (analýza, simulace, syntéza, návrh řízení, systém řízení, kalibrace, diagnostika atd.)
- Model = konceptuální model = fyzikální (mechanický) model = matematický model = simulační model
- Proces modelování je velmi náročný, protože
  - Užívá znalosti a zkušenosti mnoha vědních oborů
  - Nelze ho popsat úplným systémem teorémů a pravidel a systematickým postupem
  - Musí se naučit vykonáváním (learning by doing)

Postup modelování robotických systémů Ideální objekty

- Základ modelování je transformace reálných objektů (strojů, technických systémů, např. robotických systémů) na fiktivní abstraktní objekty s idealizovanými vlastnostmi = tzv. **ideální objekty**
- **Ideální objekty** – hmotný bod, tuhé těleso, lineární pružina, pružné těleso, ideální plyn, elektrická kapacita
- Věda umí formulovat teorémy jen o ideálních objektech, věda přímo nepředpovídá nic o reálných objektech
- Vlastnosti reálných objektů jsou pouze do jistého rozsahu podobné vlastnostem ideálních objektů
- Věda (inženýrský výpočet) je platná pro reálné objekty podle stupně shody vlastností reálného a ideálního objektu (idealizovaný model)
- Proto je modelování absolutně základní pro každého inženýra. Modelování je základ každého řešení inženýrského problému. Důležitost modelování roste plynule s používáním počítačů

Postup modelování robotických systémů
Životní cyklus vývoje simulačního modelu



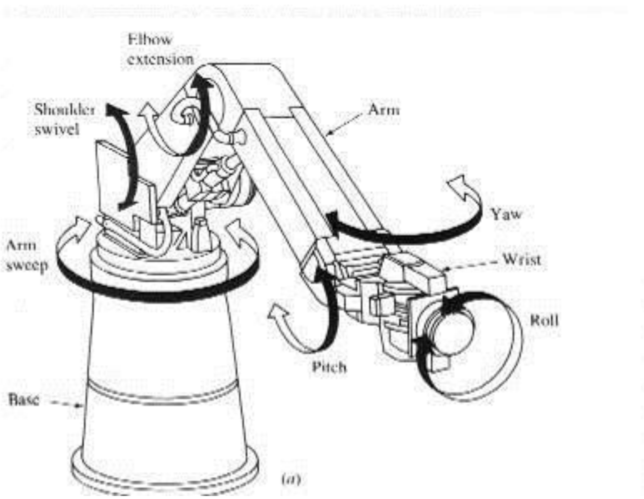
Postup sestavování dynamického modelu

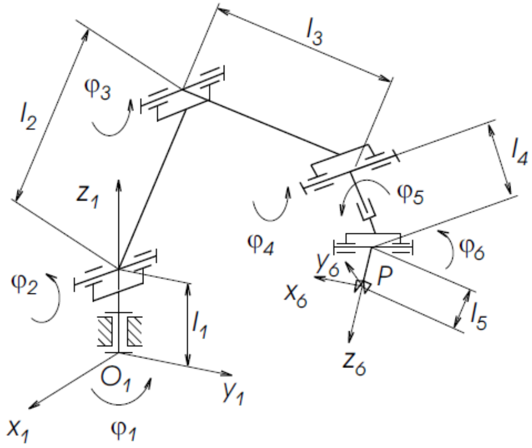
- Specifické otázky pro modelování dynamiky
- Jak modelovat těleso soustavy mnoha těles
- - jako tuhé nebo jako poddajné?
- Těleso je tuhé, pokud spektrum budicích frekvencí je mimo spektrum vlastních frekvencí tělesa.
- Jako modelovat poddajné těleso?
- Kolik a které vlastní vibrační a deformační tvary tělesa uvažovat.

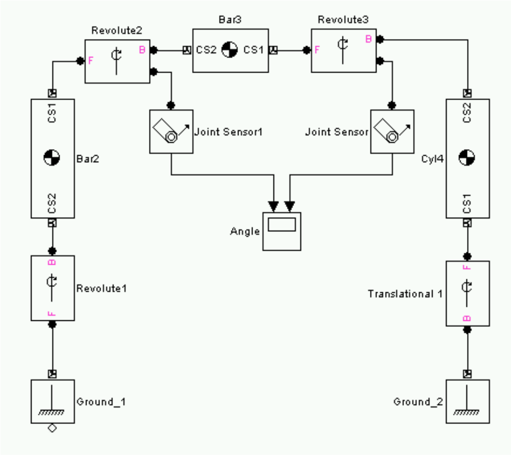
Postup modelování robotických systémů
Kroky vývoje simulačního modelu

- 1. krok – analýza objektu reálného světa (reálný, hypotetický) v rámci jistého prostředí pro odpověď na nějakou otázku
- 2. krok – konceptuální úkol (konceptualizace), kde objekt reálného světa je transformován na objekt konceptuálního světa – uvažované komponenty jsou vybrány
- 3. krok – fyzikální modelování, kde objekt konceptuálního světa je transformován na objekt fyzikálního světa – každá komponenta je nahrazena jedním nebo více ideálními objekty
- 4. krok – sestavení simulačního modelu, kde objekt fyzikálního světa je transformován na objekt simulačního světa – implementace simulačního modelu a vlastní simulační experiment – náhrada modelu posloupností počítačem vykonavatelných instrukcí – od ideálních objektů do matematických rovnic (modelu) spolu s řešičem a do počítačového kódu

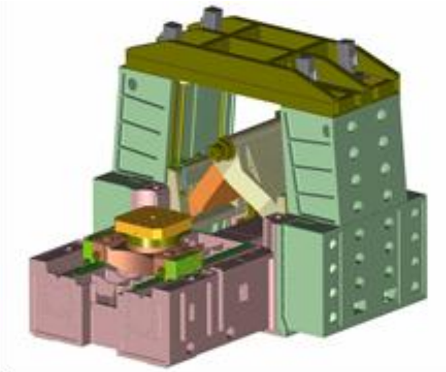
Postup modelování robotických systémů Příklad

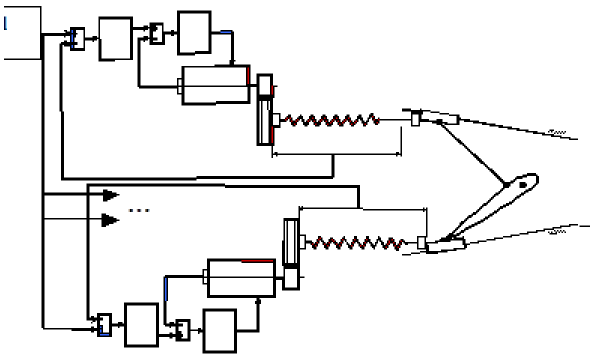


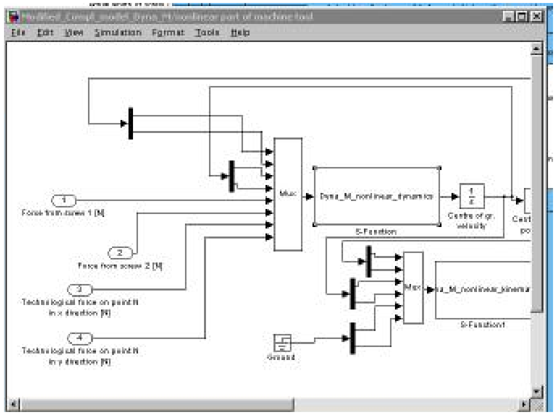




Postup modelování robotických systémů
Příklad







Postup modelování robotických systémů Prolog

- **Robotické systémy**
  - Průmyslové roboty sériové struktury
  - Průmyslové roboty paralelní struktury
  - Mobilní roboty
  - Antropomorfické, humanoidní roboty
  - ...

Úlohy dynamiky robotů

- Úlohy přímé: dány síly, hledáme pohyb
- Úlohy nepřímé (inverzní): dán pohyb, hledáme síly
- Úlohy globální: dán rozsah sil, hledáme rozsah pohybů

Metody sestavování dynamického modelu

- Existuje mnoho postupů sestavování pohybových rovnic soustav mnoha těles, tzv. dynamických formalismů
- Nejdříve popíšeme základní metody
  - Newton – Eulerovy pohybové rovnice
  - Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
  - Rekurzivní metody
- Teprve potom popíšeme obecný přehled známých metod
- Metody mají vlastnosti z hlediska řady hledisek
  - Minimální CPU čas řešení počítačem
  - Snadnost sestavení modelu na straně člověka
  - Systematičnost a univerzálnost postupu

Newton-Eulerovy pohybové rovnice

- Pohybové rovnice jednoho tělesa
  - Vyjádřené ve středu hmotnosti S

$$m\,\mathbf{a}_S = \mathbf{F}_v \qquad \mathrm{I}_S\,\alpha + \omega \times \mathrm{I}_S\,\omega = \sum_i \mathrm{M}_{iS} = \mathrm{M}_{Sv}$$

  - Vyjádřené v obecném bodě P – kompozitní popis

$$\mathbf{I}^P\mathbf{a}^P = \mathbf{F}^P + \boldsymbol{\beta}^P \quad \mathbf{I}^P = \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & m\tilde{\mathbf{d}}^T \\ m\tilde{\mathbf{d}} & \mathbf{I}_P \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}^P = -\begin{bmatrix} m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_P\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_P \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_P \end{bmatrix}$$

Newton-Eulerovy pohybové rovnice

- Pohybové rovnice soustavy těles
  - Popsané souřadnicemi **s=[z,q]** vázanými vazbami

$$\mathbf{f}(\mathbf{z},\mathbf{q}) = 0 \quad \mathbf{J}_z\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{J}_q\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \mathbf{J}_z\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{J}_q\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{j}_{qz} = 0$$

  - Pomocí nich vyjádříme zrychlení středů hmotnosti

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_z\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{V}_q\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_{qz}$$

  - Sestavíme pohybové rovnice metodou uvolňování

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{DR} + \mathbf{Q}$$

Newton-Eulerovy pohybové rovnice

- Celkové pohybové rovnice soustavy těles

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{D} & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{V}_z & -\mathbf{V}_q \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_5 & \mathbf{J}_z & \mathbf{J}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{R} \\ \ddot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{a}_{qz} \\ -\mathbf{j}_{qz} \end{bmatrix}$$

- Řešení začínáme z nezávislých souřadnic **q**(t_i), d/dt **q**(ti)
- Dopočítáme závislé
- Určíme a integrujeme nezávislá zrychlení

Newton-Eulerovy pohybové rovnice

- Soustava mnoha těles – robotický systém má n stupňů volnosti
- Soustavu popsána jen nezávislými souřadnicemi

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_q$$

- Užijeme d'Alembertův, Jourdainův nebo Gaussův princip

$$\mathbf{V}_q^T \mathbf{M} \mathbf{V}_q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}_q^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M}\mathbf{a}_q)$$

Newton-Eulerovy pohybové rovnice

- Soustava mnoha těles – robotický systém má n stupňů volnosti
- Soustavu popsána i závislými souřadnicemi

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_q$$

$$\mathbf{J}_z \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{j}_{qz} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_{qz} - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{j}_{qz}$$

- Užijeme d'Alembertův, Jourdainův nebo Gaussův princip

$$(\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q)^T \mathbf{M} (\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q) \ddot{\mathbf{q}} = (\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q)^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M}(\mathbf{a}_{qz} - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{j}_{qz}))$$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

- Soustava mnoha těles – robotický systém má n stupňů volnosti
- Soustava mnoha těles je popsána m závislými (fyzikálními) souřadnicemi
- $s_j, \quad j=1, \ldots, m, m>n$
- Tyto souřadnice jsou podrobeny holonomním rheonomním vazbám
- $f_k(s_j,t)=0, k=1, \ldots, r, r=m-n$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

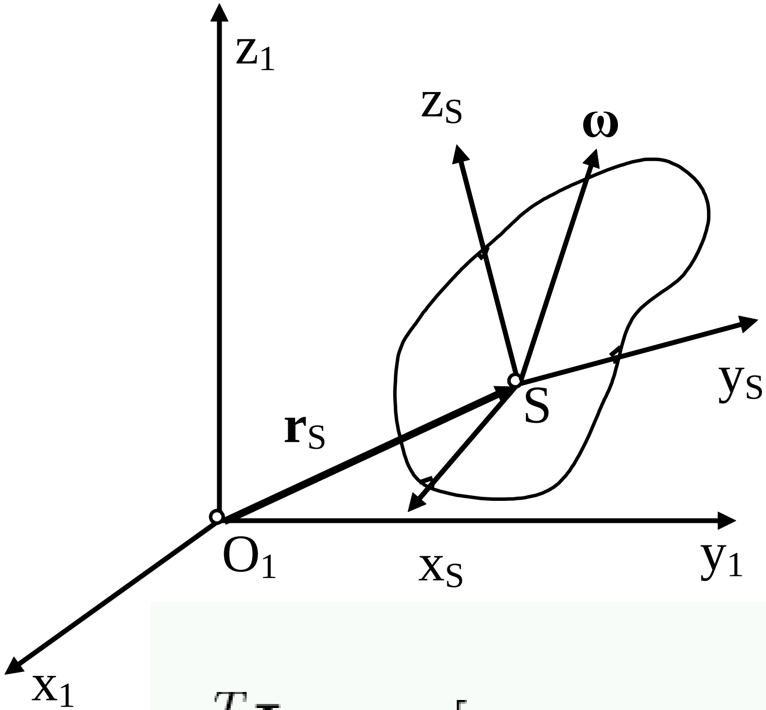
- Je sestaven výraz pro kinetickou energii E_k soustavy
- $T = E_k = E_k(s_j, d/dt\, s_j, t)$
- Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = Q_j + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

- kde Q_j jsou zobecněné síly a λ_k jsou Lagrangeovy multiplikátory odpovídající vazbovým podmínkám f_k

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

- Výraz pro kinetickou energii E_k je sestaven užitím Könikovy věty



$$E_k = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega}$$

$$v_S^2 = \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_S = \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S, \qquad \mathbf{v}_S = \frac{d\mathbf{r}_S}{dt}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{1S} = \mathbf{S}_{1S}^T \dot{\mathbf{S}}_{1S}$$

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega} = [\omega_{Sx}, \omega_{Sy}, \omega_{Sz}] \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{Sx} \\ \omega_{Sy} \\ \omega_{Sz} \end{bmatrix}$$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

- Výrazy pro zobecněné síly Q_j jsou sestaveny užitím
- 1) skalárních výrazů pro pracovní síly

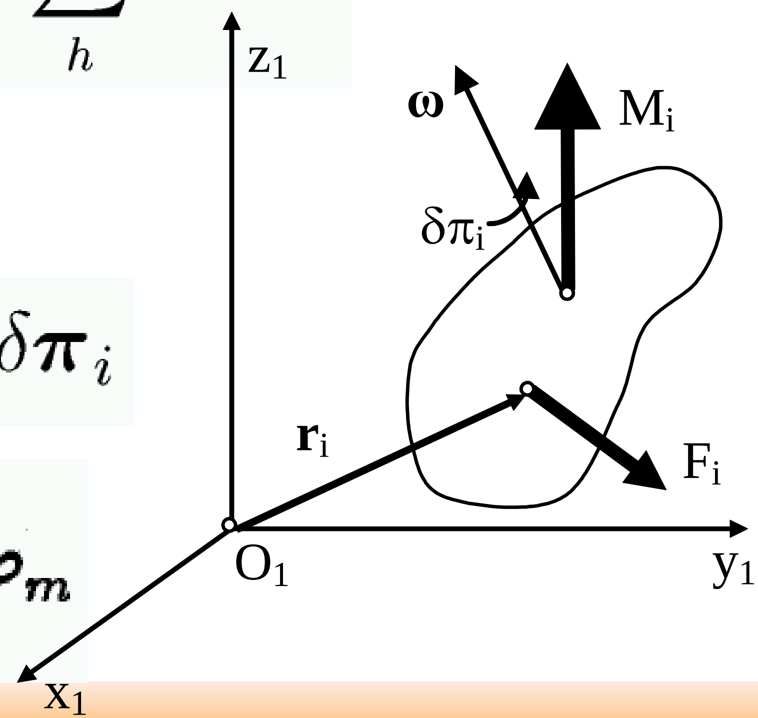
$$Q_j = \sum_l P_l \frac{\partial p_l}{\partial s_j}$$

$$Q_j \delta s_j = \sum_h P_h \delta p_h$$

- 2) vektorových výrazů

$$Q_j \delta s_j = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{M}_i \cdot \delta \boldsymbol{\pi}_i$$

$$Q_r \delta q_r = \sum_l \mathbf{F}_l^T \delta \mathbf{r}_l + \sum_m \mathbf{M}_m^T \delta \boldsymbol{\varphi}_m$$



Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

$$\boldsymbol{\omega}_i \delta t = \delta \boldsymbol{\pi}_i$$

- Nelze integrovat úhlové rychlosti $\dot{\varphi}_i = \omega_i$
- To lze jen pro konstatní osu rotace
- Obecně Eulerovy kinematické rovnice nelze integrovat

$$\omega_i = \mathbf{A}(\varphi)\dot{\varphi}_i \qquad \mathbf{\Omega}_{1S} = \mathbf{S}_{1S}^T \dot{\mathbf{S}}_{1S}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial s_j} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_i}{\partial s_j}$$

$$Q_j = \mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} + \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j}$$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

- 3) potenciální energie a Raleighovy funkce

$$V = V(s_j, t) \qquad Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r}$$

$$P_l = -b_l \dot{s}_l$$

$$D = D(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j b_{ij}\dot{s}_i\dot{s}_j$$

$$P_l = -\frac{\partial D}{\partial \dot{s}_j}$$

- Toto je velmi užitečné pro pružiny a tlumiče, neboť dostaneme snadno správná znaménka

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = Q_j - \frac{\partial V}{\partial s_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{s}_j} + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
Struktura LEMT

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{s}_a \partial \dot{s}_j} \ddot{s}_a + \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial s_a \partial \dot{s}_j} \dot{s}_a + \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = Q_j + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}$$

Druhá časová derivace vazbových podmínek

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial s_a} \ddot{s}_a + \sum_{j=1}^{n} \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial s_j \partial s_a} \dot{s}_a \dot{s}_j + 2 \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial s_a} \dot{s}_a + \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Phi}_s^T \\ \mathbf{\Phi}_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = [\ddot{s}_1, \ddot{s}_2, \ldots, \ddot{s}_n], \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
Struktura LEMT

$$(\mathbf{M})_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{s}_i \partial \dot{s}_j}, \qquad (\mathbf{\Phi}_s)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial s_j},$$

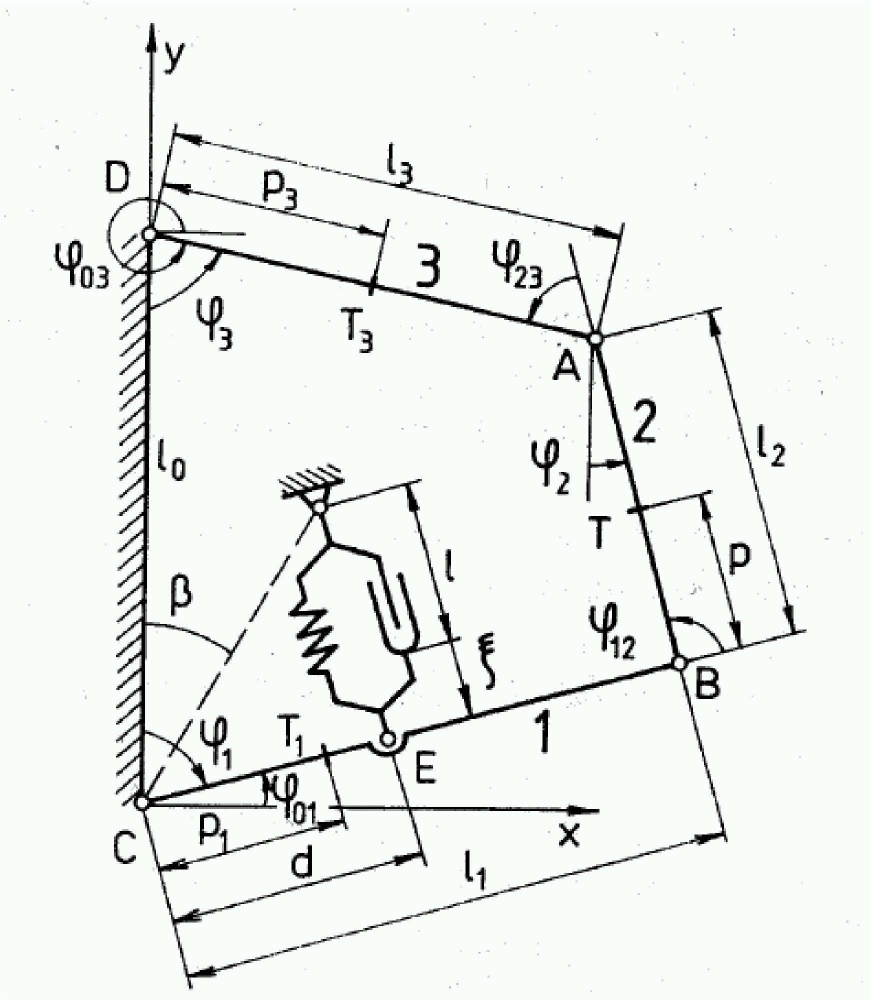
$$(\mathbf{p}_1)_j = \frac{\partial T}{\partial s_j} - \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{s}_j} - \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial s_a \partial \dot{s}_j} \dot{s}_a + Q_j$$

$$(\mathbf{p}_2)_k = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial s_j \partial s_a} \dot{s}_j \dot{s}_a - 2 \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial s_a} \dot{s}_a - \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2}$$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu Principiální schéma numerického řešení

Principiální postup řešení je následující. Na začátku máme souřadnice **s**(t_i) a jejich rychlosti d/dt **s**(ti) v čase t_i. Z nich vypočteme matici soustavy i její pravou stranu. Řešením této soustavy dostaneme zrychlení d^2/dt^2**s**(t_i) a Lagrangeovy multiplikátory **λ**. Integrací zrychlení v čase dostaneme polohy **s**(t_{i+1}) a rychlosti d/dt **s**(t_{i+1}) v čase t_{i+1} a celý postup můžeme opakovat. Tento postup však trpí numerickou nestabilitou.

Příklad – rovinné lichoběžníkové zavěšení kola automobilu



Příklad – rovinné lichoběžníkové zavěšení kola automobilu

- Souřadnice
- Počet stupňů volnosti, souřadnice, vazby
- Kinetická energie $T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_{2T}\dot{\varphi}_2^2 + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + I_3\dot{\varphi}_3^2)$

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 s\varphi_1 - p s\varphi_2 \\ y_2 &= l_1 c\varphi_1 + p c\varphi_2 \\ \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 &= l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + p^2\dot{\varphi}_2^2 - 2l_1 p c(\varphi_1 + \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

- Vazby

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv l_1 s\varphi_1 - l_2 s\varphi_2 - l_3 s\varphi_3 = 0 \\ f_2 &\equiv l_1 c\varphi_1 + l_2 c\varphi_2 + l_3 c\varphi_3 - l_0 = 0 \end{aligned}$$

- Zobecněné síly
  - Síla pružiny a tlumiče $F(\xi, \dot{\xi})$ na ξ

$$\xi = \sqrt{a - 2bc(\varphi_1 - \beta)} - l$$

$$(l + \xi)^2 = l^2 + 2d^2 - 2d\sqrt{l^2 + d^2}c(\varphi_1 - \beta)$$

$$Q_j \delta s_j = \sum_h P_h \delta p_h$$

$$Q_j = \sum_l P_l \frac{\partial p_l}{\partial s_j}$$

$$a = l^2 + 2d^2 \text{ and } b = d\sqrt{l^2 + d^2}$$

Příklad – rovinné lichoběžníkové zavěšení kola automobilu

- pohybové rovnice

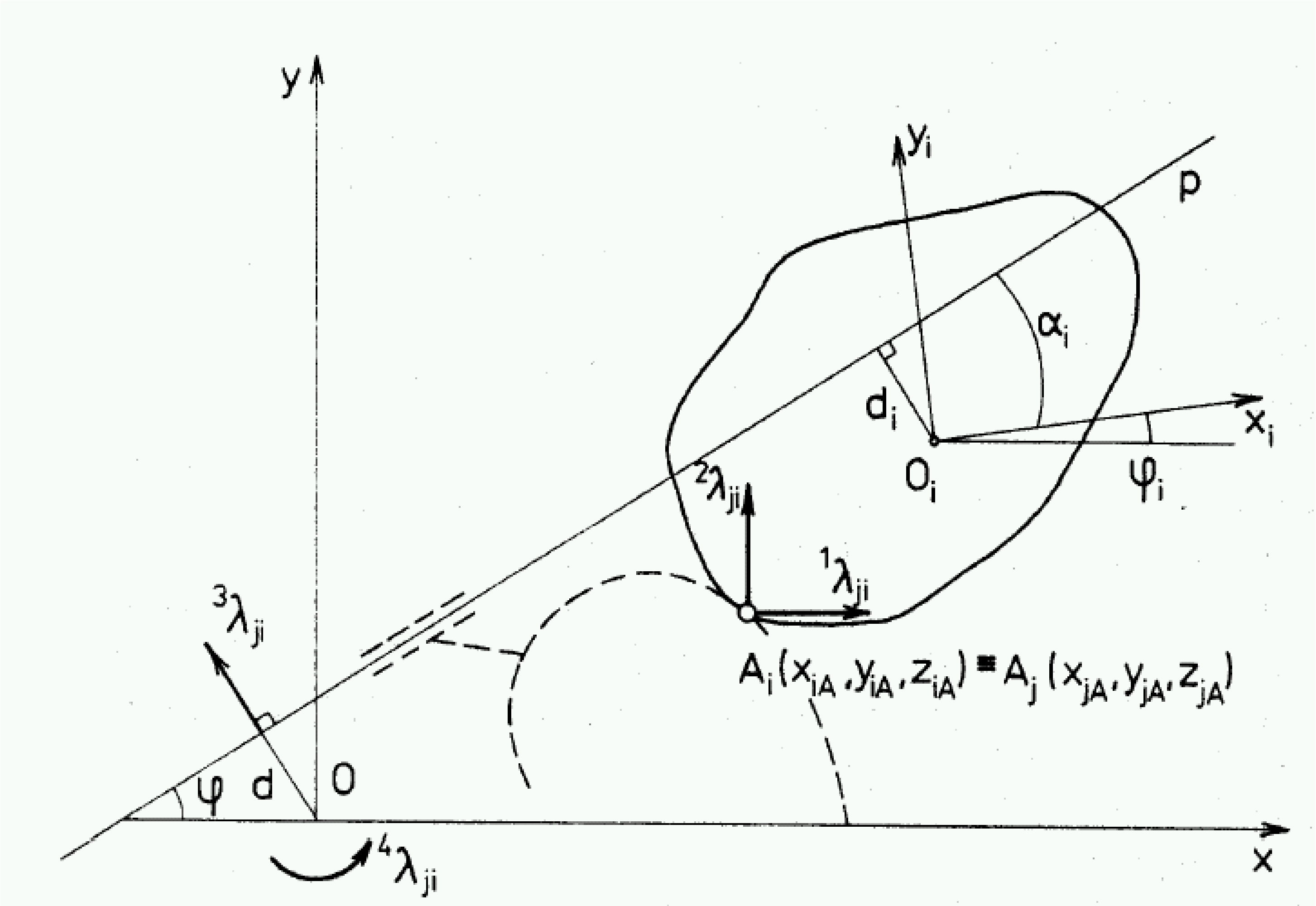
$$\begin{bmatrix} I_1 + m_2 l_1^2, & -m_2 l_1 p \mathrm{c}(\varphi_1+\varphi_2), & 0, & l_1 \mathrm{c}\varphi_1, & -l_1 \mathrm{s}\varphi_1 \\ & I_{2T} + m_2 p^2, & 0, & -l_2 \mathrm{c}\varphi_2, & -l_2 \mathrm{s}\varphi_2 \\ & & I_3, & -l_3 \mathrm{c}\varphi_3, & -l_3 \mathrm{s}\varphi_3 \\ & & & 0, & 0, \\ \mathrm{sym.} & & & & 0, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 p \dot{\varphi}_2^2 \mathrm{s}(\varphi_1+\varphi_2) - F(\xi,\dot{\xi})(b/(l+\xi))\mathrm{s}(\varphi_1-\beta) \\ -m_2 l_1 p \dot{\varphi}_1^2 \mathrm{s}(\varphi_1+\varphi_2) \\ 0 \\ l_1 \dot{\varphi}_1^2 \mathrm{s}\varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2^2 \mathrm{s}\varphi_2 - l_3 \dot{\varphi}_3^2 \mathrm{s}\varphi_3 \\ l_1 \dot{\varphi}_1^2 \mathrm{c}\varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \mathrm{c}\varphi_2 + l_3 \dot{\varphi}_3^2 \mathrm{c}\varphi_3 \end{bmatrix}$$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
Fyzikální souřadnice

- Časté použití fyzikální souřadnice
  - V prostoru – kartézské souřadnice středu hmotnosti a Eulerovy/Cardanovy úhly nebo Eulerovy parametry
  - V rovině – kartézské souřadnice středu hmotnosti a úhel mezi lokálním a globálním souřadnicovým systémem

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
Fyzikální souřadnice pro rovinné soustavy



Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
Fyzikální souřadnice

- Kinematické vazby

$$x_i + x_{iA}\mathrm{c}\varphi_i - y_{iA}\mathrm{s}\varphi_i = x_j + x_{jA}\mathrm{c}\varphi_j - y_{jA}\mathrm{s}\varphi_j$$

$$y_i + x_{iA}\mathrm{s}\varphi_i + y_{iA}\mathrm{c}\varphi_i = y_j + x_{jA}\mathrm{s}\varphi_j + y_{jA}\mathrm{c}\varphi_j$$

$$d_i + y_i\mathrm{c}(\alpha_i + \varphi_i) - x_i\mathrm{s}(\alpha_i + \varphi_i) =$$

$$= d_j + y_j\mathrm{c}(\alpha_j + \varphi_j) - x_j\mathrm{s}(\alpha_j + \varphi_j)$$

$$\alpha_i + \varphi_i = \alpha_j + \varphi_j$$

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
Fyzikální souřadnice

- Pohybové rovnice

$$
\begin{aligned}
m_i\ddot{x}_i &= \sum {}^1\lambda_{ji} - \sum {}^3\lambda_{ji}\mathrm{s}(\alpha_i+\varphi_i) \\
m_i\ddot{y}_i &= \sum_A {}^2\lambda_{ji} + \sum_p {}^3\lambda_{ji}\mathrm{c}(\alpha_i+\varphi_i) \\
I_i\ddot{\varphi}_i &= \sum_A(-{}^1\lambda_{ji}(x_{iA}\mathrm{s}\varphi_i + y_{iA}\mathrm{c}\varphi_i) +{}^2\lambda_{ji}(x_{iA}\mathrm{c}\varphi_i - y_{iA}\mathrm{s}\varphi_i)) \\
&\quad + \sum_p({}^3\lambda_{ji}(-y_i\mathrm{s}(\alpha_i+\varphi_i) - x_i\mathrm{c}(\alpha_i+\varphi_i)) +{}^4\lambda_{ji})
\end{aligned}
$$

Metody integrace pohybových rovnic

- Souřadnice
- NEZÁVISLÉ souřadnice:
  - Počet souřadnic = počet stupňů volnosti (m=n)
  - Pohybové rovnice = ODE
  - Relativní souřadnice, zobecněné souřadnice

- ZÁVISLÉ souřadnice:
  - Počet souřadnic > počet stupňů volnosti (m>n)
  - Pohybové rovnice = DAE
  - fyzikální souřadnice, přirozené souřadnice, jiné závislé souřadnice

Obecné numerické řešení DAE

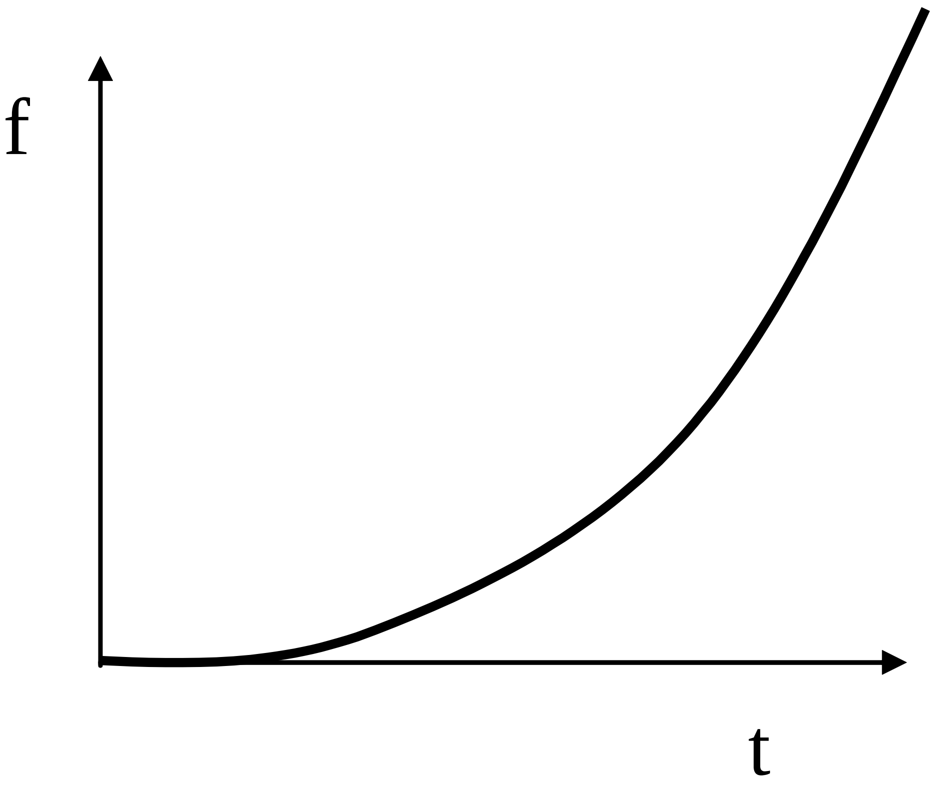
- Index DAE = počet časových derivací algebraických rovnic +1, aby byla dosažena regulární systémová matice

Metody integrace pohybových rovnic
Přímé numerické řešení DAE – nebezpečí nestability

$$\ddot{f} = \varepsilon_a$$

$$\dot{f} = \varepsilon_a t + \varepsilon_v$$

$$f = \frac{1}{2}\varepsilon_a t^2 + \varepsilon_v t + \varepsilon_p$$



Metody integrace pohybových rovnic
Řešení numerické nestability DAE

- **Řešení ve fyzikálních souřadnicích**
- **Baugartova stabilizace**
- Vazbové rovnice $\ddot{f} = 0$ mají charakteristické kořeny

  $\lambda_{1,2}=0$
- Proto jsou modifikovány

$$\ddot{f} + 2\alpha\dot{f} + \beta^2 f = 0; \qquad \alpha > 0$$

  s charakterickými kořeny se zápornou reálnou částí
- Například $\alpha = \beta = 1$ a řešení vazeb je tlumeno

$$f = e^{-t}(C_1 + C_2 t)$$

Metody integrace pohybových rovnic
Řešení numerické nestability DAE

- Baumgartova stabilizace

$$\ddot{\mathbf{f}} + 2\alpha\dot{\mathbf{f}} + \beta^2\mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{\Phi}_s\ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{\Phi}}_s\dot{\mathbf{s}} + 2\alpha\mathbf{\Phi}_s\dot{\mathbf{s}} + \beta^2\mathbf{f} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Phi}_s^T \\ \mathbf{\Phi}_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ -\dot{\mathbf{\Phi}}_s\dot{\mathbf{s}} - 2\alpha\mathbf{\Phi}_s\dot{\mathbf{s}} - \beta^2\mathbf{f} \end{bmatrix}$$

$\alpha=\beta=1$, $\alpha=\beta=10$, $\alpha=10$, $\beta=5$

- Řešení v nezávislých souřadnicích

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{s}$$

$$\mathbf{\Phi}_s \dot{\mathbf{s}} = 0$$
$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{s}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_s \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_s \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}^*, \mathbf{R}] \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{\Phi}_s \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{\Phi}_s^T = 0$$

- Řešení v nezávislých souřadnicích

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} - \boldsymbol{\Phi}_s^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{R}^T\boldsymbol{\Phi}_s^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}^T\mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}^T\mathbf{p}_1$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^T\mathbf{p}_1 - \mathbf{R}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{q}}$$

- Určení **R**
  - Volba nezávislých souřadnic ze závislých konstantní maticí **B**
  - Metoda projekce
  - Inverzní kinematika

Metody integrace pohybových rovnic
Řešení numerické nestability DAE

- Metoda projekce

$$[\mathbf{\Phi}_z \mathbf{\Phi}_q]\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{z}}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}_z\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Phi}_q\dot{\mathbf{q}} = 0$$

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{\Phi}_z^{-1}\mathbf{\Phi}_q\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{z}}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{bmatrix} = \dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix}-\mathbf{\Phi}_z^{-1}\mathbf{\Phi}_q\\ \mathbf{E}\end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}-\mathbf{\Phi}_z^{-1}\mathbf{\Phi}_q\\ \mathbf{E}\end{bmatrix}$$

Metody integrace pohybových rovnic
Řešení numerické nestability DAE

- Rozklad Jacobiho matice vazeb

$$\mathbf{\Phi}_s = \mathbf{U}^T\mathbf{D}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}\mathbf{s}$$

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{V}\dot{\mathbf{s}} \quad , \quad \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{V}\ddot{\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{\Phi}_s\mathbf{V}^T\dot{\mathbf{c}} = 0$$

$$\mathbf{U}^T\mathbf{D}\dot{\mathbf{c}} = 0$$

$$\mathbf{D}\dot{\mathbf{c}} = 0$$

$$\mathbf{c}_z = [c_1, c_2, \ldots, c_r]$$

$$\mathbf{c}_q = [c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n]$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_z \\ \mathbf{c}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_z \\ \mathbf{V}_q \end{bmatrix} \mathbf{s}$$

$$\mathbf{c}_q = \mathbf{V}_q\mathbf{s}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_q^T$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}_q$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_s \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}\ddot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{\Phi}}_s \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{s}}$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_s \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{\Phi}}_s \\ 0 \end{bmatrix} \ldots\right)$$

Metody integrace pohybových rovnic
Řešení numerické nestability DAE

- Metoda inverzní kinematiky

$$s = r(q)$$

$$\dot{s} = R\dot{q}$$

$$\ddot{s} = R\ddot{q} + \dot{R}\dot{q}$$

$$R = \frac{\partial R}{\partial q}$$

Metody integrace pohybových rovnic
Řešení numerické nestability DAE

- Historicky – metoda rozdělených souřadnic

$$\mathbf{\Phi}_s \dot{\mathbf{s}} = [\mathbf{\Phi}_u, \mathbf{\Phi}_v] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = -\mathbf{\Phi}_t$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= -\mathbf{\Phi}_u^{-1}\mathbf{\Phi}_v\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{\Phi}_u^{-1}\mathbf{\Phi}_t \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -\mathbf{\Phi}_u^{-1}\mathbf{\Phi}_v\ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{\Phi}_u^{-1}((\mathbf{\Phi}_s\dot{\mathbf{s}})_s\dot{\mathbf{s}} + 2\mathbf{\Phi}_{ts}\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{\Phi}_{tt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{uv}\ddot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}^u - \mathbf{\Phi}_u^T\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{M}^{vu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{vv}\ddot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}^v - \mathbf{\Phi}_v^T\boldsymbol{\lambda} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{M}^{vv} - (\mathbf{\Phi}_u^{-1}\mathbf{\Phi}_v)^T\mathbf{M}^{uv})\ddot{\mathbf{v}} + (\mathbf{M}^{vu} - (\mathbf{\Phi}_u^{-1}\mathbf{\Phi}_v)^T\mathbf{M}^{uu})\ddot{\mathbf{u}} =$$

$$= \mathbf{g}^v - (\mathbf{\Phi}_u^{-1}\mathbf{\Phi}_v)^T\mathbf{g}^u$$

Ekvivalence N-E a LEMT

- Pohybové rovnice soustavy mnoha těles lze sestavit mnoha způsoby. Všechny musejí být ekvivalentní, protože výsledné pohybové rovnice popisují tentýž mechanický systém.
- Dva hlavní postupy jsou reprezentovány: Newton-Eulerovy pohybové rovnice (metoda uvolňování a N-E rovnice) a Lagrangeovy rovnice smíšeného typu
- Avšak, např. i pohybové rovnice jediného tělesa nejsou identické, tj. fyzikální souřadnice s Cardanovými úhly pomocí N-E a LEMT pohybových rovnic

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{M}_i$$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial s_j} = Q_j$$

Ekvivalence N-E a LEMT

- Rovnost levých stran pohybových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = \sum_i \left((m_i \dot{\mathbf{v}}_i)^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} + (\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j} \right)$$

- Rovnost pravých stran pohybových rovnic

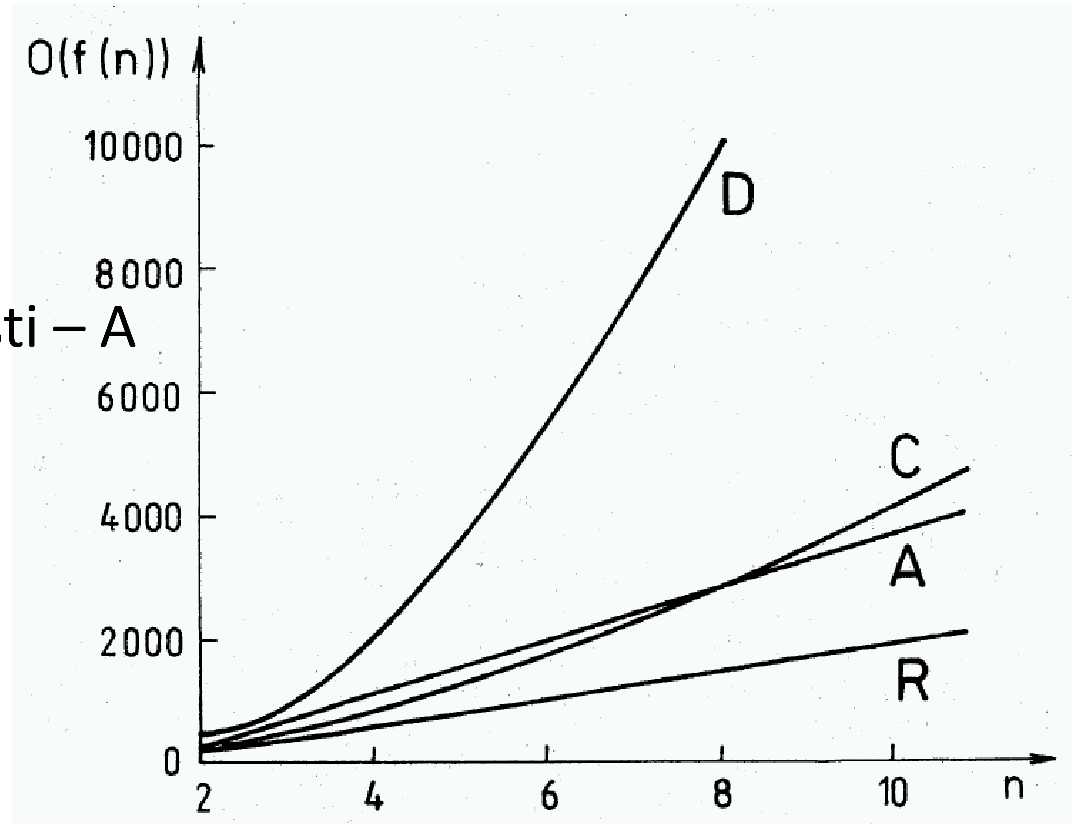
$$Q_j + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial s_j^{(h)}} = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} + \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j} \right)$$

- Lze vysvětlit shodu většiny formalismů

Výpočtová složitost

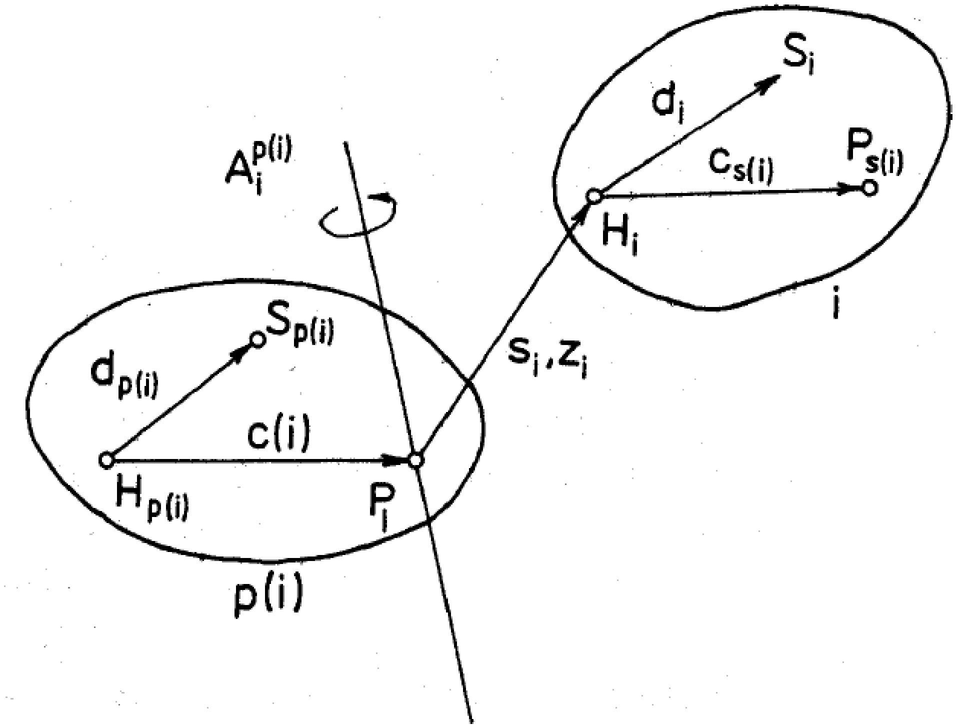
- Přímé pohybové rovnice - D
- $O(n^3)+ O(n^2)+ O(n^3)$
- Kompozitní tuhá tělesa - C
- $O(n^2)+ O(n)+ O(n^3)$
- Článkové matice setrvačnosti – A
- $O(n)$
- Residuová metoda - R
- $\alpha O(n^2)+ O(n)+\alpha O(n^3)$
- Pro poddajná tělesa

10-100x větší rozdíly !!!



Rekurzivní metody sestavování pohybových rovnic

- Kompozitní tuhá tělesa
- Článkové matice setrvačnosti



Rekurzivní metody sestavování pohybových rovnic

- Rekurzivní popis kinematiky

$$\mathbf{a}_i^H = \mathbf{C}_i \mathbf{a}_{p(i)}^H + \boldsymbol{\Phi}_i \ddot{s}_i + \boldsymbol{\eta}_i$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{p(i)} & \mathbf{A}_i^{p(i)}(\tilde{\mathbf{c}}_i + \tilde{\mathbf{z}}_i)^T \\ 0 & \mathbf{A}_i^{p(i)} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{p(i)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(i),p(i)}^2(\tilde{\mathbf{c}}_i + \tilde{\mathbf{z}}_i)) + (\mathbf{A}_i^{p(i)}\boldsymbol{\omega}_{p(i),p(i)}) \times 2\dot{\mathbf{s}}_i \\ (\mathbf{A}_i^{p(i)}\boldsymbol{\omega}_{p(i),p(i)}) \times \boldsymbol{\omega}_{i,p(i)i} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i = [0,0,1,0,0,0] \qquad \boldsymbol{\Phi}_i = [0,0,0,0,0,1]$$

- Pro kompozitní popis pohybových rovnic

$$\mathbf{I}^P \mathbf{a}^P = \mathbf{F}^P + \boldsymbol{\beta}^P \quad \mathbf{I}^P = \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & m\tilde{\mathbf{d}}^T \\ m\tilde{\mathbf{d}} & \mathbf{I}_P \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}^P = -\begin{bmatrix} m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_P \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_P \end{bmatrix}$$

Rekurzivní metody sestavování pohybových rovnic

- Kompozitní tuhá tělesa

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_n &= \mathbf{I}_n^H \\
\mathbf{I}_{j-1} &= \mathbf{I}_{j-1}^H + \mathbf{C}_j^T \mathbf{I}_j \mathbf{C}_j, \qquad j = n, \ldots, 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_j^j &= \mathbf{I}_j \mathbf{\Phi}_j, & j &= n, \ldots, 1 \\
\mathbf{J}_j^{k-1} &= \mathbf{C}_k^T \mathbf{J}_j^k, & k &= j, \ldots, 2 \\
M_{jk} &= \mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{J}_j^k, & k &= j, \ldots, 1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{F}_j &= -\mathbf{I}_j^H \underline{\mathbf{a}}_j^H + \mathbf{F}_j^H + \beta_j^H \\
\mathbf{K}_n &= \mathbf{F}_n \\
\mathbf{K}_{j-1} &= \mathbf{F}_{j-1} + \mathbf{C}_j^T \mathbf{K}_j \\
Q_j &= \mathbf{\Phi}_j^T \mathbf{K}_j
\end{aligned}\right\} j = n, \ldots, 2$$

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{d}}_j & \mathbf{E} \end{bmatrix} \left(-\mathbf{I}_j^S \underline{\mathbf{a}}_j^S + \mathbf{F}_j^S + \beta_j^S\right)$$

Rekurzivní metody sestavování pohybových rovnic

- Článkové matice setrvačnosti

$$\mathbf{c}_i, \boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{F}_{Ei}^H, \boldsymbol{\beta}_i^H$$

$$\mathbf{M}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{I}_i^H \boldsymbol{\Phi}_i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{E} - \mathbf{I}_i^H \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{M}_i^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^T \\ \mathbf{N}_i &= (\mathbf{E} - \mathbf{I}_i^H \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{M}_i^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^T) \mathbf{I}_i^H = \mathbf{P}_i \mathbf{I}_i^H \\ \boldsymbol{\gamma}_i &= \mathbf{N}_i \boldsymbol{\eta}_i - \mathbf{P}_i (\mathbf{F}_{Ei}^H + \boldsymbol{\beta}_i^H) \end{aligned}$$

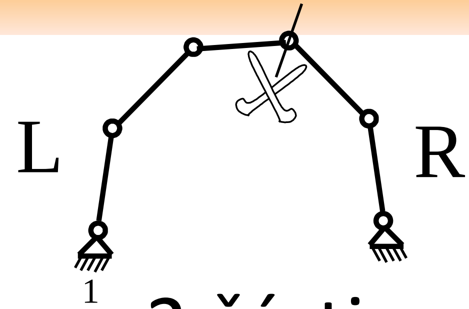
$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{p(i)}^{H*} &= \mathbf{I}_{p(i)}^H + \mathbf{C}_i^T \mathbf{N}_i \mathbf{C}_i \\ \boldsymbol{\beta}_{p(i)}^{H*} &= \boldsymbol{\beta}_{p(i)}^H - \mathbf{C}_i^T \boldsymbol{\gamma}_i \end{aligned}$$

$$\ddot{s}_i = \mathbf{M}_i^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^T (\mathbf{F}_{Ei}^H + \boldsymbol{\beta}_i^H - \mathbf{I}_i^H (\mathbf{C}_i \mathbf{a}_{p(i)}^H + \boldsymbol{\eta}_i))$$

Fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů

- Většina metod pro sestavení pohybových rovnic Lagrangeovy multiplikátory/reakční síly buď eliminuje analyticky nebo je následně ignoruje.
- Jsou však případy, kdy to nelze – např. systémy se třením. Pro vyjádření třecích sil potřebujeme znát reakční síly a to v rámci řešení pohybových rovnic, ne až po jejich vyřešení.
- Lagrangeovy multiplikátory sice mají vždy obecnou interpretaci reakčních sil, ale pro konkrétní použití potřebujeme jejich správnou fyzikální interpretaci jako tradičních reakčních sil.

Fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů



- Kinematická smyčka rozdělena řezem na 2 části
- Popis rozdělen na levou a pravou stranu:
  - Souřadnice $s_j^L (s_j^R)$
  - Kinetická energie $T^L = T^L(s_j^L, \dot{s}_j^L, t)$
  - Obecné síly Q_j^L
  - Vazby $g_k^L = 0$
- Kinematické vazby v řezu vyjádřeny

$$g_l(s_j^L, \dot{s}_j^L, \dots, s_j^{(h)L}, s_j^R, \dot{s}_j^R, \dots, s_j^{(h)R}, t) = 0$$

Fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů

- Levá strana soustavy je popsána

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^L}{\partial \dot{s}_j^L} - \frac{\partial T^L}{\partial s_j^L} = Q_j^L + \sum_k \lambda_k^L \frac{\partial g_k^L}{\partial s_j^{(h)L}} + \sum_l R_l^L \frac{\partial u_l^L}{\partial s_j^L}$$

- Síly R_l^L působí na souřadnicích u_l^L z pravé na levou stranu

$$T(s_j, \dot{s}_j, t) = T^L(s_j^L, \dot{s}_j^L, t) + T^R(s_j^R, \dot{s}_j^R, t)$$

$$g_l(s_j^L, \dot{s}_j^L, \ldots, s_j^{(h)L}, s_j^R, \dot{s}_j^R, \ldots, s_j^{(h)R}, t) =$$

$$= G_l(u_l^L(s_j^L, t), \ldots, u_l^{(h)L}(s_j^L, t), u_l^R(s_j^R, t), \ldots, u_l^{(h)R}(s_j^R, t), t) = 0$$

- Spojený systém je popsán

$$g_l(s_j^L, \ldots, s_j^R, \ldots, t) = G_l(u_l^L, \ldots, u_l^R, \ldots, t) =$$

$$= G_l^L(u_l^L, \ldots, t) - G_l^R(u_l^R, \ldots, t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j^L} - \frac{\partial T}{\partial s_j^L} = Q_j^L + \sum_k \lambda_k^L \frac{\partial g_k^L}{\partial s_j^{(h)L}} + \sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial s_j^{(h)L}}$$

$$\frac{\partial g_l^R(s_j^R, \ldots, t)}{\partial s_j^{(h)L}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j^L} - \frac{\partial T}{\partial s_j^L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^L}{\partial \dot{s}_j^L} - \frac{\partial T^L}{\partial s_j^L}$$

$$\sum_l R_l^L \frac{\partial u_l^L}{\partial s_j^L} = \sum_m \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial s_j^{(h)L}}$$

$$\frac{\partial g_m}{\partial s_j^{(h)L}} = \sum_l \frac{\partial G_m}{\partial u_l^{(h)L}} \frac{\partial u_l^{(h)L}}{\partial s_j^{(h)L}} = \sum_l \frac{\partial G_m}{\partial u_l^{(h)L}} \frac{\partial u_l^L}{\partial s_j^L}$$

$$\sum_l R_l^L \frac{\partial u_l^L}{\partial s_j^L} = \sum_m \lambda_m \sum_l \frac{\partial G_m}{\partial u_l^{(h)L}} \frac{\partial u_l^L}{\partial s_j^L} =$$

$$= \sum_l \sum_m \lambda_m \frac{\partial G_m}{\partial s_j^{(h)L}} \frac{\partial u_l^L}{\partial s_j^L}$$

$$\sum_l \left(R_l^L - \sum_m \lambda_m \frac{\partial G_m}{\partial u_l^{(h)L}} \right) \frac{\partial u_l^L}{\partial s_j^L} = 0$$

Fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů

- Obecné vyjádření reakčních sil Lagrangeovými multiplikátory

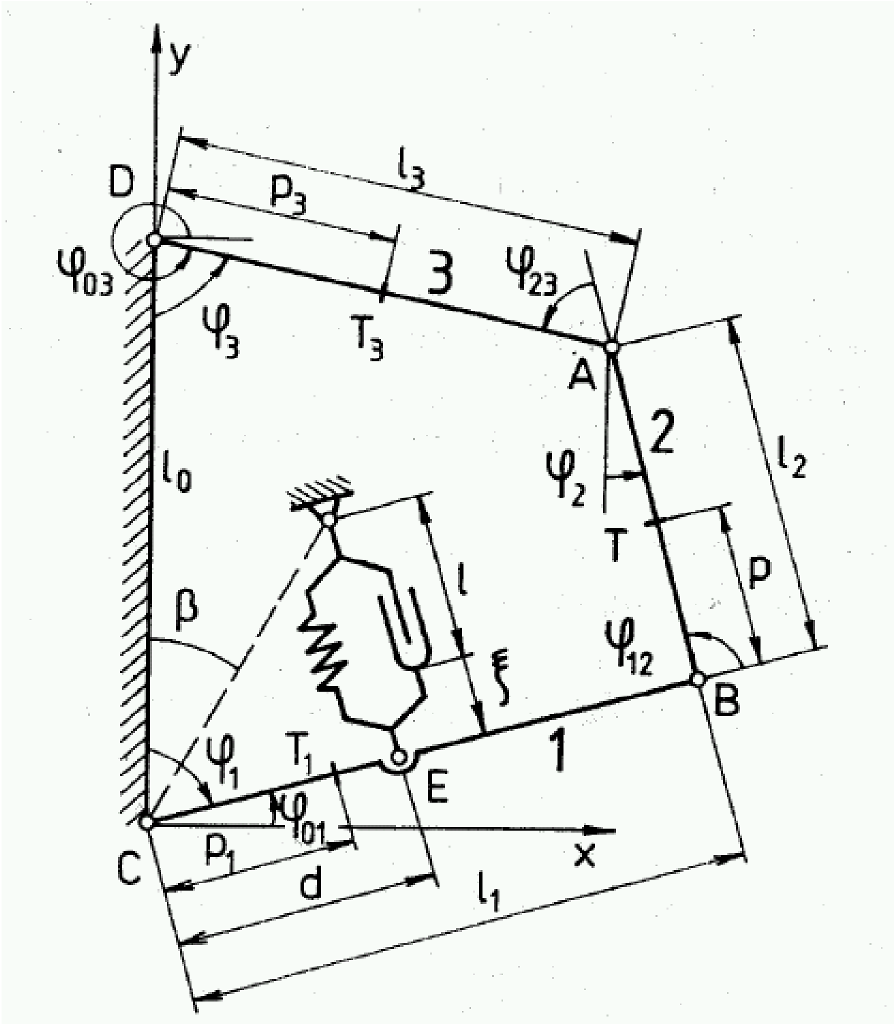
$$R_l^L = \sum_m \lambda_m \frac{\partial G_m}{\partial u_l^{(h)L}}$$

- Například $G_l = u_l^L - u_l^R$
- pak

$$R_l^L = \lambda_l \text{ and } R_l^R = -\lambda_l$$

- Např. pro sférický kloub

Příklad – rovinné lichoběžníkové zavěšení kola automobilu



Příklad – rovinné lichoběžníkové zavěšení kola automobilu

- Souřadnice
- Kinetická energie

$$T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_{2T}\dot{\varphi}_2^2 + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + I_3\dot{\varphi}_3^2)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \mathrm{s}\varphi_1 - p\mathrm{s}\varphi_2 \\ y_2 &= l_1 \mathrm{c}\varphi_1 + p\mathrm{c}\varphi_2 \\ \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 &= l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + p^2\dot{\varphi}_2^2 - 2l_1p\mathrm{c}(\varphi_1 + \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

- Vazby

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv l_1\mathrm{s}\varphi_1 - l_2\mathrm{s}\varphi_2 - l_3\mathrm{s}\varphi_3 = 0 \\ f_2 &\equiv l_1\mathrm{c}\varphi_1 + l_2\mathrm{c}\varphi_2 + l_3\mathrm{c}\varphi_3 - l_0 = 0 \end{aligned}$$

- Zobecněné síly
  - Síla pružiny a tlumiče $F(\xi,\dot{\xi})$ působí na souřadnici ξ

$$Q_j = \sum_l P_l \frac{\partial p_l}{\partial s_j}$$

$$Q_j \delta s_j = \sum_h P_h \delta p_h$$

$$(l+\xi)^2 = l^2 + 2d^2 - 2d\sqrt{l^2 + d^2}\mathrm{c}(\varphi_1 - \beta)$$

$$\xi = \sqrt{a - 2b\mathrm{c}(\varphi_1 - \beta)} - l$$

$$a = l^2 + 2d^2 \text{ and } b = d\sqrt{l^2 + d^2}$$

Příklad – rovinné lichoběžníkové zavěšení kola automobilu

- Lagrangeovy multiplikátory λ_1, λ_2 jsou rovny reakčním silám v rotační dvojici A
- Pokud je popis kinetické energie

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+\frac{1}{2}I_{2T}\dot{\varphi}_2^2\\
x_2 &= l_3 s\varphi_3+(l_2-p)s\varphi_2\\
y_2 &= l_0-l_3 c\varphi_3-(l_2-p)c\varphi_2
\end{aligned}
$$

- Pak Lagrangeovy multiplikátory λ_1, λ_2 jsou rovny reakčním silám v rotačním kloubu B
- Ale pokud popis kinetické energie je

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+\frac{1}{2}I_{2T}\dot{\varphi}_2^2\\
x_2 &= l_1 s\varphi_1-p s\varphi_2\\
y_2 &= l_0-l_3 c\varphi_3-(l_2-p)c\varphi_2
\end{aligned}
$$

- pak Lagrangeovy multiplikátory λ_1, λ_2 nemají ŽÁDNOU přímou jednoduchou interpretaci

Fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů

- Pro detailní odvození správných interpretací Lagrangeových multiplikátorů v komlexních případech jako reakční momenty je nutné užít ekvivalenci pravých stran N-E a LEMT

$$Q_j + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial s_j^{(h)}} = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} + \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{G}_l}{\partial s_j^L} \delta s_j^L &= \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial (\mathbf{G}_l^L - \mathbf{G}_l^R)}{\partial s_j^L} \delta s_j^L = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{G}_l^L}{\partial s_j^L} \delta s_j^L = \\
&= \left(\mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_{1i}}{\partial \dot{s}_j^L} + \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{1i}}{\partial \dot{s}_j^L} \right) \delta s_j^L
\end{aligned}$$

Fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů - holonomně

Kinematic pair	Holonomic constraint G_l^L $h = 0$	Number of λ	Interpretation Newton $()^T \partial \mathbf{v}_{1i} / \partial \dot{s}_j^L$	Interpretation Euler $()^T \partial \omega_{1i} / \partial \dot{s}_j^L$	Interpretation as reaction force	Point of action frame
spherical	$\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{r}_{iA}$	3	λ	$\mathbf{r}_{iA} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}\lambda$	$\lambda = \mathbf{R}_{1,A}$	A, frame
revolute	$\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{r}_{iB}$	3	λ	$\mathbf{r}_{iB} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}\lambda$	$\lambda = \mathbf{R}_{1,B}$	B, frame
	$\mathbf{S}_{1i}\mathbf{z}^0_{i,iB}$	3(2)	0	$\mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{z}^0_{1,iB} \times \lambda) =$ $= \mathbf{z}_{i,iB} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}\lambda$	$\mathbf{z}^0_{1,iB} \times \lambda =$ $= \mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iB}[M_{x,B}, M_{y,B} 0]^T$	0, frame
prismatic	$(\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{r}_{iP}) \times (\mathbf{S}_{1i}\mathbf{z}^0_{i,iP}) =$ $= -\mathbf{Z}^0_{1,iP}(\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{r}_{iP})$	3(2)	$\mathbf{z}^0_{1,iP} \times \lambda$	$\mathbf{r}_{iP} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{z}^0_{1,iP} \times \lambda) +$ $+ \mathbf{z}^0_{i,iP} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{r}_{1Pi} \times \lambda)$	$\mathbf{z}^0_{1,iP} \times \lambda = \mathbf{R}_{1,P}$ and a part of moment $M_{P,P}$	P, frame
	$\mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iP}$	3	0	$\mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{x}^0_{1,iP} \times \lambda)$ $\mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{y}^0_{1,iP} \times \lambda)$ $\mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{z}^0_{1,iP} \times \lambda)$	$\mathbf{x}^0_{1,iP} \times \lambda = \mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iP}[0, M_{y,P}, M_{z,P}]^T$ $\mathbf{y}^0_{1,iP} \times \lambda = \mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iP}[M_{x,P}, 0, M_{z,P}]^T$ $\mathbf{z}^0_{1,iP} \times \lambda = \mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iP}[M_{x,P}, M_{y,P}, 0]^T$	0, frame
cylindrical	$(\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{r}_{iV}) \times (\mathbf{s}_{1i}\mathbf{z}^0_{i,iV}) =$ $= -\mathbf{Z}^0_{i,iV}(\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{r}_{iV})$	3(2)	$\mathbf{z}^0_{1,iV} \times \lambda$	$\mathbf{r}_{iV} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{z}^0_{1,iV} \times \lambda) +$ $+ \mathbf{z}^0_{i,iV} \times \mathbf{S}_{1i}(\mathbf{r}_{1,Vi} \times \lambda)$	$\mathbf{z}^0_{1,iV} \times \lambda = \mathbf{R}_{1,V}$ and a part of moment $M_{V,V}$	V, frame
	$\mathbf{S}_{1i}\mathbf{z}^0_{i,iV}$	3(2)	0	$\mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{z}^0_{1,iV} \times \lambda)$	$\mathbf{z}^0_{1,iV} \times \lambda = \mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iV}[M_{x,V}, M_{y,V}, 0]^T$	0, frame
flat	$\mathbf{r}_{1Li}(\mathbf{S}_{1i}\mathbf{z}^0_{i,iL})^T$	1	$\mathbf{S}_{1i}\lambda\mathbf{z}^0_{i,iL}$	$-\mathbf{S}_{1i}^{-1}\mathbf{r}_{1i} \times \lambda\mathbf{z}^0_{i,iL}$	$\lambda = R_{z,L}$	origin of frame, flat KP
	$\mathbf{S}_{1i}\mathbf{z}^0_{i,iL}$	3(2)	0	$\mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{z}^0_{1,iL} \times \lambda)$	$\mathbf{z}^0_{1,iL} \times \lambda = \mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iL}[M_{x,L}, M_{y,L}, 0]^T$	0, frame

Fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů - neholonomně

Kinematic pair	Nonholonomic constraint G_i^L $h=1$	Number of λ	Interpretation Newton $()^T \partial \mathbf{v}_{1i} / \partial \dot{s}_j^L$	Interpretation Euler $()^T \partial \omega_{1i} / \partial \dot{s}_j^L$	Interpretation as reaction force	Point of action, coordinate system
spherical	$\mathbf{v}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{\Omega}_{1i}\mathbf{r}_{iA}$	3	λ	$\mathbf{r}_{iA} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}\lambda$	$\lambda = \mathbf{R}_{1,A}$	A, frame
revolute	$\mathbf{v}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{\Omega}_{1i}\mathbf{r}_{iB}$	3	λ	$\mathbf{r}_{iB} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}\lambda$	$\lambda = \mathbf{R}_{1,B}$	B, frame
	$\omega_{1Bi\|x,y}$ $(\mathbf{S}_{1j}\mathbf{S}_{jB})^{-1}(\mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iB})\omega_{1Bi\|x,y}$	2 2	0 0	$\mathbf{S}_{iB}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$ $\mathbf{S}_{1i}^{-1}\mathbf{S}_{1j}\mathbf{S}_{jB}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$	$\lambda_x = M_{x,Bi}$ $\lambda_y = M_{y,Bi}$ $\lambda_x = M_{x,Bj}$ $\lambda_y = M_{y,Bj}$	0, revolute KP, B_i 0, revolute KP, B_j
prismatic	$\mathbf{S}_{1Pi}^{-1}\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{S}_{iP}^{-1}\mathbf{\Omega}_{1i}\mathbf{S}_{1i}^{-1}\mathbf{r}_{1i,x,y}$	2	$\mathbf{S}_{1Pi}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$	$-\mathbf{S}_{1i}^{-1}(\mathbf{r}_{1i} \times \mathbf{S}_{1Pi}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T)$	$\lambda_x = R_{x,P}$ $\lambda_y = R_{y,P}$	origin of frame, prismatic KP
	$\mathbf{S}_{iP}^{-1}\omega_{1i}$	3	0	$\mathbf{S}_{iP}\lambda$	$\lambda = M_{P,P}$	0, prismatic KP
cylindrical	$\mathbf{S}_{1Vi}^{-1}(\mathbf{v}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{\Omega}_{1i}\mathbf{r}_{iV})\|_{x,y}$ $\mathbf{S}_{1Vj}^{-1}(\mathbf{v}_{1Vi} + \mathbf{S}_{1Vi}\mathbf{\Omega}_{11Vi} \cdot$ $\cdot \mathbf{S}_{1Vj}^{-1}(\mathbf{r}_{1Vi} - \mathbf{r}_{1Vi}))\|_{x,y}$	2 2	$\mathbf{S}_{1Vi}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$ $\mathbf{S}_{1Vj}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$	$\mathbf{r}_{iV} \times \mathbf{S}_{iV}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$ $\mathbf{r}_{iV} \times \mathbf{S}_{1i}^{-T}\mathbf{S}_{1Vj}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T +$ $+\mathbf{S}_{1i}^{-1}((\mathbf{r}_{1Vj} - \mathbf{r}_{1Vi}) \cdot$ $\cdot \mathbf{S}_{1Vj}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T)$	$\lambda_x = R_{x,Vi}$ $\lambda_y = R_{y,Vi}$ $\lambda_x = R_{x,Vj}$ $\lambda_y = R_{y,Vj}$	V_i, cylindrical KP, V_i V_j, cylindrical KP, V_j
	$\omega_{1Vi\|x,y}$ $(\mathbf{S}_{1j}\mathbf{S}_{jV})^{-1}(\mathbf{S}_{1i}\mathbf{S}_{iV})\omega_{1Vi\|x,y}$	2 2	0 0	$\mathbf{S}_{iV}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$ $\mathbf{S}_{1i}^{-T}\mathbf{S}_{1j}\mathbf{S}_{jV}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$	$\lambda_x = M_{x,Vi}$ $\lambda_y = M_{y,Vi}$ $\lambda_x = M_{x,Vj}$ $\lambda_y = M_{y,Vj}$	0, cylindrical KP, V_i 0, cylindrical KP, V_j
flat	$\mathbf{S}_{1Lj}^{-1}\mathbf{v}_{1Li\|z}$ $\mathbf{S}_{1Lj}^{-1}(\mathbf{v}_{1Li} + \mathbf{S}_{1Li}\mathbf{\Omega}_{1Li}\mathbf{S}_{1Li}^{-1} \cdot$ $\cdot(\mathbf{r}_{1Lj} - \mathbf{r}_{1Li}))\|_z$	1 1	$\mathbf{S}_{1Li}[0, 0, \lambda]^T$ $\mathbf{S}_{1Lj}[0, 0, \lambda]^T$	$\mathbf{r}_{iL} \times \mathbf{S}_{iL}[0, 0, \lambda]^T$ $\mathbf{r}_{iL} \times \mathbf{S}_{1i}^{-1}\mathbf{S}_{1Lj}[0, 0, \lambda]^T +$ $+\mathbf{S}_{1i}^{-1}((\mathbf{r}_{1Lj} - \mathbf{r}_{1Li}) \cdot$ $\cdot \mathbf{S}_{1Lj}[0, 0, \lambda]^T)$	$\lambda = R_{z,Li}$ $\lambda = R_{z,Lj}$	L_i, flat KP, L_i L_j, flat KP, L_j
	$\omega_{1Li\|x,y}$ $\mathbf{S}_{1Lj}^{-1}\mathbf{S}_{1Li}\omega_{1Li\|x,y}$	2 2	0	$\mathbf{S}_{1Lj}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$ $\mathbf{S}_{1i}^{-1}\mathbf{S}_{1Lj}[\lambda_x, \lambda_y, 0]^T$	$\lambda_x = M_{x,Li}$ $\lambda_y = M_{y,Li}$ $\lambda_x = M_{x,Lj}$ $\lambda_y = M_{y,Lj}$	0, flat KP, L_i 0, flat KP, L_j

Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

- Všechny mechanické systémy jsou v realitě podajné
- Proto sestavení modelu obsahujícího poddajnosti je nutné
- Existuje několik konkurenčních přístupů k sestavení pohybových rovnic soustavy poddajných těles

Pohybové rovnice soustavy poddajných těles – tradiční přístupy

Metoda konečných prvků

- Poddajná tělesa
- Malé pohyby
- Statická & Modální analýza

Metoda soustav mnoha těles

- Tuhá tělesa
- Velké pohyby
- Analýza přechodového děje

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_{ext}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^{T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{q},t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

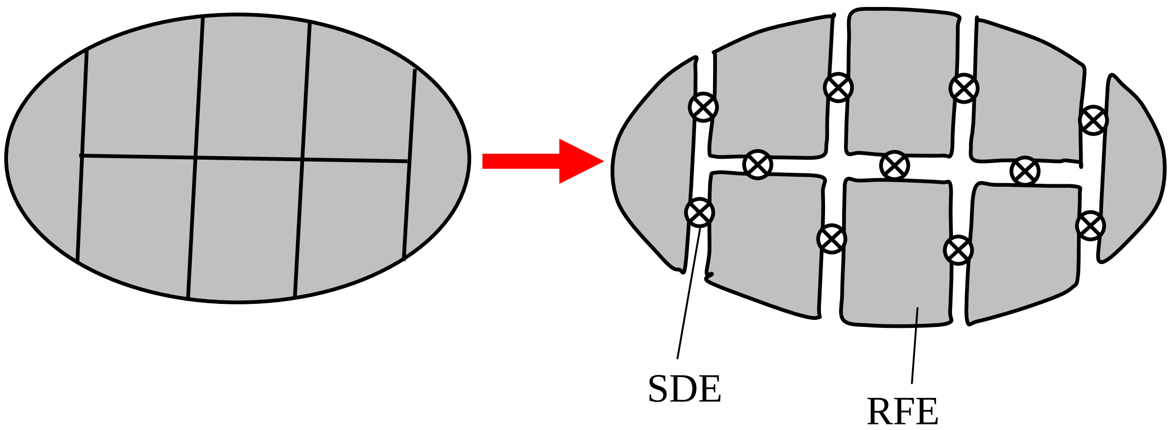
Jak je spojit?

Pohybové rovnice soustavy poddajných těles – alternativní přístupy

- Modelování jako tuhá podtělesa spojená koncentrovanými poddajnostmi (tzv. Rigid Finite Elements)
- Metoda absolutních souřadnic uzlů MKP sítě (tzv. Absolute Nodal Coordinates)
- Metoda popisu poddajnosti jako superpozice malých pohybů frekvenčních a deformačních módů přičtených k velkému pohybu tuhého tělesa

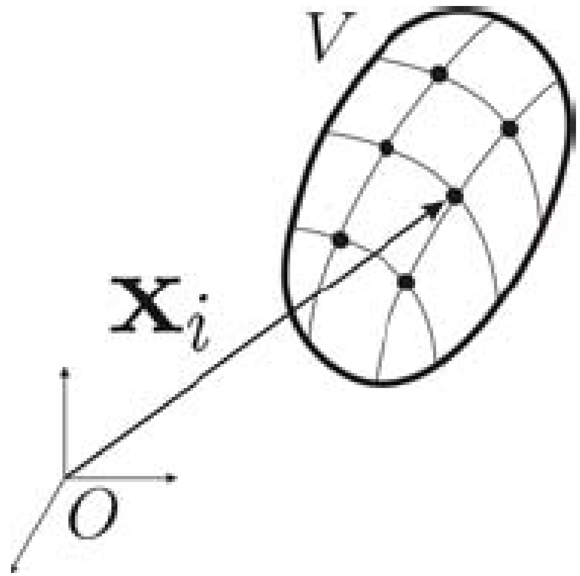
Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

- Tuhá podtělesa spojená koncentrovanými poddajnostmi
- Intuitivní přístup -> systematický přístup jako RFE



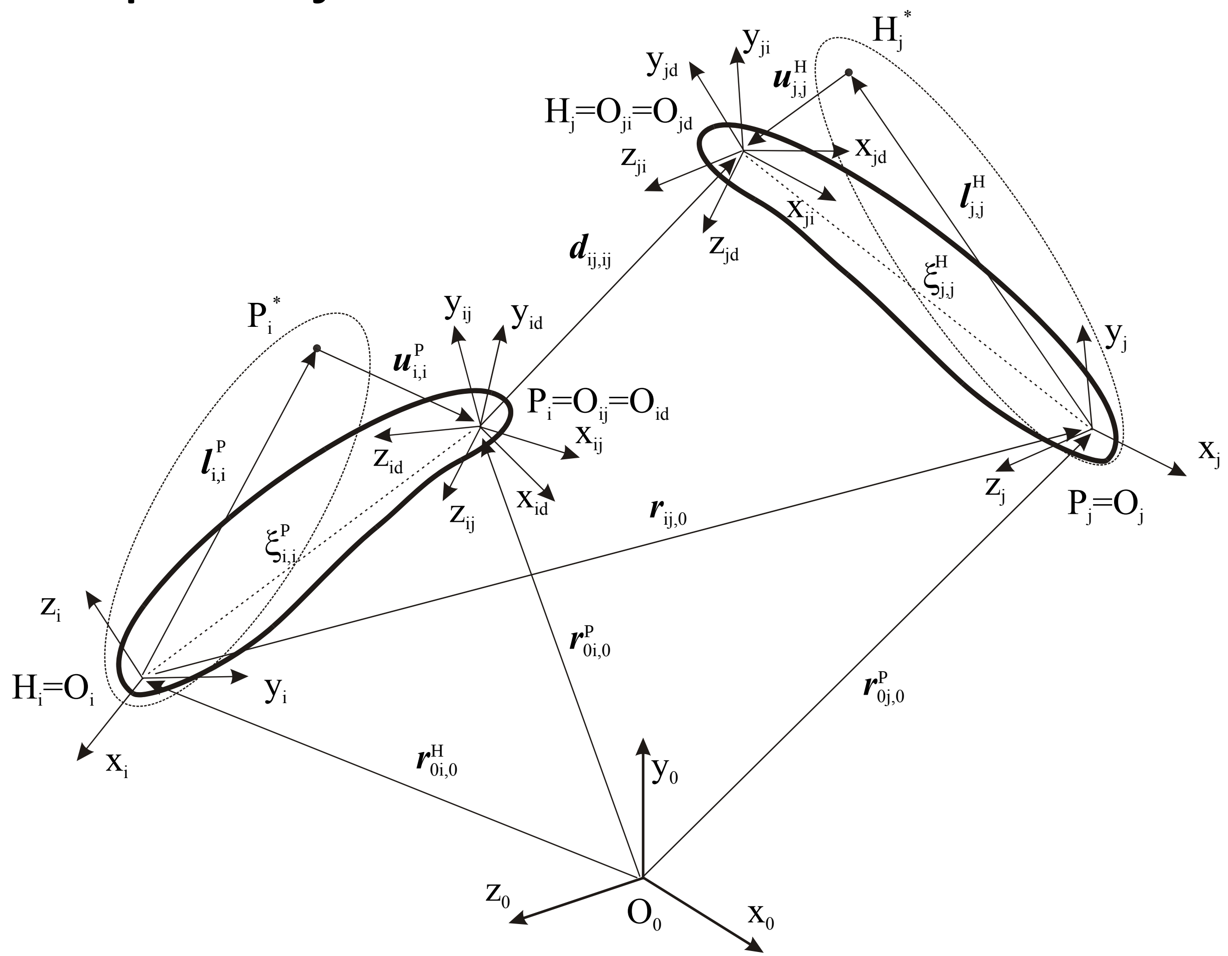
Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

- Absolutní souřadnice uzlů MKP sítě
- Žádný rozdíl mezi tuhými a poddajnými tělesy

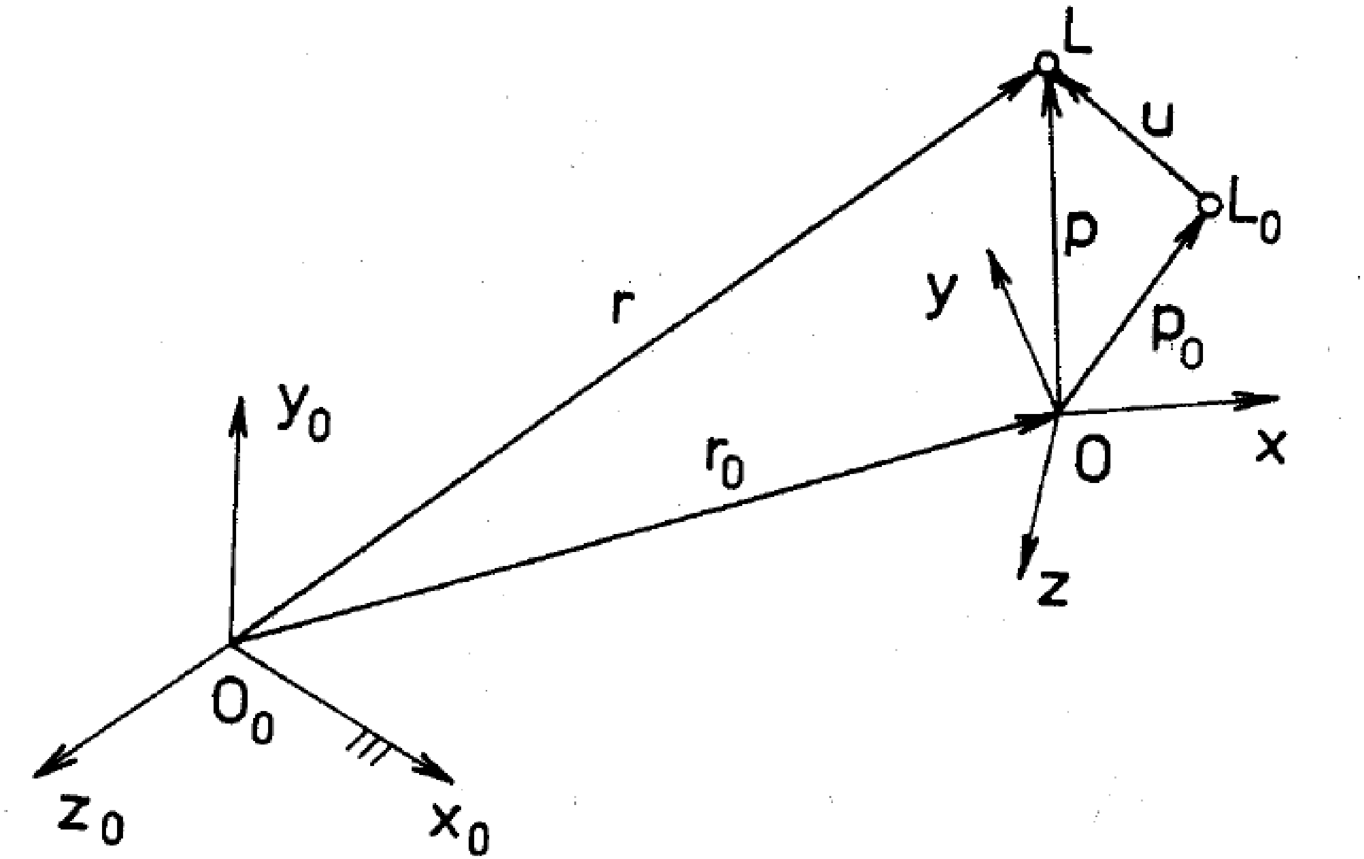


Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

- Tuhé + poddajné souřadnice



Pohybové rovnice soustavy poddajných těles



Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v}^e$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{N}\mathbf{V}^e$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{S}\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{S}(\mathbf{p}_0 + \mathbf{u}) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{S}\mathbf{N}\mathbf{V}^e + \mathbf{S}\mathbf{N}\mathbf{v}^e$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{S}}\mathbf{N}(\mathbf{V}^e + \mathbf{v}^e) + \mathbf{S}\mathbf{N}\dot{\mathbf{v}}^e = \\ &= \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{N}(\mathbf{V}^e + \mathbf{v}^e) + \mathbf{S}\mathbf{N}\dot{\mathbf{v}}^e \end{aligned}$$

Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

$$\mathbf{S\Omega N V}^e = \mathbf{S\Omega z} = -\mathbf{SZ}\omega = -\mathbf{SZD}\dot{\varphi} = \mathbf{B}^e\dot{\varphi}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{NV}^e, \qquad \omega = \mathbf{D}\dot{\varphi}, \qquad \mathbf{B}_1 = -\mathbf{SZ},$$

$$\mathbf{S\Omega N V}^e = \mathbf{B}_1\omega = \mathbf{B}^e\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \lceil \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z \rceil$$

$$\dot{\mathbf{r}} = [\mathbf{E}, \mathbf{B}^e, \mathbf{SN}] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_0 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\mathbf{v}}^e \end{bmatrix}$$

$$T^e = \frac{1}{2}\int_{(m^e)} \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dm = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{e^T}\mathbf{M}^e\dot{\mathbf{q}}^e$$

$$\dot{\mathbf{q}}^e = \lceil \dot{\mathbf{r}}_0, \dot{\varphi}, \mathbf{v}^e \rceil$$

Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

$$\mathbf{M}^e = \int_{(m^e)} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{B}^e & \mathbf{SN} \\ & \mathbf{B}^{e^T}\mathbf{B}^e & \mathbf{B}^{e^T}\mathbf{SN} \\ \text{sym} & & \mathbf{N}^T\mathbf{N} \end{bmatrix} \mathrm{d}m$$

$$T_b = \sum_e T^e = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_b^T \mathbf{M}_b \dot{\mathbf{q}}_b$$

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} m_b\mathbf{E} & \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{SN} \\ & \hat{\mathbf{B}} & \bar{\bar{\mathbf{B}}} \\ \text{sym} & & \mathbf{M}_v \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_b = [\dot{\mathbf{r}}_0, \dot{\varphi}, \dot{\mathbf{v}}]$$

Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

$$\Pi^e = \frac{1}{2}\mathbf{v}^{e^T}\mathbf{K}^e\mathbf{v}^e$$

$$\Pi_b = \sum_e \Pi^e = \frac{1}{2}\mathbf{q}_b^T\mathbf{K}_b\mathbf{q}_b$$

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & \mathbf{K}_v \end{bmatrix}$$

Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F}_C^{e^T}\delta\mathbf{r}_C = \mathbf{F}_C^{e^T}(\delta\mathbf{r}_0 + \mathbf{B}^e\delta\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{S}\mathbf{N}\delta\mathbf{v}^e) = \\ &= [\mathbf{F}_C^{e^T}, \mathbf{F}_C^{e^T}\mathbf{B}^e, \mathbf{F}_C^{e^T}\mathbf{S}\mathbf{N}]\begin{bmatrix}\delta\mathbf{r}_0\\ \delta\boldsymbol{\varphi}\\ \delta\mathbf{v}^e\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^e &= [\sum_C \mathbf{F}_C^{e^T}, \sum_C \mathbf{F}_C^{e^T}\mathbf{B}^e, \sum_C \mathbf{F}_C^{e^T}\mathbf{S}\mathbf{N}] = \\ &= [\mathbf{Q}_r^e, \mathbf{Q}_\varphi^e, \mathbf{Q}_{v^e}^e]\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_b = [\mathbf{Q}_r, \mathbf{Q}_\varphi, \mathbf{Q}_v]$$

$$\mathbf{Q}_r = \sum_e \mathbf{Q}_r^e, \qquad \mathbf{Q}_\varphi = \sum_e \mathbf{Q}_\varphi^e, \qquad \mathbf{Q}_v = \sum_e \mathbf{Q}_{v^e}^e$$

Pohybové rovnice soustavy poddajných těles

$$\mathbf{M}_b\ddot{\mathbf{q}}_b + \dot{\mathbf{M}}_b\dot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{K}_b\mathbf{q}_b + \mathbf{c}_b = \mathbf{Q}_b$$

$$\mathbf{c}_b = [0, \mathbf{c}_{b\varphi}, \mathbf{c}_{bv}]$$

$$\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{r}_{iA} - \mathbf{r}_{1j} - \mathbf{S}_{1j}\mathbf{r}_{jA} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{S}_{1i}\mathbf{N}(\mathbf{V}^e + \mathbf{v}^e)_{A_i} - \mathbf{r}_{1j} - \mathbf{S}_{1j}\mathbf{N}(\mathbf{V}^e + \mathbf{v}^e)_{A_j} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Psi}\boldsymbol{\xi}$$

Řešení inverzní dynamické úlohy

- Velký význam pro robotiku
- Iniciovalo vývoj efektivních formalismů
- Řešení zlepšeno 5x
- Standardně pro robotické systémy se sériovou strukturou
- Pro robotické systémy s paralelní strukturou je podstatně obtížnější a je stále předmětem výzkumu

Řešení inverzní dynamické úlohy

- Rekurzivní formalismus standardní

$$\mathbf{f}_{i-1} = \mathbf{A}_{i-1}^{-1}(\mathbf{b}_{i-1} - \mathbf{A}_i\mathbf{f}_i), \qquad i = 2, 3, \dots, n+1$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{i+1,1,i+1} &= \mathbf{S}_{i+1,i}\mathbf{v}_{i,1i} + \boldsymbol{\Omega}_{i+1,i,i+1}\mathbf{r}_{i,i+1} \\
\boldsymbol{\omega}_{i+1,1,i+1} &= \mathbf{S}_{i+1,i}\boldsymbol{\omega}_{i,1i} + \boldsymbol{\omega}_{i+1,i,i+1} \\
\mathbf{a}_{i+1,1,i+1} &= \mathbf{S}_{i+1,i}\mathbf{a}_{i,1i} + \mathbf{S}_{i+1,i}\boldsymbol{\Omega}_{i+1,i,i+1}\mathbf{v}_{i,1i} + \mathcal{A}_{i+1,1,i+1}\mathbf{r}_{i,i+1} \\
\boldsymbol{\alpha}_{i+1,1,i+1} &= \mathbf{S}_{i+1,i}\boldsymbol{\alpha}_{i,1i} + \boldsymbol{\alpha}_{i+1,i,i+1}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{d}}_j & \mathbf{E} \end{bmatrix} (-\mathbf{I}_j^S \underline{\mathbf{a}}_j^S + \mathbf{F}_j^S + \beta_j^S)$$

Řešení inverzní dynamické úlohy

- Rekurzivní formalismus z přímé dynamiky

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \chi$$

$$\chi = (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) = -\left[\sum_i \left(\left(\frac{\partial \mathbf{v}_i^H}{\partial \dot{s}_j} \right)^T (-\mathbf{I}_i^H \mathbf{a}_i^H + \mathbf{F}_i^H + \beta_i^H) \right) \right]$$

Řešení inverzní dynamické úlohy

- Vývoj efektivity řešení
- Obecně sériový robot n kloubů (násobení):
- n^4, 412n-577 (LE), 150n-48 (N-E), 130n-68 (A), 97n-112 (C)
- Stanford arm: 646 (N-E), 298 (LE), 171 (C)