Eigensystem Realization Algorithm – ERA

Identifikace systémů

Markovovy parametry

Motivace

- Kvalita řízení závisí na přesnosti použitého modelu
- Analytické modely, např. z MKP, nemusí být dostatečně přesné, což může stačit pro simulace, ale ne pro reálný sysém.
- Lepší (reálný) model ➔ identifikace z naměřených dat
- ERA – Eigensystem Realization Algorithm
- Není třeba nastavovat žádné parametry podle použitého modelu
- Určuje potřebný řád systému
- Příliš nízký řád ➔ nepostihne část dynamiky
- Příliš vysoký řád ➔ výpočtově náročné, prostřednictvím zpětné vazby může vnést nežadoucí dynamiku

Diskrétní systém

- Digitální I/O záznamy → diskrétní systém

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i,$$
$$y_i = Cx_i + Du_i.$$

- s … počet vstupů, r … počet výstupů, p … řád systému

- Matice řiditelnosti (dosažitelnosti) a pozorovatelnosti:

$$\mathcal{C}_p = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{p-1}B \end{bmatrix} \qquad \mathcal{O}_p = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}$$

- Gramián řiditelnosti a pozorovatelnosti:

$$W_c(p) = \mathcal{C}_p \mathcal{C}_p^T \qquad W_o(p) = \mathcal{O}_p \mathcal{O}_p^T$$

Markovovy parametry

- Impulzová odezva: $u_0 = 1\ ,\ u_i = 0 \qquad i = 1,2,3,4,\dots.$
- Počáteční podmínky: $x_0 = 0$
- ➔

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0,\\
y_0 &= Du_0 = D,\\
x_1 &= Ax_0 + Bu_0 = B,\\
y_1 &= Cx_1 + Du_1 = CB,\\
x_2 &= Ax_1 + Bu_1 = AB,\\
y_2 &= Cx_2 + Du_2 = CAB,\\
x_3 &= Ax_2 + Bu_2 = A^2B,\\
y_3 &= Cx_3 + Du_3 = CA^2B,\\
&\vdots\\
x_k &= Ax_{k-1} + Bu_k = A^{k-1}B,\\
y_k &= Cx_k + Du_k = CA^{k-1}B.
\end{aligned}
$$

Markovovy parametry

- Impulzová odezva: $u_0 = 1$, $u_i = 0$ $\quad i = 1,2,3,4,\dots.$
- Počáteční podmínky: $x_0 = 0$
- ➔

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0, \\
y_0 &= Du_0 = D, \\
x_1 &= Ax_0 + Bu_0 = B, \\
y_1 &= Cx_1 + Du_1 = CB, \\
x_2 &= Ax_1 + Bu_1 = AB, \\
y_2 &= Cx_2 + Du_2 = CAB, \\
x_3 &= Ax_2 + Bu_2 = A^2B, \\
y_3 &= Cx_3 + Du_3 = CA^2B, \\
&\vdots \\
x_k &= Ax_{k-1} + Bu_k = A^{k-1}B, \\
y_k &= Cx_k + Du_k = CA^{k-1}B.
\end{aligned}
$$

Obecně:

v čase $t = k\Delta t$

je odezva $y_k = CA^{k-1}B$

Markovovy parametry

- Impulzová odezva: $u_0 = 1$, $u_i = 0$ $\quad i = 1,2,3,4,\ldots.$
- Počáteční podmínky: $x_0 = 0$
- ➔

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0,\\
y_0 &= Du_0 = D,\\
x_1 &= Ax_0 + Bu_0 = B,\\
y_1 &= Cx_1 + Du_1 = CB,\\
x_2 &= Ax_1 + Bu_1 = AB,\\
y_2 &= Cx_2 + Du_2 = CAB,\\
x_3 &= Ax_2 + Bu_2 = A^2B,\\
y_3 &= Cx_3 + Du_3 = CA^2B,\\
&\vdots\\
x_k &= Ax_{k-1} + Bu_k = A^{k-1}B,\\
y_k &= Cx_k + Du_k = CA^{k-1}B.
\end{aligned}
$$

<u>Obecně:</u>

v čase $t = k\Delta t$

je odezva $y_k = CA^{k-1}B$

Markovovy parametry

$$\boxed{h_k = CA^{k-1}B}$$

$k = 1,2,3,\ldots$

Markovovy (matice) parametry

$$h_k = CA^k B$$

- i-tý sloupec = odezva v čase $k\Delta t$ na jednotkový impuls na i-tém vstupu
- Často lze přímo změřit nebo získat z I/O měření
- Hankelovy matice

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_p \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_p & h_{p+1} & \cdots & h_{2p-1} \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \cdots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \cdots & h_{2p} \end{bmatrix}$$

Markovovy (matice) parametry

$$h_k = CA^k B$$

- i-tý sloupec = odezva v čase $k\Delta t$ na jednotkový impuls na i-tém vstupu
- Často lze přímo změřit nebo získat z I/O měření
- Hankelovy matice

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_p \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_p & h_{p+1} & \cdots & h_{2p-1} \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \cdots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \cdots & h_{2p} \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \mathcal{O}_p \mathcal{C}_p \qquad H_2 = \mathcal{O}_p A \mathcal{C}_p$$

Identifikace

- Při identifikaci nemáme $\mathcal{C}_p$ a $\mathcal{O}_p$, ale máme H_1, H_2
- Zavedení matic P,Q

$$H_1 = PQ \qquad\qquad H_2 = PAQ$$

- Jestli mají P,Q plnou hodnost, tak platí:

$$A = P^+ H_2 Q^+$$

- Pokud takto získáme A:

  - B určíme jako první sloupeček z Q

  - C určíme jako první řádek z P

Identifikace

- Dekompozice H1 není jednoznačná
- Pro vyvážený stavový model je vhodný SVD rozklad

$$H_1 = V\Gamma^2 U^T \qquad \Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$$

$$UU^T = I$$

$$V^T V = I$$

$$Q = \Gamma U^T \qquad W_c(p) = QQ^T = \Gamma^2$$

$$P = V\Gamma \qquad W_o(p) = P^T P = \Gamma^2;$$

- Vzniklý systém, je řiditelný a pozorovatelný
- Hůře pozorovatelné stavy stejně vynecháme (šum)

→ Tím je určen potřebný řád systému