PAL cv. 1

September 22, 2021

Ověřte, že platí $(\forall n \in \mathbf{N})\ (n > 4 \implies n^2 - 2n > 0.5n^2)$. Graf funkce $f(n) = 0.5n^2$ pro $n > 4$ tedy leží vždy pod grafem funkce $g(n) = n^2 - 2n$ a navíc rozdíl $g(n) - f(n)$ roste do nekonečna s rostoucím n. Dokažte pomocí definice množiny $O(f(n))$, že i přesto platí $g(n) \in O(f(n))$.

Symbolem *lg* značíme logaritmus o základu 2. Uspořádejte podle řádu růstu uvedené funkce poměnné n. Zdůvodněte pořadí každých dvou sousedních funkcí v tomto uspořádání.

- $\log n!$
- $(\sqrt{2})^{\log n}$
- $2^{\log \log n}$
- $4^{\log n}$
- $\sqrt{\log n}$
- $n \log n^2$
- $n \log n$
- $(\log n)^2$

Algoritmus A projde celým polem délky N a prvek s indexem k zpracuje za $c \times k$ milisekund. Konstanta c je stále stejná. Určete asymptotickou složitost zpracování celého pole.

Algoritmus P projde celým dvourozměrným polem velikosti $N \times N$ a prvek na pozici (k, m) zpracuje za

A) $c \times (k + m)$

B) $c \times k \times m$
milisekund. Konstanta c je stále stejná, $1 \leq k \leq N$, $1 \leq m \leq N$. Určete asymptotickou složitost zpracování celého pole v případě A) a B).

Popište jednotlivé reprezentace orientovaného grafu v paměti počítače, které znáte.

V seznamu je uložena množina všech hran grafu, každá hrana je dvojice $(uzel, uzel)$. Víme, že graf má N uzlů, že je nesouvislý a že obsahuje komponentu K, která má více než $N/2$ uzlů. Máme vytvořit nový seznam obsahující (ve stejném formátu) právě všechny hrany komponenty K. Popište, jak co nejefektivněji budete tuto úlohu řešit a jaká bude asymptotická složitost vašeho řešení. Pořadí hran v obou seznamech není předepsáno a může být libovolné.

Předpokládejte, že máte k dispozici neorientovaný graf $G = (V, E)$, který je reprezentován seznamem hran. Seznam hran není nijak uspořádán a přístup k jeho jednotlivým prvkům je pouze sekvenční (k prvkům nelze přistupovat pomocí indexu). Určete, jaká je za těchto okolností asymptotická složitost algoritmů BFS a DFS.

Když má daný graf n uzlů a $O(n^2)$ hran, potom asymptotická složitost algoritmu DFS je $O(n^2)$, za předpokladu, že během provádění algoritmu máme přístup v konstantním čase ke každému právě zpracovávanému uzlu a ke každé právě zpracovávané hraně. Určete, jaká bude asymptotická složitost DFS, pokud doba přístupu ke každému uzlu bude ve třídě $O(n^{\frac{1}{2}})$ a doba také přístupu ke každé hraně bude ve třídě $O(n^{\frac{1}{2}})$.

Máme najít kostru grafu, nikoli nutně minimální, s tím, že je předepsáno, že cena každé hrany hledané kostry musí ležet v daném intervalu $< c_1, c_2 >$. Je nutno použít algoritmus pro hledání minimální kostry nebo stačí nějaký jednodušší postup?