
PAL: 11. cvičení

Tomáš Sieger

3. 12. 2020

Opakování z minula

Př. 10/4: lin. kongruenční generátor náh. čísel

Ověřte, zda lineární kongruenční generátor s danými parametry má maximální možnou délku periody.

a) $x_{n+1} = (91x_n + 49) \bmod 600,$

b) $x_{n+1} = (8x_n + 80) \bmod 49,$

c) $x_{n+1} = (37x_n + 55) \bmod 144,$

d) $x_{n+1} = (99x_n + 81) \bmod 113.$

Př. 10/5: perioda Lehmerova generátoru náh. čísel

Určete délku periody v Lehmerově generátoru, který je dán předpisem $x_{n+1} = ((M - 1) \cdot x_n) \bmod M$, kde M je prvočíslo.

Př. 10/6: počet prvočísel

Určete, kolik přibližně prvočísel leží v intervalu:

a) $\langle 0, 10^9 \rangle$,

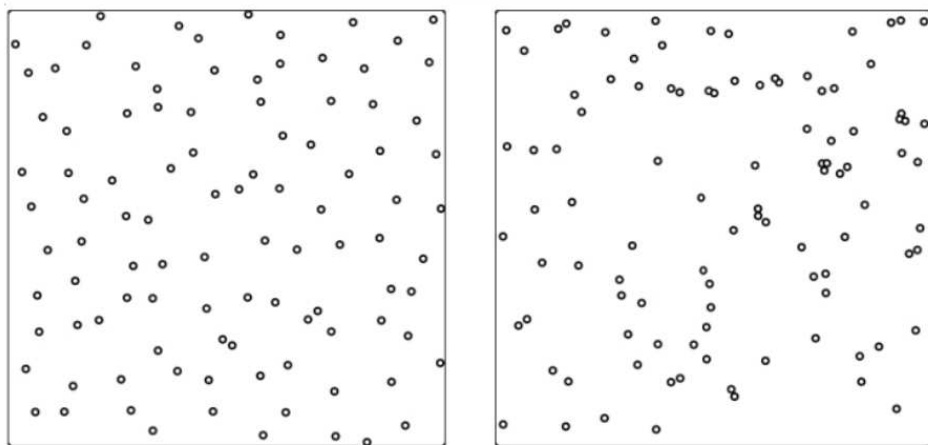
b) $\langle 10^9, 2 \cdot 10^9 \rangle$,

c) $\langle 2 \cdot 10^9, 3 \cdot 10^9 \rangle$.

Náhodná čísla. Prvočísla.
Modulární umocňování.

Př. 10/1: náhodné body

Máme dva obrázky - pokaždé jde o čtverec se 100 body uvnitř. V jednom případě byly souřadnice každého bodu generovány nezávisle a pseudonáhodně, ve druhém případě byly generovány analogicky, ale navíc byly souřadnice systematicky modifikovány (nám neznámým) způsobem. Odhadněte, kterého obrázku se týkají dodatečné úpravy a zdůvodněte svůj odhad.



Př. 10/2: náhodná čísla

Máte jednu hrací kostku. Popište, jak využijte házení kostkou tak, abyste měli generátor náhodných celých čísel v rozmezí $0 \dots 10$. Všechna čísla $0, 1, 2, \dots, 10$ musí být generována se stejnou pravděpodobností.

Př. 10/3: náhodné uspořádání

Vysvětlete, jak pomocí generátoru náhodných čísel zamícháte do náhodného pořadí seřazené pole čísel. Akce musí proběhnout v čase úměrném délce pole.

Př. 10/7: poloprvočísla

Řekneme, že přirozené číslo je poloprvočíslu, pokud je buď prvočíslem nebo celou mocninou prvočísla. Popište modifikaci Eratosthenova síta, která bude generovat právě poloprvočísla. Napište pseudokód.

Př. 10/8: skoroprvočísla

Jako skoroprvočísla označíme právě ta přirozená čísla, která jsou součinem dvou různých prvočísel. Popište modifikaci Eratosthenova síta, která bude generovat skoroprvočísla. Napište pseudokód.

Př. 10/10: prvočísla v intervalu

Určete, jaký je maximální možný počet prvočísel v kterémkoli z intervalů $\langle 30k, 30k + 29 \rangle, k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Př. 10/11a: největší společný dělitel

Vypočtete největší společný dělitel

a) $GCD(220, 284)$,

b) $GCD\left(\binom{30}{10}, \binom{31}{9}\right)$,

c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

Př. 10/11b: největší společný dělitel

Vypočtete největší společný dělitel

a) $GCD(220, 284)$,

b) $GCD\left(\binom{30}{10}, \binom{31}{9}\right)$,

c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

Př. 10/11c: největší společný dělitel

Vypočtete největší společný dělitel

a) $GCD(220, 284)$,

b) $GCD\left(\binom{30}{10}, \binom{31}{9}\right)$,

c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

Př. 10/12: modulární umocňování

Vypočtete $18^{89} \bmod 11$.

Př. 10/14: modulární umocňování - kód

Uvedený kód počítá celočíselnou mocninu x^n . Popište, jak jej upravíte, aby počítal $x^n \bmod m$, pro kladné celé m . Minimalizujte riziko přetečení.

```
BinPower(int x, int n) {
    int r = 1, y = x;
    while (n > 1) {
        if (n % 2 == 1) r *= y;
        y *= y;
        n /= 2;
    }
    return r*y;
}
```

Skip list. B-stromy.

Př. 11/1: skip list - konstrukce

Sestavte skip list, který je nejprve prázdný a dále do něj vkládáte dané klíče v uvedeném pořadí. Číslo za klíčem v závorce uvádí úroveň (level) klíče, tj. kolikrát byla hozena mince, než padl rub (včetně rubu): 16(3), 23(2), 18(2), 5(2), 15(1), 19(1), 33(1), 11(2), 21(2), 4(1), 22(2), 6(2), 17(4), 10(1), 9(1), 28(4).

Př. 11/2: skip list - sloučení

Mějme dvě datové struktury skip list délky N . Máme navrhnout efektivní algoritmus, který tyto dva seznamy spojí do seznamu jediného o délce $2N$. Jaká bude jeho asymptotická složitost?

Př. 11/3: skip list - obrácení

Je možno obrátit pořadí prvků ve struktuře skip list (z vzestupného uspořádání klíčů přejít na sestupné) v čase asymptoticky menším než $O(N \log(N))$?

Př. 11/4: skip list - extractMin

Formulujte operaci `extractMin` ve struktuře skip list a popište, jak lze potom skip list použít jako prioritní frontu. Bude efektivita jednotlivých operací asymptoticky srovnatelná s binární haldou?

Př. 11/5: skip list - decreaseKey

Navrhněte efektivní operaci decreaseKey ve struktuře skip list.

Př. 11/6: skip list - jiná úroveň

Při implementaci struktury skip list se stalo, že úroveň každého uzlu v operaci Insert je určena jako náhodné číslo z intervalu $[1, \lceil \log_2 N \rceil]$, přičemž se jedná o rovnoměrné rozložení a N je vždy aktuální počet prvků v seznamu.

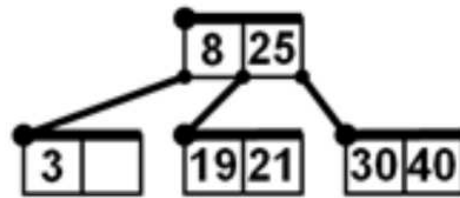
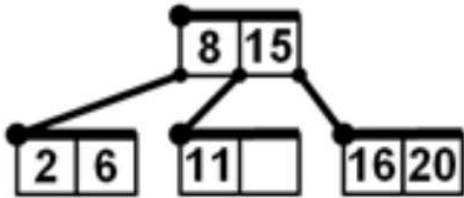
Odhadněte (pro velké N), nakolik se zhorší asymptotická složitost operací Find/Insert/Delete v této struktuře.

Př. 11/7: skip list - součet úrovní

Profesor Velký tvrdí, že v průměrném případě ve struktuře skip list o délce N je součet všech hodnot prvek.level úměrný hodnotě $N \log(N)$. Profesor Malý tvrdí, že tento součet je úměrný pouze hodnotě N . Profesor Různý tvrdí, že mohou nastávat oba případy a že záleží na datech. Rozhodněte akademický spor.

Př. 11/11: B stromy

Do B-stromu znázorněného na levém resp. pravém obrázku vložíme postupně klíče 14, 10, resp. 7, 5. Jaké klíče pak bude obsahovat kořen stromu?



Př. 11/12: izomorfní B stromy

Dva prázdné B-stromy řádu 1 (max. 2 klíče v uzlu) jsou izomorfní. Neprázdný B-strom B_1 řádu 1 s kořenem K_1 je izomorfní s neprázdným B-stromem B_2 řádu 1 s kořenem K_2 právě tehdy, když zároveň platí 1. a 2.:

1. K_1 obsahuje stejný počet klíčů jako K_2
2. Levý podstrom K_1 je izomorfní s levým podstromem K_2 , pravý podstrom K_1 je izomorfní s pravým podstromem K_2 a prostřední podstrom K_1 , pokud existuje, je izomorfní s prostředním podstromem K_2 .

Určete počet navzájem neizomorfních B-stromů řádu 1 s A) 0, B) 1, C) 3, D) 4, E) 7 uzly.

Př. 11/14: konstrukce a destrukce B stromu

B-strom je řádu k , pokud každý jeho uzel, kromě kořene, musí obsahovat alespoň k klíčů a zároveň může obsahovat nejvýše $2k$ klíčů. Vybudujte B-strom řádu 1 tak, že do prázdného stromu vložíte v uvedeném pořadí klíče 25, 13, 37, 32, 40, 20, 22. Dále tento strom zrušte, a to tak, že jednotlivé klíče klíče odstraníte v pořadí 13, 25, 40, 22, 20, 37, 32. Nakreslete strom po každé operaci Insert a Delete.