
PAL: 3. cvičení

Tomáš Sieger

8. 10. 2020

Organizace

- stačí odevzdávat řešení úloh, netřeba zápisky
- práce ve skupinách
 - volba skupinek?
 - “podmístnosti” v BBB
 - sdílené poznámky
 - dotazy v chatu v hlavní místnosti

Opakování z minula

Př. 5. Převody grafových reprezentací



$$G = (V, E), \quad n = |V|$$

$$m = |E|$$

	A	B	C
A	0	1	0
B	1	0	1
C	0	1	0

I

	A	B	C
e ₁	1	1	0
e ₂	0	1	1

II

A → B
B → A, C
C → B

III

I → II

II → I

I → III

III → I

II → III

III → II

$O(n)$

$O(m)$

$O(n^2)$

$O(nm)$

$O(n^2m)$

$O(n^2 + m)$

$O(n^2 + nm)$

$O(n^3)$

$O(n^4)$

Př. 3: zápas Prim vs. Kruskal

Uveďte asymptotickou složitost algoritmu hledání minimální kostry jednak Primova a jednak Kruskalova. Který z těchto algoritmů je asymptoticky rychlejší, za předpokladu, že počet hran grafu je čtyřnásobkem počtu uzlů?

Př. 4: hendikepovaný Kruskal

Předpokládejme, že vážený neorientovaný graf G je reprezentován svou váhovou maticí C . Určete, jaká bude asymptotická složitost Kruskalova algoritmu hledání minimální kostry za předpokladu, že doba přístupu ke každému prvku matice C je konstantní, ale zato doba každé jednotlivé operace Union i Find je vždy úměrná počtu uzlů v grafu G .

Př. 9: matice s podložkou

Předpokládejme, že graf je zadán maticí vah jednotlivých hran. Význačná hodnota v této matici (např. nekonečno, minimální/maximální hodnota číselného typu, NaN apod) indikuje, že mezi příslušnými vrcholy hrana neexistuje. Modifikujte Jarníkův-Primův algoritmus tak, aby nezávisel na počtu hran v grafu a měl složitost $O(n^2)$, kde n je počet uzlů grafu.

Grafy u zase grafy

Př. 3/1: dezorientovaná kružnice

Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu?

Př. 3/2: bipartitní graf

Pro která m, n je úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ Hamiltonovský?

Př. 3/3: Eulerovský cyklus

Kolika způsoby lze do kružnice délky 20 vložit další tři hrany tak, aby výsledný graf obsahoval Eulerovský cyklus (=uzavřený eulerovský tah)? Vkládáme pouze hrany, počet uzlů se nemění.

Př. 3/4: ekvivalentní grafy

Dva orientované grafy G_1 , G_2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?

Př. 3/5: cesty délky 3

Popište, jak najdete a vypíšete všechny cesty délky 3 v acyklickém prostém grafu (bez násobných hran). Jaký je jejich maximální možný počet v závislosti na počtu uzlů grafu? Jaká bude asymptotická složitost Vašeho algoritmu?

Př. 3/6: orientace kružnice

Orientujte kružnici se 7 vrcholy tak, aby vznikl acyklický graf. Kolika navzájem neizomorfními způsoby to lze udělat?

Př. 3/7: tušení souvislosti

Je dán orientovaný graf G s n uzly a m hranami. Do tohoto grafu máme přidat co nejmenší počet nových hran tak, aby se výsledný graf stal silně souvislým. Navrhněte efektivní algoritmus řešení této úlohy a určete jeho asymptotickou složitost.

Př. 3/8: homogenní graf

Orientovaný graf prohlásíme za směrově homogenní, pokud vzdálenost (= počet hran na nejkratší možné cestě) každé dvojice uzlů (kořen, list) je vždy stejně velká bez ohledu na to, který kořen nebo list zvolíme. Formulujte efektivní algoritmus, který rozhodne, zda daný graf je směrově homogenní a určete jeho asymptotickou složitost. Lze algoritmus zrychlit, pokud víme, že graf je acyklický?

Př. 3/9: hledá se graf!

Najděte orientovaný graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus.

