B4M33PAL – Cvičení 01

Organizace cvičení

Asymptotická složitost algoritmů

Grafy a jejich výpočetní reprezentace

Prohledávání do šířky a hloubky (BFS a DFS)

Metody hledání nejkratší kostry

Organizace cvičení

- společné řešení úloh jednotlivě / ve skupinách

- něco málo úloh na doma

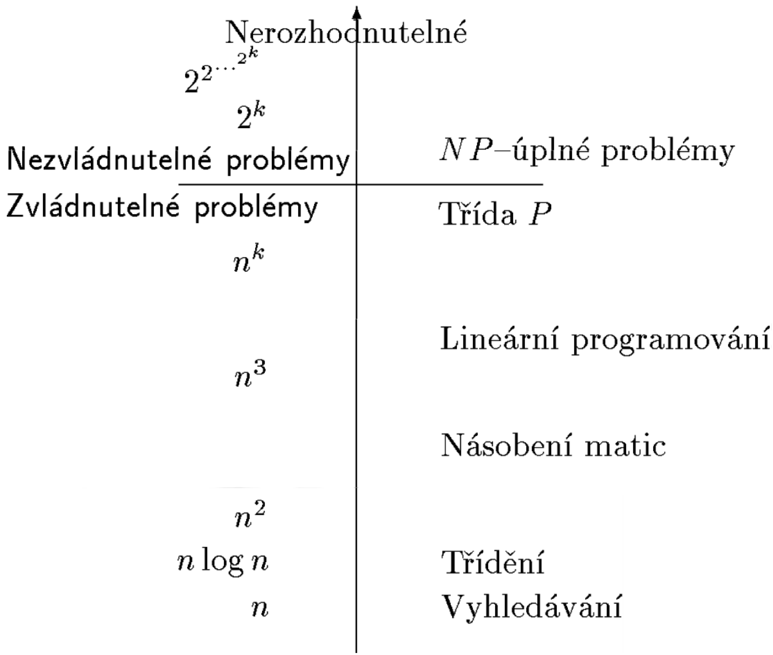
- zápočet:

    - odevzdání programovacích úloh do BRUTE

    - aktivní účast na cvičeních (zaslání řešení teoretických úloh)

Asymptotická složitost algoritmů

1. Ověřte, že platí ($\forall n \in \mathrm{N}$) ($n > 4 \Rightarrow n^2 - 2n > 0.5n^2$). Graf funkce $f(n) = 0.5n^2$ pro $n > 4$ tedy leží vždy pod grafem funkce $g(n) = n^2 - 2n$ a navíc rozdíl $\mathrm{g}(n) - \mathrm{f}(n)$ roste do nekonečna s rostoucím n.
Dokažte pomocí definice množiny $\mathrm{O}(f(n))$, že i přesto platí $g(n) \in \mathrm{O}(f(n))$.



Spektrum výpočetní složitosti
((c) Vladan Majerech, MFF UK, Úvod do složitosti a NP-úplnosti,
viz https://ktiml.mff.cuni.cz/~maj/skripta.html#zima)

2. Symbolem lg značíme logaritmus o základu 2. Uspořádejte podle řádu růstu uvedené funkce poměnné n. Zdůvodněte pořadí každých dvou sousedních funkcí v tomto uspořádání.

$$\lg(n!) \quad \left(\sqrt{2}\right)^{\lg(n)} \quad 2^{\lg(\lg(n))} \quad 4^{\lg(n)} \quad \sqrt{\lg(n)} \quad n\cdot\lg(n^2) \quad n\cdot\lg(n) \quad lg(n)^2$$

3. Algoritmus A projde celým polem délky N a prvek s indexem k zpracuje za $c \cdot k$ milisekund. Konstanta c je stále stejná. Určete asymptotickou složitost zpracování celého pole.

4. Algoritmus P projde celým dvourozměrným polem velikosti N×N a prvek na pozici (k, m) zpracuje za A) $c \cdot (k+m)$, B) $c \cdot k \cdot m$ milisekund. Konstanta c je stále stejná, $1 \leq k \leq$ N, $1 \leq m \leq$ N. Určete asymptotickou složitost zpracování celého pole v případě A) a B).

Grafy a jejich výpočetní reprezentace

5. Popište jednotlivé reprezentace orientovaného grafu v paměti počítače, které znáte. Pro každou možnou dvojici reprezentací R1, R2 určete, jaká je asymptotická složitost vzájemného převodu.

6. V seznamu je uložena množina všech hran grafu, každá hrana je dvojice <uzel, uzel>. Víme, že graf má N uzlů, že je nesouvislý a že obsahuje komponentu K, která má více než N/2 uzlů. Máme vytvořit nový seznam obsahující (ve stejném formátu) právě všechny hrany komponenty K. Popište, jak co nejefektivněji budete tuto úlohu řešit a jaká bude asymptotická složitost vašeho řešení. Pořadí hran v obou seznamech není předepsáno a může být libovolné.

7. Druhá mocnina grafu G je graf G^2, jehož množina uzlů se shoduje s množinou uzlů grafu G a jehož množina hran je určena takto: G^2 obsahuje hranu $\{u,v\}$ jen a jen tehdy, pokud G obsahuje zároveň hrany $\{u,w\}$ a $\{w,v\}$, kde w je libovolný uzel grafu G. Jinými slovy, G^2 vznikne z G tak, že do G přidáme hrany mezi všemi uzly spojenými cestou délky 2 a odstraníme původní hrany. Popište, jak vytvoříte G^2, když jsou grafy zadány (a) spojovou reprezentací (b) maticí sousednosti. Která varianta bude rychlejší?

8. Máme dva algoritmy A1 a A2 zpracovávající obyčejný neorientovaný graf s n uzly a m hranami. Oba algoritmy řeší tutéž úlohu a vydávají stejný výsledek na všech vstupech. Asymptotická složitost A1 je $\Theta(n\ m\ \log(n))$, asymptotická složitost A2 je $\Theta(n^2\ \log(m))$. Diskutujte, kdy je výhodnější užívat A1 a kdy A2.