1.8 Izomorfizmus

Dva grafy mohou být „strukturně stejné“, tedy izomorfní. Určení izomorfizmu dvou grafů spočívá neformálně v následujícím.

Označíme uzly jednoho grafu libovolně pomocí souboru navzájem různých jmen. Uzly druhého grafu označíme pomocí stejného souboru jmen. Nyní se může stát, že kdykoli v jednom z grafů nějaká hrana spojuje dva uzly, existuje v druhém grafu hrana spojující uzly téhož jména. V takovém případě jsou oba grafy izomorfní a zobrazení, které každému uzlu jednoho grafu přiřadí stejně pojmenovaný uzel druhého grafu, se nazývá **izomorfizmus** mezi těmito grafy. Shrnuto do definice:

izomorfní grafy

Dva grafy $G_1 = (H_1, U_1, \rho_1)$, $G_2 = (H_2, U_2, \rho_2)$ jsou **izomorfní**, pokud existuje prosté zobrazení f: $U_1 \to U_2$ s následující vlastností:

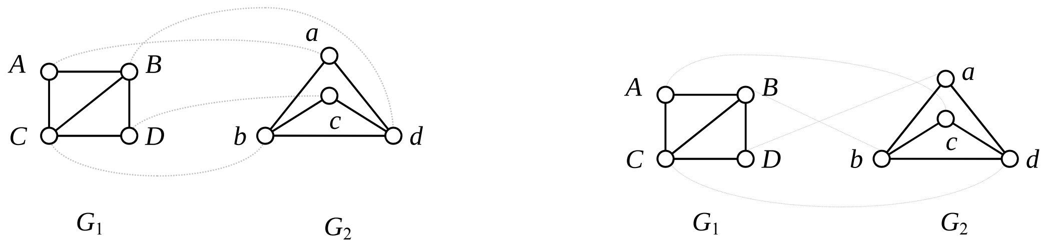
$\forall x,y \in U_1$: $(x,y) \in H_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in H_2$.

izomorfizmus

Takové zobrazení f se nazývá **izomorfizmus** mezi G_1 a G_2.

Izomorfizmus je tedy prosté zobrazení z uzlů jednoho grafu na uzly druhého grafu, které zachovává incidenci.

Je zřejmé, že izomorfizmů mezi dvěma grafy může existovat **více**. Uvažme dvě zobrazení mezi grafy G_1 a G_2 na obrázku 1.3.



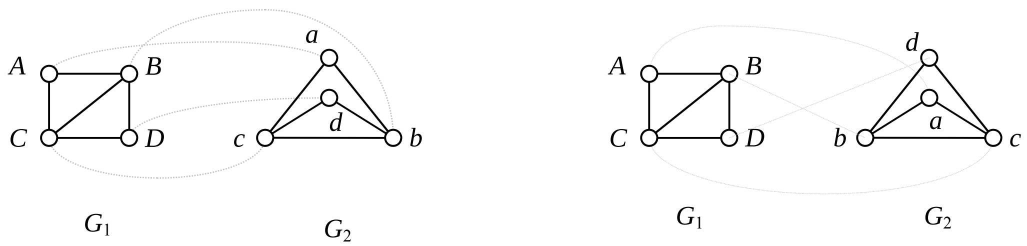
Obrázek 1.3

Obě následující zobrazení f_1 a f_2 jsou izomorfizmy.

f_1: $A \to a$, $B \to d$, $C \to b$, $D \to c$

f_2: $A \to c$, $B \to b$, $C \to d$, $D \to a$

Tady by se někdo mohl zarazit a říci, že tak, jak jsme popsali izomorfizmus, musíme přece navzájem přiřazovat vrcholy stejných jmen, ale zobrazení f_1 a f_2 přiřazují vrcholy zcela libovolně bez ohledu na pojmenování. Co je tu tedy špatně? Nic, izomorfizmus znamená *existenci* vhodného pojmenování (zobrazení). Pro zvýraznění obou izomorfizmů f_1 a f_2 bychom mohli přejmenovat uzly grafu G_2 tak, jak je uvedeno na obrázku xxx – způsob vzájemného přiřazení uzlů je zachován, změnily se jen jejich názvy.



Obrázek 1.4

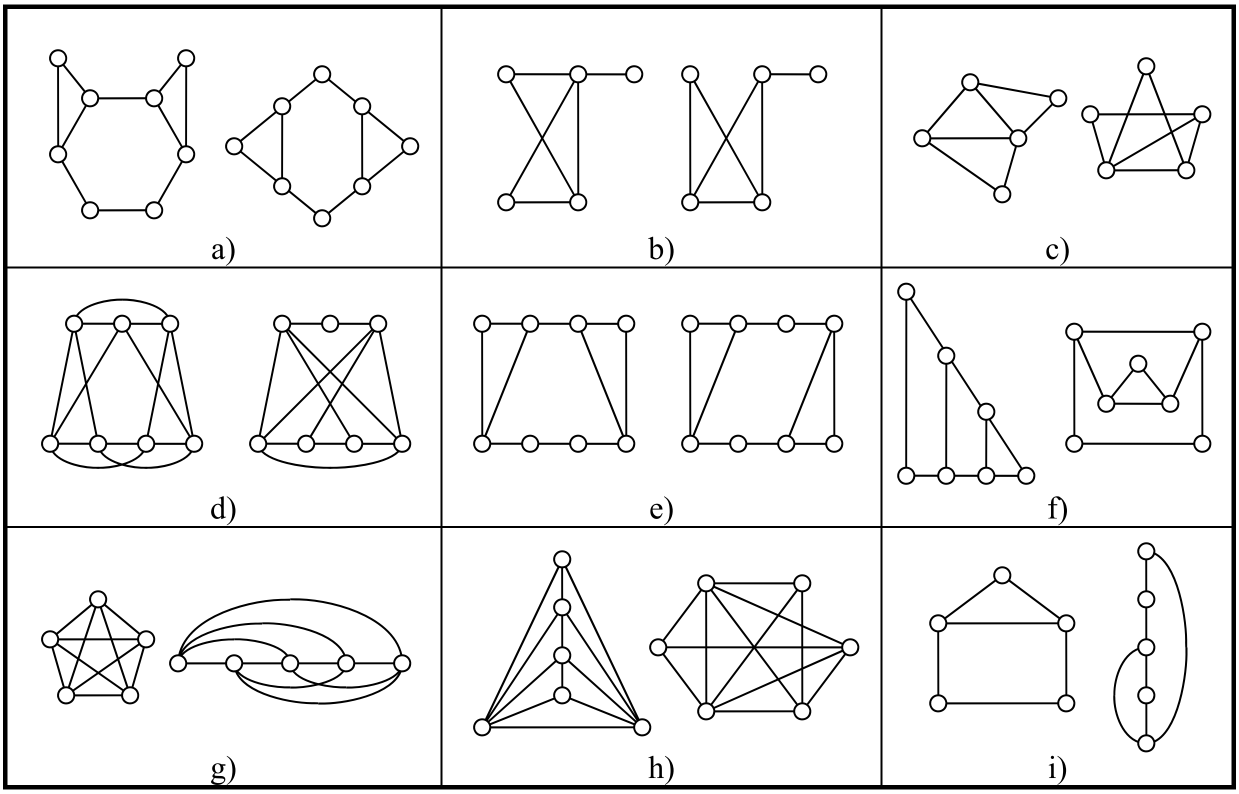
Důležitou otázkou je, jak nalézt či uhodnout vhodné pojmenování uzlů obou grafů tak, aby izomorfizmus, pokud existuje, vynikl. Je zřejmé, že když budeme jména uzlům přiřazovat nešikovně, nepodaří se nám izomorfizmus rychle nalézt, byť by i existoval. Zajisté, můžeme postupovat zcela mechanicky, pojmenovat pevně uzly jednoho grafu a na uzlech druhého grafu postupně vyzkoušet všechny možné permutace stejného souboru jmen a pokaždé zkoumat, zda platí podmínka izomorfizmu, tj zda stejně pojmenované uzly spolu sousedí. Jsou-li grafy izomorfní, jistě se tak po nějaké době dobereme cíle. Vyzkoušení všech možných permutací je ovšem časově náročný proces. Považme jen, že 10! = 3628800 a 20! = 2432902008176640000. Pro ověření izomorfizmu už i malých grafů je tato metoda zřejmě nepoužitelná.

Doposud se neodařilo dokázat, že problém ověření izomorfizmu grafů je ve své obecnosti NP-úplný. Nepodařilo se nalézt ani efektivní algoritmus, který by pro dva libovolné grafy dokázal efektivně ověřit, zda jsou izomorfní. Jsou ale známy rychlé algoritmy, které ověří izomorfizmus grafů z určité třídy, například stromů, rovinných grafů, apod.

Naštěstí, pokud dva grafy izomorfní nejsou, máme často k dispozici různá kritéria, která to ukáží. Například, pokud mají grafy různý počet uzlů nebo hran, izomorfní nejsou. Jako další snadná kritéria můžeme uvést různý soubor stupňů, různý počet komponent, apod.

1.9 Úlohy (izomorfizmus)

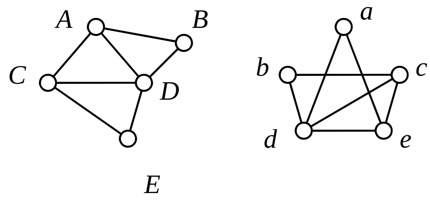
Rozhodněte o izomorfizmu dvojic grafů na obrázku 1.8.



Obrázek 1.8

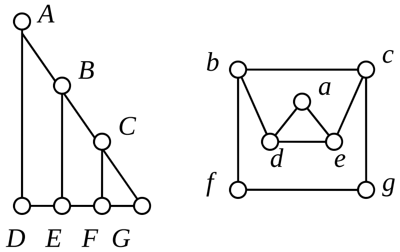
[]a) Ne, v prvním grafu sousedí dva uzly stupně 2, ve druhém ne.
b) Ne, první graf obshuje uzel stupně 4, druhý ne.
c) Ano.
d) Ne, druhý graf obsahuje uzel stupně 2, první ne.
e) Ne, tato dvojice grafů je izomorfní s dvojicí grafů v a).
f) Ano.
g) Ano.
h) Ano.
i) Ano.

Určete počet izomorfizmů mezi izomorfními dvojicemi grafů v předchozí úloze xxx.
[]



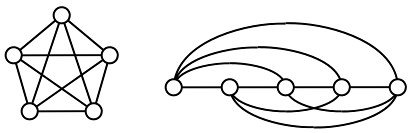
Obrázek r.1.9

c) Oba grafy obsahují jediný uzel stupně 4 — *D* a *d*. Izomorfizmus je musí zobrazit na sebe. Když dále zobrazíme uzel *B* na uzel *a*, je další postup konstrukce izomorfizmu jednoznačný: *D-d*, *B-a*, *A-e*, *C-c*, *E-b*. Uzel *B* můžeme ještě také zobrazit na uzel *b* a pak je zase další postup konstrukce izomorfizmu jednoznačný: *D-d*, *B-b*, *A-c*, *C-e*, *E-a*. Získali jsme tak 2 izomorfizmy.



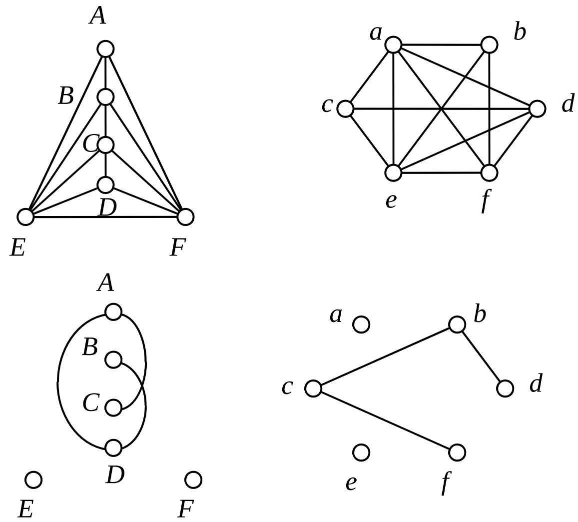
Obrázek r.1.10

f) Grafy obsahují jediný uzel stupně 2, který sousedí s dvěma uzly stupně 3 — uzly *G* a *a*. Když dále zobrazíme uzel *C* na uzel *d*, je další postup konstrukce izomorfizmu jednoznačný: *G-a*, *C-d*, *F-e*, *B-b*, *E-c*, *A-f*, *D-g*. Uzel *C* můžeme kromě toho zobrazit na uzel *e* a pak je zase další postup konstrukce izomorfizmu jednoznačný: *G-a*, *C-e*, *F-d*, *B-c*, *E-b*, *A-g*, *D-f*. Získali jsme tak 2 izomorfizmy.



Obrázek r.1.11

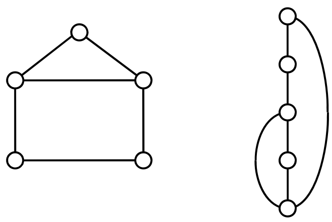
g) Oba grafy představují různá nakreslení grafu K_5. Počet různých izomorfizmů mezi dvěma grafy K_n se rovná počtu možných permutací *n* prvků. Důvod je prostý, když zafixujeme uzly jednoho grafu a uzly druhého jim budeme přiřazovat v libovolném pořadí, vždy bude zachována podmínka incidence (hlásající, že uzly v jednom grafu jsou spojeny hranou právě tehdy, když uzly v druhém grafu jsou spojeny hranou), protože všechny uzly jsou spojeny hranou. V případě K_5 tak máme $5! = 120$ izomorfizmů.



Obrázek r.1.12

h) Zřejmě každý izomorfizmus mezi dvěma grafy je také izomorfizmem mezi jejich doplňky (rozmyslete si, že to plyne rovnou z definice izomorfizmu), stačí tedy zkoumat počet izomorfizmů mezi doplňky, které jsou nakresleny pod příslušnými grafy na obrázku xxx. Dvě dvojice izolovaných bodů lze na sebe zobrazit právě dvěna způsoby *E-e*, *F-a* nebo *E-a*, *F-e*. Stejně tak dvě cesty libovolné (ale shodné) délky lze na sebe zobrazit dvěma způsoby („tam“ a „zpátky“). Kombinacemi obou dvojic možností tak získáváme celkem čtyři izomorfizmy:

f_1: *B-f*, *D-c*, *A-b*, *C-d*, *E-e*, *F-a*;
f_2: *B-f*, *D-c*, *A-b*, *C-d*, *E-a*, *F-e*;
f_3: *B-d*, *D-b*, *A-C*, *C-f*, *E-e*, *F-a*;
f_4: *B-d*, *D-b*, *A-C*, *C-f*, *E-a*, *F-e*.



Obrázek r.1.13

i) Když odebereme z grafu f) uzly *A* a *D*, získáme graf izomorfní s „domečkem“ zcela vlevo. Lze proto postup v odstavci f) použít beze zbytku i zde a získat tak 2 izomorfizmy.