orientovaný graf

počáteční a koncový uzel

Orientovaný graf se od neorientovaného obecného grafu liší tím, že u každé jeho hrany záleží na pořadí s ní incidující dvojice uzlů. Hrany tedy můžeme považovat za „šipky“ mezi jednotlivými dvojicemi uzlů. Můžeme tak rozlišit **počáteční uzel** a **koncový uzel** dané hrany.

orientace hrany
následník
předchůdce

Hrana je **orientována** od počátečního ke koncovému uzlu. Koncový uzel je **následníkem** počátečního uzlu, počáteční uzel je naopak **předchůdcem** koncového.

analogie s neorientovaným grafem

Násobné (rovnoběžné) hrany, smyčky, průnik, sjednocení, rozdíl, doplněk, podgraf, faktor, podgraf určený (indukovaný) množinou uzlů, izomorfizmus — všechny tyto pojmy se zavádějí zcela analogicky jako u neorientovaných grafů, laskavá čtenářka by si měla jako cvičení napsat exaktně všechny příslušné definice.

výstupní a vstupní stupeň
list
kořen
acyklický graf

Také stupně uzlů orientovaného grafu mají své specifikum. **Výstupní stupeň** uzlu je počet hran grafu, jejichž počátečním uzlem je právě daný uzel. **Vstupní stupeň** uzlu je počet hran grafu, jejichž koncovým uzlem je právě daný uzel. **List** je uzel s výstupním stupněm 0, tj. bez následníků. **Kořen** je uzel s vstupním stupněm 0, tj. bez předchůdců. **Acyklický** graf neobsahuje žádný cyklus.

Dva vrcholy orientovaného grafu ovšem mohou být spojeny dvěma hranami, aniž by se přitom jednalo o rovnoběžné hrany. Stačí, aby tyto hrany byly navzájem opačně orientovány. Vzniká tak kratičký cyklus (viz dále) délky 2.

Úplný graf

Úplný orientovaný graf s n uzly má tedy dvakrát více hran než úplný neorientovaný graf s n uzly.

Úmluva

Obyčejný graf

Podobně jako u neorientovaných grafů budeme pojmem orientovaný graf rozumět obyčejný orientovaný graf, tj. graf bez smyček a rovnoběžných hran. Pokud bude z kontextu zřejmé, že se jedná o orientovaný graf, vypustíme pro jednoduchost i slovo orientovaný. Budeme-li se zabývat grafem se smyčkami či rovnoběžnými hranami, vždy to výslovně uvedeme.

opačně orientovaný

Graf je **opačně orientovaný** vůči jinému grafu, pokud po změně orientace všech hran v jednom z nich se oba stanou navzájem izomorfní.

zavedení orientace
zrušení orientace
symetrická orientace

V neorientovaném grafu lze **zavést orientaci** tak, že každou jeho hranu nějakým způsobem orientujeme. Naopak v orientovaném grafu lze **zrušit orientaci** tak, že zrušíme orientaci každé hrany. Z orientovaného grafu bez rovnoběžných hran se tak může stát neorientovaný graf s rovnoběžnými hranami. (Ty lze dále podle případné potřeby redukovat vždy na hranu jedinou, žádá-li si to aplikace či úloha) Existuje i tzv. **symetrická orientace** neorientovaného grafu, kdy každou hranu mezi dvěma různými uzly nahradíme dvěma opačně orientovanými hranami mezi týmiž uzly a každou smyčku nahradíme orientovanou smyčkou.

sled

Sled v orientovaném grafu nebere ohled na orientaci hran, je to taková posloupnost uzlů a hran, která je sledem i v grafu, jenž vznikne zrušením orientace původního grafu.

uzavřený sled, cesta, tah, kružnice

Stejně tak **uzavřený sled**, **tah**, **cesta** a **kružnice** v orientovaném grafu neberou ohled na orientaci, zavádí se opět pomocí neorientovaného grafu vytvořeného zrušením orientace.

slabá souvislost
slabá komponenta

Pomocí sledů jsou u neorientovaných grafů zavedeny pojmy souvislost a komponenta grafu. U orientovaných grafů se definují stejně, s tím ovšem, že se tu nazývají **slabá souvislost** a **slabá komponenta**, aby se odlišily od dále uvedených pojmů specifických jen pro orientované grafy.

spojení

Spojení v orientovaném grafu je takový sled, který „postupuje podle šipek“, tj. uzel bezprostředně následující ve sledu po jiném uzlu je i jeho následníkem

orientovaný tah
orientovaná cesta
cyklus

v grafu. Spojení má svůj **počáteční** a **koncový** uzel, **vnitřní uzly** a svou **délku**, jež jsou zcela totožné s odpovídajícími objekty sledu.

Orientovaný tah je spojení, v němž se žádná hrana neopakuje.

Orientovaná cesta je orientovaný tah, v němž se neopakuje žádný vrchol.

Cyklus je uzavřená orientovaná cesta.

Shrnuto do tabulky:

neorientovaný i orientovaný graf	sled	tah	cesta	kružnice
orientovaný graf	spojení	orientovaný tah	orientovaná cesta	cyklus

Tab. 3.1

silná souvislost

Orientovaný graf je **silně souvislý**, pokud mezi každými jeho dvěma uzly x, y existuje spojení z x do y. Pouhý sled tedy nestačí.

silná komponenta

Silná komponenta orientovaného grafu je každý jeho maximální silně souvislý podgraf.

kondenzace

Kondenzace orientovaného grafu je jiný orientovaný graf, který vznikne takto: Za každou silnou komponentu vytvoříme jeden vrchol. Každé dva nově vzniklé vrcholy propojíme jedinou orientovanou hranou právě tehdy, když existuje stejně orientovaná hrana (alespoň jedna) mezi odpovídajícími silnými komponentami. Volně řečeno, každá silná komponenta zkondenzuje do jediného uzlu a všechny hrany mezi dvěma silnými komponentami zkondenzují v jedinou hranu.

Vlastnosti

Lze najít graf v němž se součet všech výstupních stupňů liší od součtu všech vstupních stupňů?

Může existovat cyklus v kondenzaci grafu? Kdy?

Čím se liší kondenzace acyklického grafu od grafu samotného?

Kondenzace grafu obsahuje jediný uzel. Jaký je původní graf?

Kondenzace grafu je s ním izomorfní. Jaký je původní graf?

Existuje acyklický graf bez kořenů nebo listů?

Existuje graf se stejným počtem kořenů a listů? Může mít graf více kořenů než listů? Nebo naopak?

Existuje orientovaný graf bez kořenů a listů? Jen s kořenem (kořeny) a bez listů? Jen s listy (listem) a bez kořenů?

Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu?

Vstupní i výstupní stupeň všech vrcholů v grafu bez smyček je 1.Jak tento graf vypadá? Je souvislý?

Může být graf izomorfní s opačně orientovaným grafem?

Může být orientovaný graf izomorfní se svým doplňkem?

Podejte návod na výrobu grafu s n uzly, jehož všechny vstupní stupně jsou navzájem různé a také všechny výstupní stupně jsou navzájem různé.

Každý orientovaný graf obsahuje množství různých acyklických podgrafů (např. můžeme mnoha způsoby odebrat všechny hrany až na jednu). Je pravda, že každý orientovaný graf obsahuje acyklický faktor?

Nakreslete všechny navzájem neizomorfní orientované grafy se 3 uzly.

Nakreslete všechny navzájem neizomorfní orientované kružnice s 5 uzly. (Pozor, ne cykly, ale kružnice!)

Orientujte kružnici se 6 vrcholy tak, aby vznikl acyklický graf. Kolika navzájem neizomorfními způsoby to lze udělat?

Najděte graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus.

Algoritmy

Acyklický graf byl porušen tím způsobem, že do něj byly omylem přidány dvě hrany, každá z nich porušuje acykličnost tím, že uzavírá nějaký cyklus v grafu. Nevíme, které hrany to jsou a máme je detekovat v čase úměrném počtu hran grafu.

Pro hledání nejlacinější cesty v ohodnoceném grafu se běžně používá Dijkstrův algoritmus. Pokud graf, ve kterém hledáme nejlacinější cestu, je acyklický, získáváme některé výhody. Jednak můžeme při hledání postupovat rychleji než Dijkstrův algoritmus a navíc nejsme omezeni další podmínkou Dijkstrova algoritmu, že ceny hran musí být nezáporné grafu. Ukažte proč tomu tak je.

Vezmeme úplný neorientovaný graf a každou jeho hranu náhodně orientujeme (např. pomocí házení mincí rozhodneme o jejím směru). Ukažte, že je možné, aby tímto postupem vznikl acyklický graf. Jděte dokonce tak daleko, že spočtete pravděpodobnost toho, že vznikne acyklický graf.

Z grafu máme odstranit všechny hrany, jejichž krajní uzly náleží různým silným komponentám. Jaká je asymptotická složitost tohoto procesu?

Považte následující jednoduchý algoritmus:

```
Dokud graf obsahuje alespoň jeden uzel
 s výstupním stupněm 0 (list) dělej
      odstraň tento uzel a všechny s ním incidující hrany
      konec dokud
Když je výsledkem prázdný graf
     pak původní graf byl acyklický
     jinak původní graf nebyl acyklický
     konec když
```

Dává tento algoritmus vždy správné výsledky? Proč?

Rozhodněte, jestli pořadí uzlů, v němž byly postupně odstraňovány z grafu v předchozí úloze, definuje topologické uspořádání původního grafu.

Ukažte, dokažte

Ukažte, že když je výstupní stupeň každého uzlu nenulový, pak graf obsahuje cyklus. Platí stejné tvrzení pro vstupní stupeň?

V grafu existuje spojení oběma směry mezi dvěma určitými uzly. Dokažte, že graf obsahuje cyklus. Existuje také cyklus obsahující oba dané uzly?

Dokažte: Graf bez izolovaných uzlů je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje uzavřené spojení procházející všemi hranami (tj. každou hranou alespoň jednou).

Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby neorientovaný graf mohl být orientován určitým způsobem tak, že vznikne silně souvislý graf.

Acyklický slabě souvislý graf má jeden kořen a jeden list. Přidáme hranu vedoucí z listu do kořene. Výsledek bude silně souvislý. Dokažte.

Silně souvislý graf má alespoň tolik hran jako uzlů (není-li graf jediným uzlem). Dokažte.