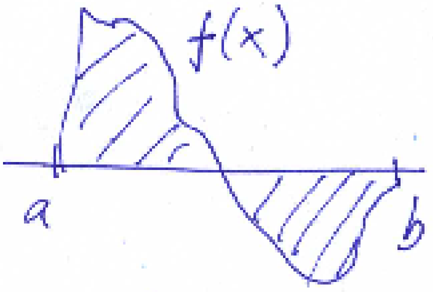
1

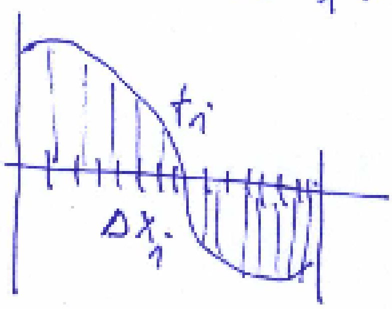
Olšák RSO
přednáška 2010

Úvod do vícerozměrných integrálů



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

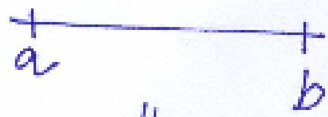
Přibližná definice Riemannova integrálu:
dělení na části, s tím, že zmenšujeme velikost dílku Δx_i, s použitím limity



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{D \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \Delta x_i$$

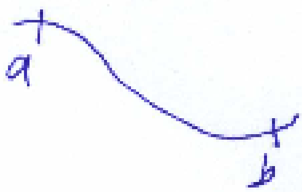
Jiný fyzikální pohled:

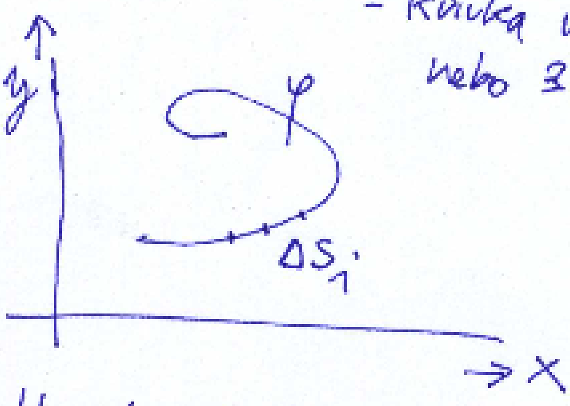
drát s proměnnou hustotou:



$\Downarrow$

Zkroucený drát
- křivka ve 2D nebo 3D

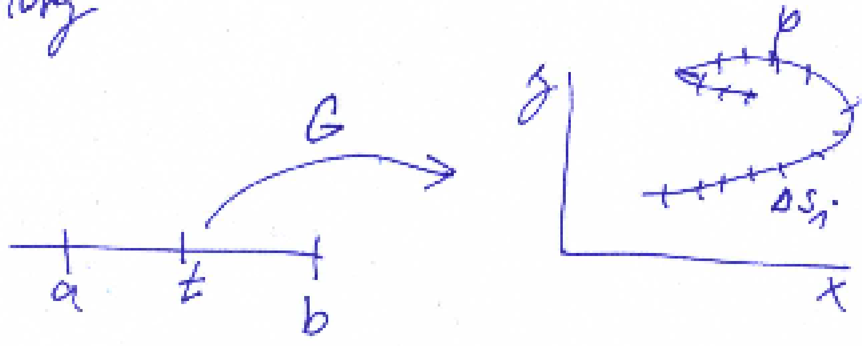




Hmotnost drátu je $m = \int_\varphi f(x,y)\,ds = \lim_{D \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \Delta s_i$

Pro rovný drát v R^1 lze říci: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ... Newton-Leibnitz formule

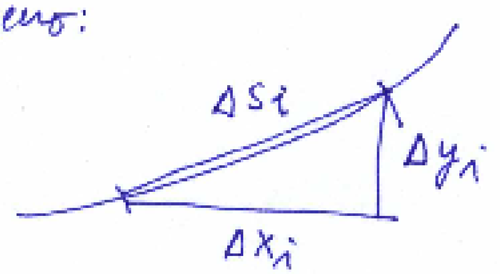
Pro vícerozměrné integrály použijeme parametrizaci křivky



$$G: \langle a, b\rangle \to R^2 \quad \text{.... parametrizace křivky}$$

$$\int_{\varphi} f\,ds = \lim_{\nu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i \,\Delta s_i = \lim_{\nu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} \cdot \Delta t_i$$

Zvětšeno:



$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

Při limitě k nule to přechází v integrál s využitím složeného zobrazení:

$$= \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$$

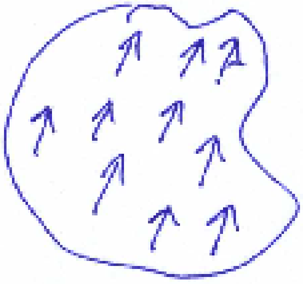
..... Křivkový integrál I. druhu

Další interpretace

Kromě toho máme i křivkový integrál II. druhu

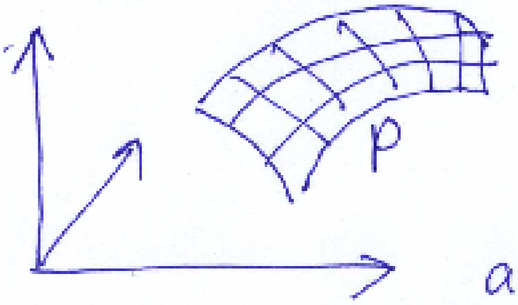
$$\int_{\varphi} f(x)\,dx = \int_a^b f(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)\,dt$$

... použití ve fyzice – tok nebo cirkulace křivkou, vektorové pole



.... v každém bodě je definován vektor (rychlost toku) a počítáme kolik vody (jaký je tok) přes tuto křivku.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY



hustota materiálu

$$\int_P f(x,y,z)\,dS$$

a chci spočítat hmotnost plechového útvaru.

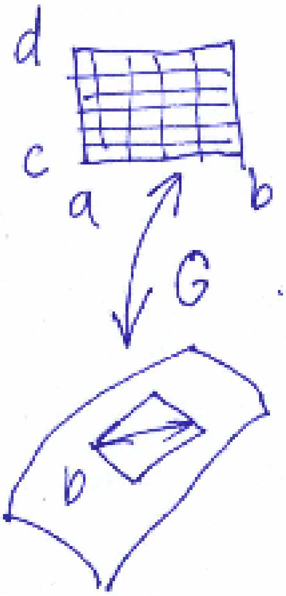
Rámcová hrubá definice:

$$\int_P f(x,y,z)\,dS = \lim_{D\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \Delta S_i$$

D... diametr plošky

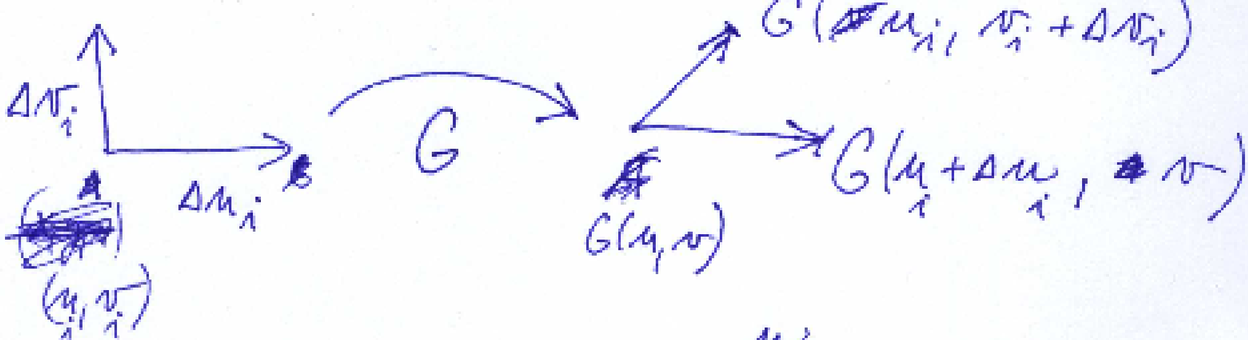
Opět nevíme, jak to počítat pomocí kalkulu.

Přibližné hrubé odvození:



G ... je zobrazení $R^2 \to R^3$ $\left\{\begin{array}{l} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{array}\right)$.

$$\int_P f(x,y,z)\,dS = \lim_{D\to 0}\sum f_i \cdot \Delta S_i = \lim_{D\to 0}\sum f_i \cdot \frac{\Delta S_i \cdot (\Delta u_i \cdot \Delta v_i)}{\Delta u_i \cdot \Delta v_i}$$



$$G(u_i + \Delta u_i \cdot \xi, v) - G(u,v) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$G(u_i, v_i+\Delta v_i) - G(u_i, v_i) = {}^{v}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Plocha plošky ΔS_i ve R^3 spočítá jako vektorový součin:

$$\left\| {}^{u}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \times {}^{v}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \right\| =$$

$$= \sqrt{ \underbrace{\begin{vmatrix} {}^{u}\Delta y & {}^{u}\Delta z \\ {}^{v}\Delta y & {}^{v}\Delta z \end{vmatrix}^2}_{=A} + \underbrace{\begin{vmatrix} {}^{u}\Delta x & {}^{u}\Delta z \\ {}^{v}\Delta x & {}^{v}\Delta z \end{vmatrix}^2}_{=B} + \underbrace{\begin{vmatrix} {}^{u}\Delta x & {}^{u}\Delta y \\ {}^{v}\Delta x & {}^{v}\Delta y \end{vmatrix}^2}_{=C} }$$

$$\begin{vmatrix} {}^{u}\Delta y / \Delta u & {}^{u}\Delta z / \Delta u \\ {}^{v}\Delta y / \Delta v & {}^{v}\Delta z / \Delta v \end{vmatrix} = \frac{\Delta S}{\Delta u \, \Delta v} = *$$

Tedy to můžeme zapsat pomocí parciálních derivací

$$\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}$$

$$* = A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Takže výsledek lze spočítat

$$\int_P f(x,y,z)\,dS = \int_{\square} f\big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\; du\cdot dv =$$

$\{$s využitím Fubiniovy věty$\}$

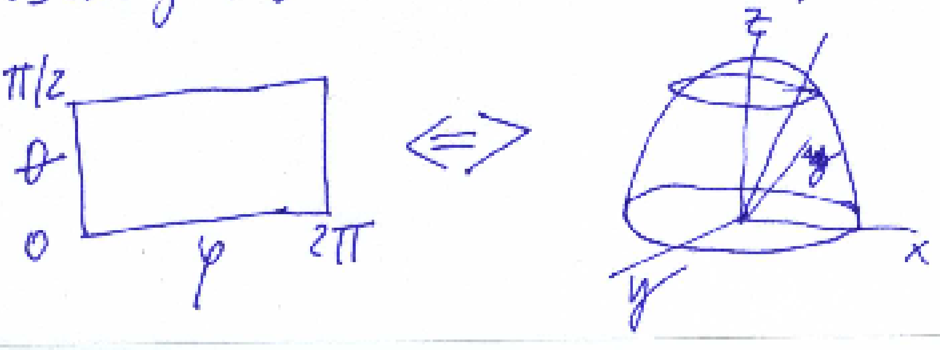
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot dv \right) du \text{ , popřípadě}$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot du \right)\cdot dv$$

Speciální případy: integrace podél hemisféry (polokoule)

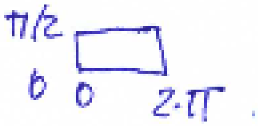
, značíme $\int_\Omega f\, d\omega$

, kde Ω je symbol pro hemisféru a $d\omega$ je diferenciální prostorový úhel na hemisféře. Použijeme sférickou parametrizaci



$$\begin{aligned} z &= \cos\theta \\ x &= \sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y &= \sin\theta\cdot\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} f\,d\omega = \int f(\ldots)\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\varphi\,d\theta$$



$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cdot\sin\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta\cdot\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = (\sin\theta)^2\cdot\cos\varphi$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{d\varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cdot\cos\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\cdot\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = -(\sin\theta)^2\cdot\sin\varphi$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cdot\cos\varphi & \cos\theta\cdot\sin\varphi \\ -\sin\theta\cdot\sin\varphi & \sin\theta\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$A^2+B^2+C^2 =$$

$$= \sin^4\theta \cdot \cos^2\varphi + \sin^4\theta \cdot \sin^2\varphi + \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta =$$

$$= \sin^4\theta \cdot \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta$$

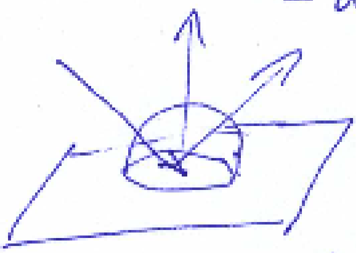
$$= \sin^2\theta \cdot \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1} = \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sin\theta$$

$$\int_\Omega f \, d\omega = \int f(\ ) \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

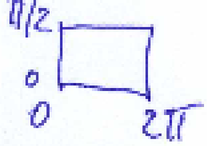
Příklady:

Př 1 Odrazivost materiálu $= $ albedo $\quad a(x, \omega') = \int_\Omega f(\omega, x, \omega') \cos\theta \, d\omega$



Pro difúzní (lambertovský povrch) je $a(x, \omega') = \text{const}$

$$a = \int_\Omega k \cdot \cos\theta \, d\omega = \iint k \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi =$$



$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} k\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\cdot d\vartheta\right)\cdot d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(k\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\cdot d\vartheta\right)\cdot d\varphi =$$

$\{$ využiji substituci $u = \sin\vartheta \quad du = \cos\vartheta\cdot d\vartheta \}$

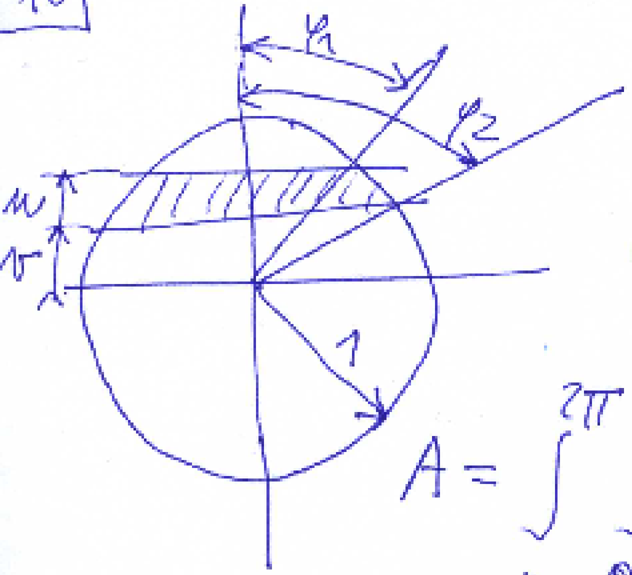
$$= k\int_0^{2\pi}\cdot\left(\int_0^{1} u\cdot du\right)\cdot d\varphi = k\cdot\int_0^{2\pi}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 d\varphi = k\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\varphi$$

$= k\cdot\pi \leq 1$ (zákon zachování energie)

tedy $k \leq \frac{1}{\pi}$

Příklad 2: koule v R^3

Tvrzení: plocha řezu na povrchu koule je stejná



Výpočet plochy:

$$A=\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} 1\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi = \dots$$

substituce $\left|\begin{array}{l} u+v=\cos\theta_1 \\ v=\cos\theta_2 \end{array}\right.$

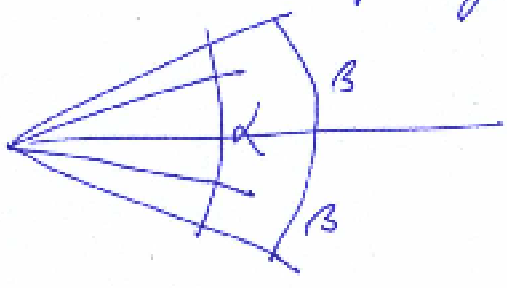
$$\Rightarrow A=\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\cos\theta\right]_{\theta_2}^{\theta_1} d\varphi$$

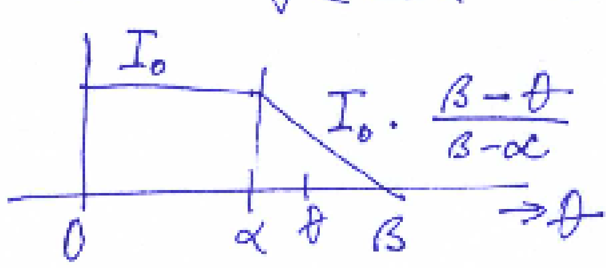
$$=\int_0^{2\cdot\pi}(u+v-v)\cdot d\varphi = u\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\cdot u$$

... plocha je nezávislá na v

Tedy plocha koule je pro $u=2$ $A=2\pi\cdot 2=4\cdot\pi$

Příklad 3: Spotlight, intenzita je daná složitostí:





Celkový výkon pro spotlight získáme integra-
svítivosti:

$$\Phi[W] = \overbrace{\int_{\Omega_\alpha} I_0 \cdot d\omega}^{P_1} + \overbrace{\int_{\Omega_{\alpha\beta}} I_0 \cdot \frac{\beta-\theta}{\beta-\alpha}\, d\omega}^{P_2} =$$

= a zbytek je za domácí úkol.

$$P_1 = I_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \sin\theta \cdot d\theta\, d\theta =$$

$$P_2 = \frac{I_0}{\beta-\alpha} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_\alpha^\beta (\beta-\theta) \cdot \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi$$

$$P_1 + P_2 = \Phi = 2\pi \cdot I_0 \cdot \left(1 + \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\beta-\alpha} \right)$$