A6M33SSL: Statistika a spolehlivost v lékařství
Teorie spolehlivosti

Vojta Vonásek
vonasek@labe.felk.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky

Markovovy modely — motivace

Robot se pohybuje po dvou pásech, každý pás řídí jeden motor. Řídicí jednotka se občas porouchá (střední doba mezi poruchami je 100 hodin). Lze ji opravit resetem, což trvá průměrně $T_s = 10$ min.

- Jaká je pravděpodobnost, že jsou oba pásy funkční?
- Jaká je pravděpodobnost, že ani jeden nefunguje?

Databázový server ukládá data na 4 discích zapojených do RAID 3. MTBF disků je 10^6 hodin a obnova dat při připojení nového disku trvá průměrně 2 hod.

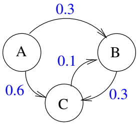
- Jaká je pravděpodobnost, že dojde ke ztrátě dat?
- Jaká je pravděpodobnost, že dojde ke ztrátě dat, pokud výměna disku trvá obsluze průměrně 1 hod?

Markovovy modely — rozdělení

- Prvek má n stavů, $X(t)$ je stav v čase t
- Stav $X(t)$ je náhodná proměnná
- Pravděpodobnost stavu i je $P_i(t) = P[(X(t) = i]$

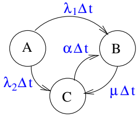
Markovovská podmínka:

$$
\begin{aligned}
P[X(t) = A_n | X(t_{n-1}) = A_{n-1}, X(t_{n-2}) = A_{n-2}, \ldots, X(t_0) = A_0] \\
= P[X(t) = A_n | X(t_{n-1} = A_{n-1})]
\end{aligned}
$$



Markovův model je definován

- Stavy
- Množinou pravděpodobností přechodu mezi stavy

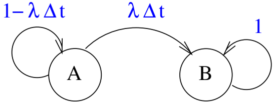


Markovův řetězec: Diskrétní stavy, Diskrétní čas

Markovův proces: Diskrétní stavy, Spojitý čas

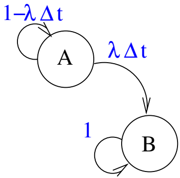
Markovovy procesy

- Prvek se dvěma stavy (funkční/nefunkční)
- Intenzita poruch λ je konstatní
- Prvek se neopravuje



- Stav "A"— prvek je funkční
- Stav "B"— prvek je rozbitý
- $P_A(t)$ — pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "A"
- $\lambda\Delta t$ — pravděpodobnost přechodu z "A"do "B"
- V čase 0 je systém ve stavu "A"

Markovův model



- Stav "A"— prvek je funkční
- Stav "B"— prvek je rozbitý
- $P_A(t)$ — pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "A"
- $\lambda\Delta t$ — pravděpodobnost přechodu z "A"do "B"

Předpokládejme, že je prvek ve stavu "A":

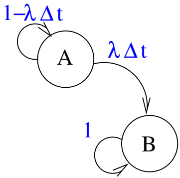
- S pravděpodobností $\lambda\Delta t$ se stav změní na "B"
- S pravděpodobností $1 - \lambda\Delta t$ se stav nezmění

Předpokládejme, že je prvek ve stavu "B":

- S pravděpodobností 1 zůstane v tomto stavu.

Markovův model

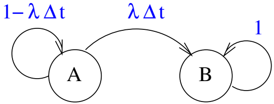
- Stav "A"— prvek je funkční
- Stav "B"— prvek je rozbitý
- $P_A(t)$ — pravděpodobnost, že je prvek ve stavu "A"
- $\lambda\Delta t$ — pravděpodobnost přechodu z "A"do "B"



Pravěpodobnost, že v čase $t + \Delta t$ budeme ve stavu "A"a "B":

$$
\begin{aligned}
P_A(t + \Delta t) &= (1 - \lambda\Delta t)P_A(t) \\
P_B(t + \Delta t) &= \lambda\Delta t P_A(t) + 1P_B(t)
\end{aligned}
$$

Markovův model



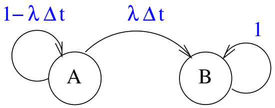
$$
\begin{aligned}
P_A(t+\Delta t) &= (1-\lambda\Delta t)P_A(t) \\
P_B(t+\Delta t) &= \lambda\Delta t P_A(t) + 1P_B(t)
\end{aligned}
$$

Maticový zápis:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P_A(t+\Delta t) \\ P_B(t+\Delta t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-\lambda\Delta t & 0 \\ \lambda\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} P_A(t+\Delta t) \\ P_B(t+\Delta t) \end{bmatrix} &= \mathbb{P} \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Matice $\mathbb{P}$ je matice pravděpodobností.

Odvození matice intenzit

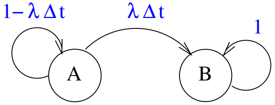


$$
\begin{aligned}
P_A(t+\Delta t) &= (1-\lambda\Delta t)P_A(t) \\
P_B(t+\Delta t) &= \lambda\Delta t P_A(t) + 1 P_B(t)
\end{aligned}
$$

Limita $\Delta t \to 0$:

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_A(t) &= -\lambda P_A(t) \\
\dot{P}_B(t) &= \lambda P_A(t)
\end{aligned}
$$

Odvození matice intenzit



$$
\begin{aligned}
P_A(t+\Delta t) &= (1-\lambda\Delta t)P_A(t) \\
P_B(t+\Delta t) &= \lambda\Delta t P_A(t) + 1P_B(t)
\end{aligned}
$$

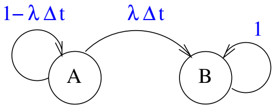
Rovnice upravíme:

$$
\begin{aligned}
\frac{P_A(t+\Delta t)-P_A(t)}{\Delta t} &= -\lambda P_A(t) \\
\frac{P_B(t+\Delta t)-P_B(t)}{\Delta t} &= \lambda P_A(t)
\end{aligned}
$$

Limita $\Delta t \to 0$:

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_A(t) &= -\lambda P_A(t) \\
\dot{P}_B(t) &= \lambda P_A(t)
\end{aligned}
$$

Odvození matice intenzit



$$
\begin{aligned}
\dot{P}_A(t) &= -\lambda P_A(t) \\
\dot{P}_B(t) &= \lambda P_A(t)
\end{aligned}
$$

Maticový zápis:

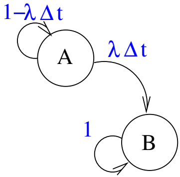
$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{P}_A(t) \\ \dot{P}_B(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{P}_A(t) \\ \dot{P}_B(t) \end{bmatrix} &= \mathbb{P}' \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Matice $\mathbb{P}'$ je matice intenzit.

Markovův model

Vývoj systému je popsán maticí pravděpodobností $\mathbb{P}$

$$\begin{bmatrix} P_A(t+\Delta t) \\ P_B(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda\Delta t & 0 \\ \lambda\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}$$



nebo maticí intenzit $\mathbb{P}'$:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_A(t) \\ \dot{P}_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}$$

Počáteční podmínky:

- $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$

Předpoklady:

- Nemůže nastat více jak jeden přechod najednou
- Pozn.: hromadná oprava/sloučení akcí je možné

Stav "B"je tzv. absorbční stav.

Markovův model

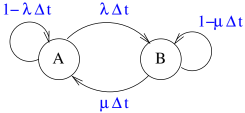
Obecné řešení:

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x_i} \mathrm{e}^{v_i t}$$

- $\vec{P}(t)$ je vektor pravděpodobností stavů
- $c_i \in R$ je konstanta
- v_i je vlastní číslo matice intenzit $\mathbb{P}'$
- $\vec{x}_i$ je vlastní vektor matice $\mathbb{P}'$ příslušející vlastnímu číslu v_i

Systém s opravou

- Porucha nastává s intenzitou λ
- K opravě dojde s intenzitou μ



Zápis s maticí pravděpodobností:

$$\begin{bmatrix} P_A(t+\Delta t) \\ P_B(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda\Delta t & \mu\Delta t \\ \lambda\Delta t & 1-\mu\Delta t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}$$

Zápis s maticí intenzit

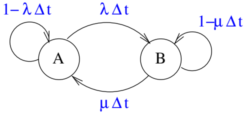
$$\begin{bmatrix} \dot{P}_A(t) \\ \dot{P}_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}$$

Poznámka:

$$\mu = \frac{1}{\text{MTTR}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\text{MTBF}}$$

Systém s opravou



- Porucha nastává s intenzitou λ
- K opravě dojde s intenzitou μ

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_A(t) \\ \dot{P}_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}$$

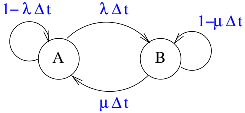
Vlastní čísla matice intenzit: $v_1 = -(\lambda + \mu)$, $v_2 = 0$

Vlastní vektory: $\vec{x}_1 = [1, -1]^{\mathrm{T}}$, $\vec{x}_2 = [1, \frac{\lambda}{\mu}]^{\mathrm{T}}$

$$\vec{P}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda}{\mu} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{0t}$$

$$\begin{aligned} P_A(t) &= c_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} + c_2 \\ P_B(t) &= -c_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} + c_2 \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

Systém s opravou



$$
\begin{aligned}
P_A(t) &= c_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} + c_2 \\
P_B(t) &= -c_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} + c_2 \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned}
$$

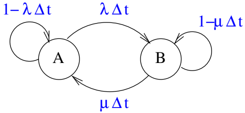
Počáteční podmínky: $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$.

$$
\begin{aligned}
P_A(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \\
P_B(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P_A(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\
\lim_{t\to\infty} P_B(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}
\end{aligned}
$$

Součinitel pohotovosti:

$$
P_A = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\text{MTTF}}{\text{MTTR} + \text{MTTF}}
$$

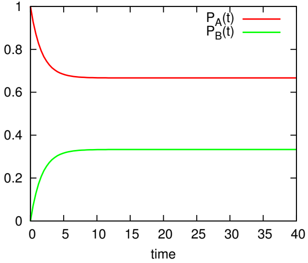
Systém s opravou



$$
\begin{aligned}
P_A(t) &= c_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} + c_2 \\
P_B(t) &= -c_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} + c_2 \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned}
$$

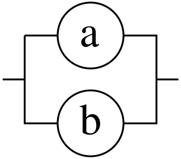
Počáteční podmínky: $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$.

$$
\begin{aligned}
P_A(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \\
P_B(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}
$$

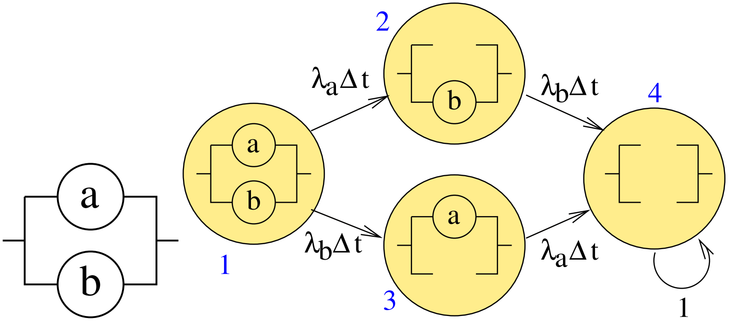


Graf pro: $\lambda = 0.2$, $\mu = 0.4$

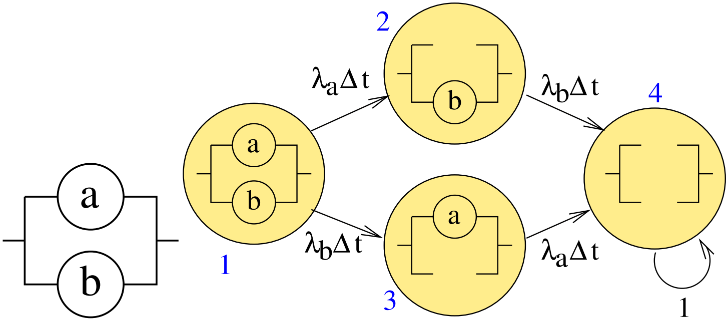
Příklad — paralelní obvod



Příklad — paralelní obvod



Příklad — paralelní obvod



$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \\ \dot{P}_3(t) \\ \dot{P}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_a - \lambda_b & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_a & -\lambda_b & 0 & 0 \\ \lambda_b & 0 & -\lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b & \lambda_a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix}$$

Příklad — paralelní obvod

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \\ \dot{P}_3(t) \\ \dot{P}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_a - \lambda_b & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_a & -\lambda_b & 0 & 0 \\ \lambda_b & 0 & -\lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b & \lambda_a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla a vektory:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(\lambda_a + \lambda_b) \\ x_2 &= -\lambda_b \\ x_3 &= -\lambda_a \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Řešení soustavy:

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-(\lambda_a + \lambda_b)t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_b t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_a t} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{0t}$$

Příklad — paralelní obvod

Řešení soustavy:

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_b t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_a t} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{0t}$$

Konstanty $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$ a $c_4 = 1$ určíme z počátečních podmínek.

$$\begin{aligned} P_1(t) &= e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} \\ P_2(t) &= -e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} + \mathrm{e}^{-\lambda_b t} \\ P_3(t) &= -e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} + \mathrm{e}^{-\lambda_a t} \\ P_4(t) &= 1 + e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} - \mathrm{e}^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že systém funguje je $R(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_a t} + \mathrm{e}^{-\lambda_b t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_a+\lambda_b)t}$$

Slučování stavů

- Počet stavů rychle roste (k^n), pro n $k-$stavových prvků
- Výpočet Mark. modelů vede na výpočet matic $n \times n$
- Časově náročné
- Pro zjednodušení lze některé stavy sloučit

Stavy lze sloučit pokud

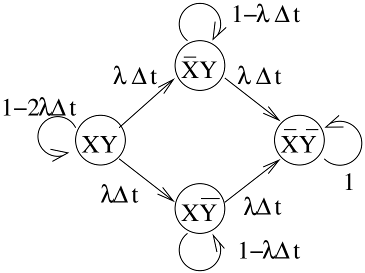
- Jejich výstupní hrany vedou do stejných uzlů se stejnými cenami
- Vstupní intenzity mohou být různé

Pro nový stav platí:

- Vstupní pravděpodobnost je součet vstupních pravděpodobností sloučených stavů
- Výstupní pravděpodobností je výstupní pravděpodobností sloučených stavů

Slučování stavů — příklad

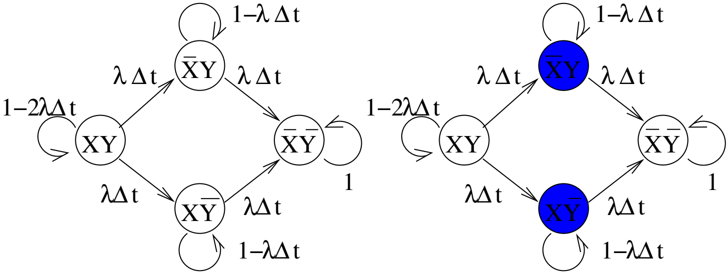
- Dva dvou-stavové prvky, intenzita poruchy každého je λ.



- Stavy $\overline{X}Y$ a $X\overline{Y}$ lze sloučit

Slučování stavů — příklad

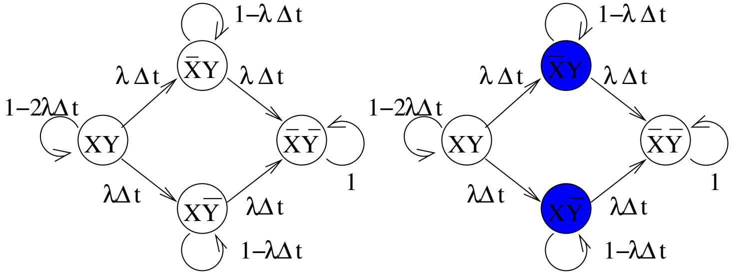
- Dva dvou-stavové prvky, intenzita poruchy každého je λ.



- Stavy $\overline{X}Y$ a $X\overline{Y}$ lze sloučit

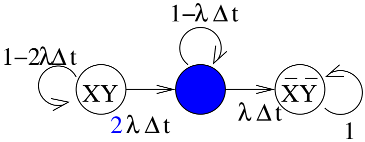
Slučování stavů — příklad

- Dva dvou-stavové prvky, intenzita poruchy každého je λ.



- Stavy $\overline{X}Y$ a $X\overline{Y}$ lze sloučit

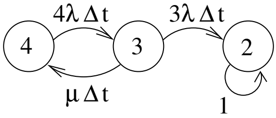
Výsledný model:



Příklad — RAID 3

Databázový server ukládá data na 4 discích zapojených do RAID 3. MTBF disků je 10^6 hodin a obnova dat při připojení nového disku trvá průměrně 2 hod.

- Jaká je pravděpodobnost, že dojde ke ztrátě dat, pokud výměna disku trvá obsluze průměrně 1 hod?

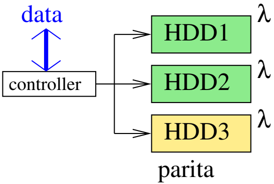


$$\mathbb{P}' = \begin{bmatrix} -4\lambda & \mu & 0 \\ 4\lambda & -3\lambda - \mu & 0 \\ 0 & 3\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

- Jaké předpoklady musí platit, aby šel tento model použít?

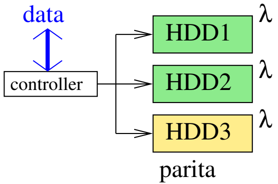
Příklad — RAID 3

- Data se rozdělují na dva disky + paritu
- Při výpadku jednoho disku řadič může dopočítat chybějící data
- Při výpadku více než jednoho disku jsou data ztracena
- MTBF disků známo. Jak rychle se musejí kopírovat data?



Příklad — RAID 3

- Data se rozdělují na dva disky + paritu
- Při výpadku jednoho disku řadič může dopočítat chybějící data
- Při výpadku více než jednoho disku jsou data ztracena
- MTBF disků známo. Jak rychle se musejí kopírovat data?



$$\mathbb{P}' = \begin{bmatrix} -3\lambda & \mu & 0 \\ 3\lambda & -\mu - 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Příklad — RAID 3

Řešení:

$$x_1 = \left[1, -\frac{\sqrt{m^2 + 10\,l\,m + l^2} + m - l}{2\,m}, \frac{\sqrt{m^2 + 10\,l\,m + l^2} - m - l}{2\,m}\right]$$

$$x_2 = \left[1, \frac{\sqrt{m^2 + 10\,l\,m + l^2} - m + l}{2\,m}, -\frac{\sqrt{m^2 + 10\,l\,m + l^2} + m + l}{2\,m}\right]$$

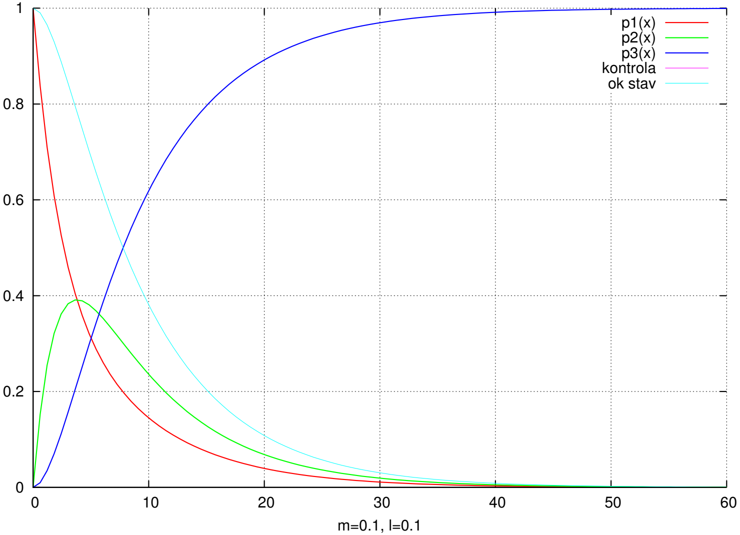
$$x_3 = [0, 0, 1]$$

$$v_1 = -\frac{\sqrt{m^2 + 10\,l\,m + l^2} + m + 5\,l}{2}$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{m^2 + 10\,l\,m + l^2} - m - 5\,l}{2}$$

$$v_3 = 0$$

Příklad — RAID 3



Příklad — RAID 3