# A6M33SSL: Statistika a spolehlivost v lékařství
# Teorie spolehlivosti

Vojta Vonásek
vonasek@labe.felk.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky

# Opakování

Poruchy jednotlivých prvků

- Zatím uvažujeme dvoustavové prvky (funguje/nefunguje)
- Poruchy jsou náhodné v čase $t$ (případně km/objem…)
- Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$
- Intenzita poruch $\lambda(t)$
- Umíme použít různá rozdělení poruch
- Jak je to v případě složitějších soustav/prvků?
  - soustavy prvků
  - vícestavové prvky
  - poruchy s opravami

# Spolehlivost soustav

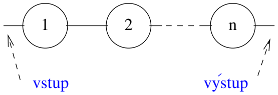
- Analýza spolehlivosti komplexního systému je náročná
- Analýza podsystémů je jednoduší
- Vyžadována znalost o propojení systémů
- Předpokládáme nezávislost poruch podsystémů

**Značení:**

- $X_i$: stav, že funguje prvek $i$,
  $\rightarrow$ $P(X_i) = R_i(t)$ je pravděpodobnost. že prvek $i$ funguje
- $\overline{X}_i$: je, kdy prvek $i$ nefunguje
  $\rightarrow$ $P(\overline{X}_i) = Q_i(t)$ je pravděpodobnost. že prvek $i$ nefunguje
- Porucha jednoho prvku ještě nemusí znamenat poruchu celého systému
- Sledujeme, zda soustava "přenáší signál ze vstupu na výstup"

# Sériové zapojení

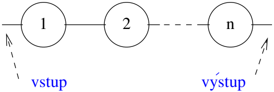
- dvoustavové prvky (buď funguje, nebo je porucha)
- prvky jsou bez oprav
- prvky jsou nezávislé
- celá soustava je funkční, když jsou funkční všechny prvky
- porucha alespoň jednoho prvku způsobí poruchu celé soustavy




$$R = P(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdots P(X_n)$$

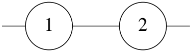
# Sériové zapojení

- dvoustavové prvky (buď funguje, nebo je porucha)
- prvky jsou bez oprav
- prvky jsou nezávislé
- celá soustava je funkční, když jsou funkční všechny prvky
- porucha alespoň jednoho prvku způsobí poruchu celé soustavy



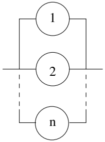

$$R = P(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdots P(X_n)$$

**Příklad:** $P(X_1) = 0.9$, $P(X_2) = 0.8$
$R = P(X_1) \cdot P(X_2) = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$




**Celková pravděpodobnost, že soustava funguje je menší než spolehlivost nejhoršího prvku.**

# Paralelní zapojení

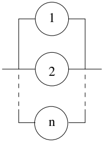



- dvoustavové prvky bez oprav, nezávislé
- celá soustava je funkční, pokud funguje alespoň jeden prvek

$$
\begin{aligned}
R &= P(X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n) \\
&= 1 - P(\text{nefunguje ani jeden prvek}) \\
&= 1 - P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2)\cdots P(\overline{X}_n) \\
&= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2))\cdots(1 - P(X_n))
\end{aligned}
$$

# Paralelní zapojení

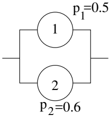
- dvoustavové prvky bez oprav, nezávislé
- celá soustava je funkční, pokud funguje alespoň jeden prvek




$$
\begin{aligned}
R &= P(X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n) \\
&= 1 - P(\text{nefunguje ani jeden prvek}) \\
&= 1 - P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2)\cdots P(\overline{X}_n) \\
&= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2))\cdots(1 - P(X_n))
\end{aligned}
$$

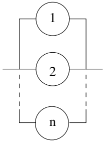
**Příklad:** $P(X_1) = 0.5, P(X_2) = 0.6$

$R = 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2)) = 1 - 0.5 \cdot 0.4 = 0.8$



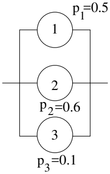
# Paralelní zapojení

- dvoustavové prvky bez oprav, nezávislé
- celá soustava je funkční, pokud funguje alespoň jeden prvek



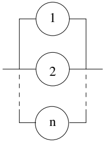

$$
\begin{aligned}
R &= P(X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n) \\
&= 1 - P(\text{nefunguje ani jeden prvek}) \\
&= 1 - P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2)\cdots P(\overline{X}_n) \\
&= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2))\cdots(1 - P(X_n))
\end{aligned}
$$

**Příklad:** $P(X_1) = 0.5, P(X_2) = 0.6, P(X_3) = 0.1$
$R = 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2))(1 - P(X_3)) =$
$1 - 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.9 = 0.82$



# Paralelní zapojení

- dvoustavové prvky bez oprav, nezávislé
- celá soustava je funkční, pokud funguje alespoň jeden prvek




$$
\begin{aligned}
R &= P(X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n) \\
&= 1 - P(\text{nefunguje ani jeden prvek}) \\
&= 1 - P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2)\cdots P(\overline{X}_n) \\
&= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2))\cdots(1 - P(X_n))
\end{aligned}
$$

**Celková pravděpodobnost, že soustava funguje je větší než spolehlivost nejlepšího prvku.**

# Sériová/paralelní soustava pro závislé prvky

- Nezávislé prvky: $P(X_1 \wedge X_2) = P(X_1)P(X_2)$
- Závislé prvky: $P(X_1 \wedge X_2) = P(X_1)P(X_2|X_1)$

## Sériová soustava:

$$\begin{aligned} R &= P(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n) \\ &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1X_2)\cdots P(X_n|X_1X_2\ldots X_{n-1}) \end{aligned}$$

## Paralelní soustava:

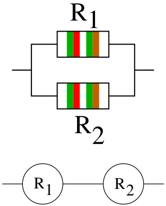
$$\begin{aligned} Q &= P(\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2 \wedge \ldots \wedge \overline{X}_n) \\ &= P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2|\overline{X}_1)P(\overline{X}_3|\overline{X}_1\overline{X}_2)\cdots P(\overline{X}_n|\overline{X}_1\ldots\overline{X}_{n-1}) \end{aligned}$$

# Zapojení prvků ve spolehlivosti

**Zapojení prvků z hlediska spolehlivosti nemusí odpovídat jejich fyzickému zapojení!**

- Je nutné rozlišovat fyzické zapojení a zapojení z hlediska spolehlivosti
- Záleží na poruchách prvků a na celkové požadované funkci obvodu

**Příklad:** paralelní zapojení rezistorů




- Rezistor je funkční, pokud má odpor $R$
- Celý systém je funkční, pokud má odpor $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
- Porucha jednoho rezistoru vede na změnu odporu celé soustavy
- Z hlediska spolehlivosti jsou prvky v sérii

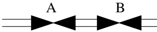
Jaké zapojení byste zvolili pro:

- žárovky osvětlující místnost?
- signální žárovky na palubní desce letadla?
- kombinace UPS/PC, IO obvody na PCB?

# Zapojení prvků ve spolehlivosti

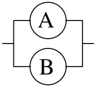
## Schéma spolehlivosti také závisí na jejich funčnosti a požadované funkčnosti celého systému

- Hydraulický ventil je pod tlakem otevřen
- Pokud není tlak, ventil se automaticky zavře ("fail-safe-close")



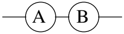

### Případ I

- Ventil funguje, pokud se při výpadku tlaku automaticky zavře
- Systém funguje, pokud ventily fungují jako bezpečnostní bariéra
- Z hlediska spolehlivosti jsou zapojeny paralelně



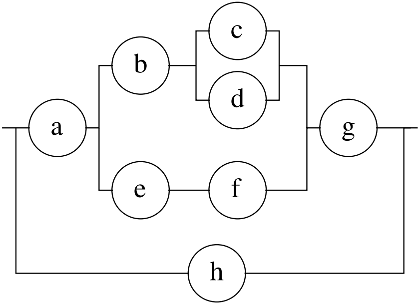

### Případ II

- Ventil funguje, pokud je při tlaku otevřený a při ne-tlaku zavřený. Je porouchaný, pokud se zavře i při tlaku.
- Systém funguje, pokud je potrubí při tlaku otevřené
- Z hlediska spolehlivosti se jedná o sériové zapojení



# Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

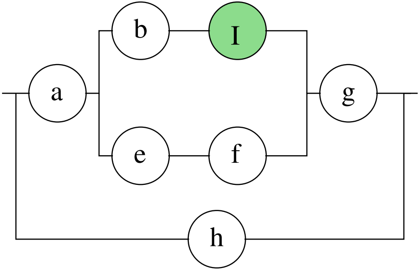



Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

# Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

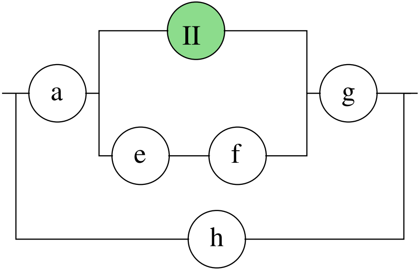



Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

# Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

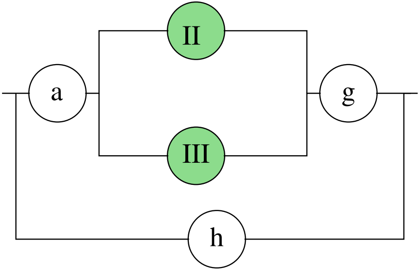



Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

# Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

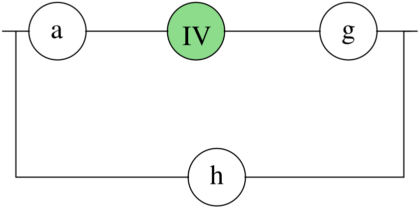



Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

# Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

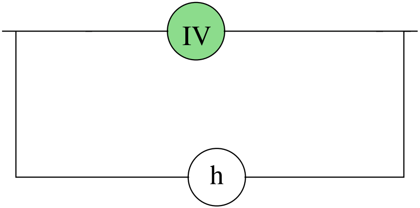



Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

# Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

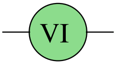



Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

# Výpočet spolehlivosti soustav

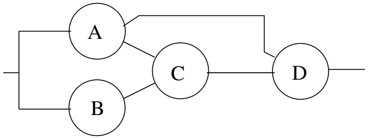
- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme




Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

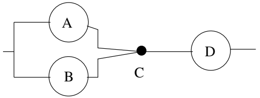
- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

# Metoda rozkladu



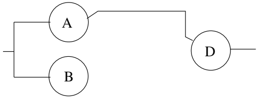

Pokud prvek $C$ funguje:

$$P(S|C) = (P(A) + P(B) - P(A)P(B)) \cdot P(D)$$




Případ, kdy prvek C nefunguje:

$$P(S|\bar{C}) = P(A) \cdot P(D)$$




Celková právděpodobnost, že soustava funguje:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|C) \cdot P(C) + P(S|\bar{C})(1 - P(C)) \\ &= P(C)[P(A) + P(B) - P(A)P(B)] + (1 - P(C))[P(A)P(D)] \\ &= P(A)P(D) + P(B)P(C)P(D) - P(A)P(B)P(C)P(D) \end{aligned}$$

# Systémy typu $m$ z $n$

- Systém se skládá z $n$ komponent
- Jednotlivé prvky jsou identické, nezávislé a dvou-stavové
- Pravděpodobnost bezporuchového provozu každého prvku je $p$

**Pro správnou funkci systému je třeba právě $m$ prvků.**

Pravděpodobnost, že $m$ prvků funguje je:

$$P = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

**Pro správnou funkci systému je třeba alespoň $m$ prvků.**

Pravděpodobnost, že alespoň $m$ prvků funguje je:

$$P = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Použití: automobilový průmysl, telekomunikace, integrované obvody
- Obecně se používá k zálohování

# Výpočet soustav s náhodnými poruchami

Jak určit spolehlivost soustav pro časově závislé náhodné poruchy?

- Poruchy prvků lze modelovat známými hustotami
- Známe $R_i(t)$ jednotlivých prvků
- Výpočet se provádí uvedenými metodami
- $P(X_i) = R_i(t)$ a $Q(X_i) = 1 - R_i(t)$
- Na základě výsledné spolehlivosti $R(i)$ lze dále odvozovat $T_s$, hustotu apod..

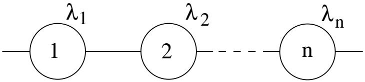
**Předpoklady:**

- Nezávislé prvky
- Struktura systému se nemění v čase

# Výpočet soustav s náhodnými poruchami

**Příklad:** sériová soustava

- Uvažujme exponenciálním rozdělení poruch s parametry $\lambda_i$
- $R_i(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t}$




$$
\begin{aligned}
R(t) &= P(X_1) \cdot P(X_2) \cdots P_n(X_3) \\
&= R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \cdots \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \\
&= \mathrm{e}^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) t}
\end{aligned}
$$

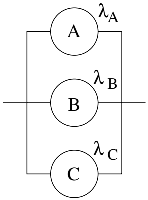
Jaká je střední doba bezporuchového provozu této soustavy?

$$T'_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

# Výpočet soustav s náhodnými poruchami

**Příklad:** paralelní zapojení

- Uvažujme exponenciálním rozdělení poruch s parametry $\lambda_A = 0.1$, $\lambda_B = 0.2$, a $\lambda_C = 0.3$
- $R_A(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_A t}$, atd.



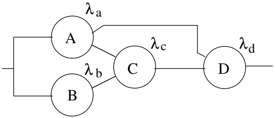

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t))(1 - R_C(t)) \\ &= 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda_A t})(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_B t})(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_C t}) \end{aligned}$$

Výpočet $R(20)$ soustavy:

$$\begin{aligned} R_A(20) &= \mathrm{e}^{-0.1 \cdot 20} = 0.13 \\ R_B(20) &= \mathrm{e}^{-0.2 \cdot 20} = 0.018 \\ R_C(20) &= \mathrm{e}^{-0.3 \cdot 20} = 0.0024 \\ R(20) &= 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0.1 \cdot 20})(1 - \mathrm{e}^{-0.2 \cdot 20})(1 - \mathrm{e}^{-0.3 \cdot 20}) = 0.153 \end{aligned}$$

# Výpočty s uvažováním časově závislých poruch

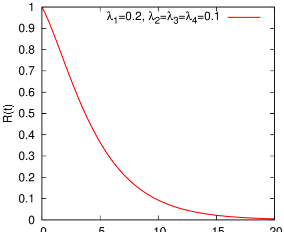
**Příklad:** metoda rozkladu

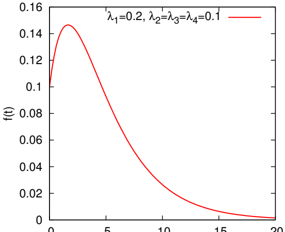


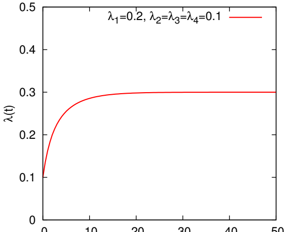

$$P(S) = P(A)P(D) + P(B)P(C)P(D) - P(A)P(B)P(C)P(D)$$

Předpokládajme exp. rozdělení poruch u všech prvků s parametry $\lambda_a, \ldots, \lambda_d$. Tudíž $P(A) = \mathrm{e}^{-\lambda_a t}$, $P(B) = \mathrm{e}^{-\lambda_b t}$, atd.

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathrm{e}^{-\lambda_a t}\mathrm{e}^{-\lambda_d t} + \mathrm{e}^{-\lambda_b t}\mathrm{e}^{-\lambda_c t}\mathrm{e}^{-\lambda_d t} - \mathrm{e}^{-\lambda_a t}\mathrm{e}^{-\lambda_b t}\mathrm{e}^{-\lambda_c t}\mathrm{e}^{-\lambda_d t} \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda_a+\lambda_d)t} + \mathrm{e}^{-(\lambda_b+\lambda_c+\lambda_d)t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_a+\lambda_b+\lambda_c+\lambda_d)t} \end{aligned}$$

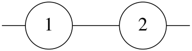


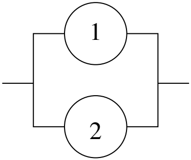
# Porovnání sér. a paralelní kombinace

Pokud prvky mají exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda_1$ a $\lambda_2$




$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

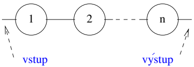



$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

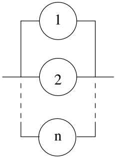
$$T_s = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

# Porovnání sér. a paralelní kombinace

Pokud prvky mají exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda_1$ a $\lambda_2$




$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\cdots\mathrm{e}^{-\lambda_n t}$$




$$T_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

$$R(t) = 1 - (1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t})\cdots(1-\mathrm{e}^{-\lambda_n t})$$

$$\begin{aligned} T_s \quad &= \quad \left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}\right) - \left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{n-1}\lambda_n}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n}\right) \\ &\quad \cdots \\ &\quad +(-1)^{n-1}\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}}\lambda_i \end{aligned}$$

# Metoda seznamu

- Vytvořit seznam všech možných stavů systémů
- Označit stavy $i$, kde soustava funguje
- Spočítat $R_i(t)$ pro tyto stavy
- Spolehlivost soustavy je pak

$$R(t) = \sum_{i}^{k} R_i(t),$$

kde $k$ je počet funkčních stavů.

- Metoda hrubé síly, vyžaduje vyhodnotit $2^n$ stavů

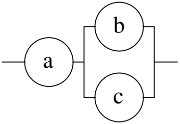
# Metoda drah a řezů

- Metoda vhodná pro soustavy s nezávislými prvky
- Vychází z grafu soustavy
  - Vrcholy grafu jsou prvky soustavy
  - Hrany grafu jsou jejich spojnice
- Analýza na základě drah a řezů v grafu
- Soustava funguje, pokud funguje alespoň jedna dráha
- Soustava je v poruše, pokud nefunguje alespoň jeden řez

# Metoda drah a řezů

## Cesta v grafu:

- Taková množina komponent $T$, které svoji funkčností zajišťují funkčnost celého systému
- Cesta je minimální pokud z ní nemůžeme žádný prvek odebrat, aniž by přestala být cestou
- Pravděpodobnost, že cesta $T$ funguje: $P(T)$ je sériové zapojení jejích komponent



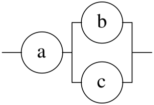

**Cesty:** $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ , $\{a, b, c\}$
**Minimální cesty:** $\{a, b\}, \{a, c\}$

Pravděpodobnost, že funguje cesta $\{a, b\}$: $P(a–b) = P(a) \cdot P(b)$

Poznámka:
Cesta $\{a, b, c\}$ není minimální, protože můžeme odebrat např. $b$ a výsledek (tj. $\{a, c\}$) je pořád cestou a zajišťuje chod systému.

# Metoda drah a řezů

**Řez:**




- Taková množina komponent $C$, jejichž současná porucha způsobí poruchu celého systému
- Řez je minimální pokud z něj nemůžeme žádný prvek odebrat aniž by přestal být řezem.
- Pravděpodobnost, že řez $C$ nefunguje $Q(C)$ je pravděpodobnost, že nefungují všechny prvky řezu současně

**Řezy:** $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$,$\{a, b, c\}$
**Minimální řez:** $\{a\}$, $\{b, c\}$

**Pravděpodobnost, že řez $\{a, c\}$ nefunguje:** $Q(ac) = P(\bar{a}) \cdot P(\bar{c})$
Poznámka: $\{a, b\}$ není minimální řez, protože lze redukovat odebráním $b$ na $\{a\}$, což je pořád řez. Obdobně pro $\{a, c\}$ (lze odebrat $c$ a získat řez $\{a\}$). Podobně pro $\{a, b, c\}$.

# Metoda drah a řezů

- Obvod funguje, pokud je funkční alespoň jedna minimální cesta $T_1, \ldots, T_n$
- Obvod nefunguje, pokud je nefunční alespoň jeden minimální řez $C_1, \ldots, C_m$

**Pravděpodobnost, že systém funguje:**

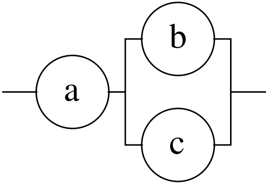
$$R = P(T_1 \vee T_2 \vee \ldots \vee T_n)$$

**Pravděpodobnost, že systém nefunguje:**

$$Q = P(\overline{C_1} \vee \overline{C_2} \vee \ldots \vee \overline{C_m})$$

# Metoda drah a řezů — příklad

**Minimální cesty:** $T_1 = \{a, b\}, T_2 = \{a, c\}$
**Minimální řez:** $C_1 = \{a\}$, $C_2 = \{b, c\}$




Pravděpodobnost, že systém funguje:

$$R = P(T_1 \vee T_2) = 1 - (1 - P(T_1))(1 - P(T_2))$$

kde $P(T_1) = P(a) \cdot P(b)$ a $P(T_2) = P(a) \cdot P(c)$.
Pravděpodobnost, že systém nefunguje:

$$Q = P(\overline{C_1} \vee \overline{C_2}) = P(\overline{C_1}) + P(\overline{C_2}) - P(\overline{C_1})P(\overline{C_2})$$

# Metoda drah a řezů — řešení soustavy

- Výpočet minimálních drah a minimálních řezů může být komplikované u velkých (složitých) soustav
- Grafové algoritmy
- Je nutné výpočet pravděpodobnosti sjednocení jevů, které se nevylučují (složité pro hodně prvků)
- Možné zjednodušení: prostý součet pravděpodobností

**Příklad:**

$$
\begin{aligned}
P(A \vee B \vee C) \quad = \quad & P(A) + P(B) + P(C) \\
& -P(AB) - P(BC) - P(AC) \\
& +P(ABC)
\end{aligned}
$$

Pokud se jevy $A, B, C$ vzájemně vylučují:
$P(A \vee B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C)$.
Obecně:

$$P(A \vee B \vee C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

# Metoda drah a řezů — zjednodušení

- Zjednodušení: prostý součet pravděpodobností pro sjednocení jevů
- Důsledek: $R$ a $Q$ poskytují pouze horní a spodní odhady spolehlivosti

**Pravděpodobnost bezporuchového provozu (horní odhad):**

$$R \leq \sum_i P(T_i), \quad T_i \text{ jsou dráhy}$$

**Pravděpodobnost poruchy (horní odhad):**

$$Q \leq \sum_i P(\overline{C_i}) \quad C_i \text{ jsou řezy}$$

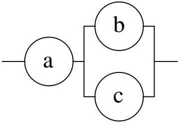
a dolní odhad $R$ je tedy:

$$R \geq 1 - \sum_i P(\overline{C_i})$$

# Metoda drah a řezů — příklad

## Zjednodušený výpočet metodou drah a řezů

- **Minimální cesty:** $T_1 = \{a, b\}, T_2 = \{a, c\}$
- **Minimální řez:** $C_1 = \{a\}$, $C_2 = \{b, c\}$
- Všechny prvky stejné: $P(a) = P(b) = P(c) = p$.




$$R \leq P(T_1) + P(T_2) = P(a)P(b) + P(a)P(c) = 2p^2$$

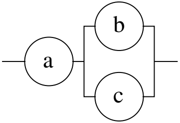
$$\begin{aligned} R &\geq 1 - \left(P(\overline{C_1}) + P(\overline{C_2})\right) \\ &\geq 1 - ((1 - P(a)) + (1 - P(b))(1 - P(c))) \\ &\geq -1 + 3p + p^2 \end{aligned}$$

$$-1 + 3p - p^2 \leq R \leq 2p^2$$

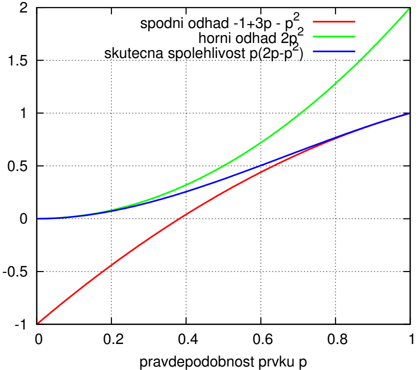
# Metoda drah a řezů — příklad

## Zjednodušený výpočet metodou drah a řezů

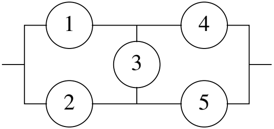
- **Minimální cesty:** $T_1 = \{a, b\}, T_2 = \{a, c\}$
- **Minimální řez:** $C_1 = \{a\}$, $C_2 = \{b, c\}$
- Všechny prvky stejné: $P(a) = P(b) = P(c) = p$.




$$-1 + 3p - p^2 \leq R \leq 2p^2$$



# Metoda drah a řezů — příklad




**Minimálná dráhy:** $\{1,4\}$ $\{2,5\}$ $\{1,3,5\}$ $\{2,3,4\}$
**Minimální řezy:** $\{1,2\}$ $\{4,5\}$ $\{1,3,5\}$ $\{2,3,4\}$